EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS

JULIO CÉSAR ANDRADE LÓPEZ

Catalogación en la publicación - Biblioteca Nacional de Colombia

Andrade López, Julio César
Ejercicios resueltos de matemáticas financieras / Julio César Andrade López. -- 1a. ed. – Bogotá : Ecoe Ediciones, 2017.
131 p. – (Ciencias empresariales. Contabilidad y finanzas)
Incluye bibliografía.

ISBN 978-958-771-523-1 -- 978-958-771-524-8 (e-book)

1. Matemáticas financieras - Problemas, ejercicios, etc. I. Título II. Serie

CDD: 657.48 ed. 23 CO-BoBN– a1008484

Colección: *Ciencias empresariales*
Área: *Contabilidad y finanzas*

ECOE EDICIONES

e-mail: info@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 # 63C 32, Tel.: 248 14 49
Bogotá, Colombia

Primera edición: Bogotá, septiembre de 2017
ISBN: 978-958-771-523-1
e-ISBN: 978-958-771-524-8
Dirección editorial: Angélica García Reyes
Corrección de estilo: Juan Mikan
Diagramación: Denise Rodríguez Ríos
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz
Impresión: Digiprint Editores
Calle 63 # 70 D -34

DEDICATORIA

Al arquitecto del Universo,

A la memoria de mi madre,

Rosita López de Andrade (QEPD),

A mi amada esposa,
Andrea del Pilar Bautista Perdomo,

A mis entrañables hijos,
Juliana Marcela, María Camila, Julián Andrés y Valentina
A mi hermosa familia,

y a mis apreciados estudiantes.

CONTENIDO

Al final del libro está ubicado el código para que pueda acceder al **Sistema de Información en Línea –** SIL, donde encontrará una serie de talleres complementarios a la lectura sobre Conversión, Anualidades, Descuentos bancarios, Ecuaciones de valor e Interés simple y compuesto, los cuales le serán de gran ayuda a la lectura del libro.

PRÓLOGO

académico en particular y al público en general, como docente de amplia experiencia en finanzas, constituye un esfuerzo clave para difundir las enseñanzas de las matemáticas financieras como un componente imprescindible de la ingeniería económica.

El fundamento esencial de este libro es presentar en forma concisa, a través de ejercicios prácticos extractados de textos de varios autores y resueltos por el profesor Andrade, las muchas aplicaciones de las matemáticas financieras en los diferentes escenarios de los negocios, las organizaciones y el mercado financiero en general; todo lo anterior sin sacrificar la capacidad analítica del lector.

El enfoque estructurado en el diseño del texto le va a permitir al lector utilizarlo para aprender, comprender y aplicar correctamente los principios y técnicas para una adecuada toma de decisiones. En este sentido, la secuencia del texto así lo exhibe, empezando la primera parte con las clases de tipos de interés y sus equivalencias y la forma como se presentan al público en el mercado financiero. Posteriormente, en la segunda parte, incluye las ecuaciones de valor, invitando al lector a buscar la mejor forma de interpretar, analizar y solucionar los problemas del común.

Luego, en una tercera sección, consigna e identifica los diferentes tipos de anualida des, su cálculo de pagos constantes en valor actual y valor futuro, sistemas de amortización con cuotas fijas, número de cuotas necesarias para cancelar una obligación y el interés que se debe pagar por una financiación.

Finalmente, en el capítulo cuarto, resuelve los ejercicios de gradientes, que son anualidades o serie de pagos periódicos, en los cuales cada pago es igual al anterior más una cantidad que puede ser constante o proporcional al pago inmediatamente anterior.

Evidentemente, es una gran satisfacción prologar el surgimiento de este nuevo texto, máxime cuando se percibe que va a tener un innegable nivel de utilidad o interés para el público académico, bien si se trata de un autor que es garante de una rigurosidad y claridad en sus planteamientos. El contenido del libro se puede considerar como muy interesante, tanto por su estructura como por la forma en que está redactado, amén del constante apoyo de los conceptos matemáticos con numerosos ejemplos prácticos resueltos. Por otra parte, el profesor Andrade es una persona que merece la máxima considera-ción profesional, dándose la circunstancia, además, de mi estrecha vinculación profesional con él en la Universidad Central de Bogotá, en la que compartimos tareas docentes, lo que me permite dar fe de su inequívoco grado de cualificación profesional y su admirable constancia personal, hecho que constituye el mejor sello de prestancia profesional que puede acompañar, por tanto, a la presente obra.

Álvaro Bermeo Torres

PRESENTACIÓN

Interesado en resolver ejercicios prácticos de matemáticas financieras, me di a la

la ingeniería económica escritos por los docentes Gabriel Baca Urbina, Guillermo Baca Currea, Jhonny de Jesús Meza Orozco, Alberto Álvarez Arango y Humberto Rueda Ramírez, entre los más destacados.

Ejercicios resueltos de matemáticas financieras, como lo denominé, contiene 103

ejercicios desarrollados, teniendo en cuenta las interpretaciones financieras de cada problema en particular, así como el desarrollo del interés simple, el interés compuesto, la conversión de tasas, las ecuaciones de valor, las anualidades y los gradientes, para que el lector tenga la posibilidad de encontrar en este documento la variedad de temas que comprenden las matemáticas financieras básicas o la introducción a la ingeniería económica. La idea de solucionar problemas

financieros que solamente están propuestos y

no tienen procedimiento ni respuesta, se apoya en la necesidad que tienen los docentes, los estudiantes de pregrado y posgrado de Economía, Administración, Ingenierías y lectores en general de tener un libro guía donde encuentren solución a sus dudas y tengan la oportunidad de interpretar, analizar y asociar el contenido a sus conocimientos matemáticos y financieros.

Los presaberes matemáticos y financieros que el lector debe conocer son: suma, resta, multiplicación y división de números, operaciones básicas con números reales, despeje de fórmulas, valor del dinero en el tiempo y uso de calculadora científica.

Los problemas se resolvieron de la manera más fácil vista por el autor, pero como hay diferentes formas de solucionar un ejercicio, el lector puede intentarlo por la manera más viable posible, teniendo en cuenta que en la solución encuentre la res-
puesta correcta; simplemente se comprueba y se verifica la respuesta verdadera, demostrándole al lector que cuando se resuelven problemas financieros se van ad-
quiriendo habilidades de pensamiento lógico.

En el presente texto se busca aplicar el mayor número de secuencias, con el fin de facilitar los procesos de enseñanza aprendizaje y enriquecer los conocimientos de la comunidad en general, interesada en mejorar las habilidades financieras.

Igualmente, deseo hacer público mi reconocimiento a la universidad Surcolombia na donde soy docente, tiempo completo planta adscrito a la facultad de economía y administración, por la elaboración del presente texto académico.

UNIDAD 1

INTERÉS Y TASA DE INTERÉS

Ejercicios propuestos

1. Efectúe las siguientes conversiones entre períodos de tiempo:

   a. 78 días = ___ meses = ___ años = ___ trimestres = ___ semestres

   b. 13 años = ___ semestres = ___ meses = ___ bimestres = ___ días

   c. 29 trimestres = ___ meses = ___ días = ___ años = ___ semestres

2. En un proyecto se invierten $2.000.000 y al final de un año el proyecto devuelve en total $2.500.000:

   a. Represente gráficamente esta transacción.

   b. ¿Cuál es el interés que se obtuvo en este proyecto?

   c. ¿Cuál es la tasa de interés que se gana en este proyecto?

3. Juan deposita en una cuenta de ahorros $3.500.000 hoy y, al cabo de seis meses, hace un retiro de la totalidad de la cuenta igual a $4.150.000:

   a. Represente gráficamente esta transacción.

   b. ¿Cuál es el interés que obtuvo en la cuenta de ahorros?

   c. ¿Cuál es la tasa de interés que gana en la cuenta de ahorros?

4. Pedro acude a un prestamista que trabaja con un interés del 20% anual para hacer un préstamo de \$6.500.000 con vencimiento a un año. Represente gráfi- ca mente esta transacción y diga cuánto debe pagar Pedro al finalizar el año.

5. ¿Qué le recomendaría usted a un inversionista que se encuentra ante la opción de elegir una de las siguientes alternativas?

   a. Comprar hoy una bodega por \$35.500.000, con la posibilidad de venderla por \$65.000.000 dentro de 2,5 años.

   b. Prestar este dinero a una tasa de interés del 2,30% mensual.

6. Si el rendimiento del dinero es del 35% anual, ¿qué oferta es más conveniente para la venta de un terreno?

   a. \$16.000.000 de contado.

   b. \$2.000.000 hoy y el saldo en dos pagarés: uno de \$5.100.000 a 90 días y otro de \$11.000.000 a 180 días.

7. Se invirtieron \$2.000.000 y a los 3 años se recibieron \$3.600.000. ¿Qué tasa trimestral arrojó la operación financiera?

8. Hace 8 meses disponía de \$3.850.000 y tenía las siguientes alternativas de inversión: a. Comprar un inventario de ropa por este valor, que a precio de hoy valen \$4.750.000; b. Invertirlos en una entidad que me paga el 2,8%. Después de consultarlo me decidí por la primera alternativa. ¿Fue acertada la decisión?

9. ¿Cuánto tiempo debo esperar para que se duplique mi inversión en una cor- po ración que paga el 1,5% mensual?

10. Establecer las siguientes equivalencias:

    a. Una tasa efectiva trimestral equivalente al 7% *ETA*.

    b. Una tasa anticipada mensual equivalente al 13% *ES*.

    c. Una tasa nominal *ATV*, equivalente al 24% *AMV*.

    d. Una tasa nominal *AMV*, equivalente al 12% efectivo trimestral.

    e. Una tasa *ATA* equivalente al 25% efectivo anual.

    f. Una tasa efectiva anual, equivalente al 25% anual anticipada.

    g. Una tasa anual anticipada, equivalente al 36% anual vencida.

    h. Una tasa anual anticipada, equivalente al 22,5% *AMA*.

    i. Una tasa mensual anticipada, equivalente al 41,12% *EA*.

    j. Una tasa nominal *AMV*, equivalente al 36% mes anticipado.

11. Se quieren invertir cinco millones a dos años. Las tasas de interés que se ofrecen en el mercado son las siguientes:

    a. 23,8% nominal semestre anticipado.

    b. 26% nominal trimestre vencido.

    c. 25,5% nominal mes vencido.

    d. 28,7% efectiva anual.

    Determinar el valor final para cada alternativa. ¿Cuál es la mejor?

12. Determine:

    a. Cuánto tiempo se necesita para triplicar un capital al 30% *ATV*.

    b. Cuánto tiempo se requiere para que $80.000 se conviertan en $200.000, al 30% *AMV*.

    c. Cuánto tiempo se necesita para que $800.000 se tripliquen al 20% *ATA*.

    d. Cuánto tiempo se necesita para duplicar un capital al 30% *AMV*.

    e. A qué tasa efectiva anual se duplica un capital en dos años y medio.

    f. A qué tasa nominal convertible semestralmente se duplica un capital en dos años.

    g. Qué tasa nominal convertible mensualmente se duplica un capital en dos años.

    h. Qué tasa efectiva anual se requiere para que en dos meses un capital se incre mente en un 2,5%.

13. Hallar el valor final de un documento de valor inicial $5.000.000 en un plazo de tres años y 6 meses si el interés es el 34% *ATV*.

14. La corporación financiera Consaca recibe una letra de cambio por valor nominal de $900.000 con vencimiento en 10 meses y un interés del 35% *NMV*. A los cuatro meses Consaca vende la letra a la corporación financiera Damolienda que cobra el 4% mensual por la transacción. ¿Cuánto recibe la corporación Consaca por la letra? ¿Cuánto le cuesta tener que vender la letra?

15. Hoy se invierten $1.234.560 en un negocio que al cabo de 7 meses retorna $1.474.560. Expresar la rentabilidad de este negocio como *EA*, *EM* y efectiva semanal. Asuma que un año tiene 52 semanas.

16. Un equipo de sonido se adquiere pagando \$300.000 el día 1 de marzo, \$250.000 el día 1 de junio, \$400.000 el día 1 de septiembre y \$500.000 el día 1 de diciembre de un mismo año. Suponiendo una tasa de financiación del 45% efectivo anual, determine cuál sería el valor del equipo si se pagara de contado el día 1 de marzo, el día 1 de junio, el día 1 de septiembre y el día 1 de diciembre.

17. *M* es un proyecto de inversión en el que usted invierte hoy \$3.206.250 y a los 8 meses obtiene \$3.680.731,38. Considerando una inflación del 8,56% efectiva anual, determine cuál es la rentabilidad real de *M*.

18. Considerando una inflación del 18,5%, ¿cuál debe ser la rentabilidad total para que la rentabilidad real sea el 27%?

19. Usted estaba muy satisfecho porque la empresa obtuvo una rentabilidad total del 38,9% durante el año que acabó de terminar, pero un amigo aguafiestas le dice que su verdadera rentabilidad fue 13,3%. ¿Qué inflación estará considerando su amigo?

20. Hoy se adquiere un vehículo que vale 50 millones; se cancela el 30%, y el saldo se debe pagar en 3 cuotas de 10, 15 y 20 millones dentro de 6, 9 y 12 meses res pectivamente. ¿Qué tasa de interés efectiva anual cobra el concesionario?

21. El municipio de Neiva recibe un préstamo en dólares con una tasa de interés del 7% efectivo anual y un año de plazo. En el momento del desembolso un dó lar vale \$1.987 y se estima una devaluación del 9% anual. Al final del año debe pagar 2.000 millones de pesos para cancelar el crédito. Determine la can- ti dad prestada en dólares.

Ejercicios resueltos

Para desarrollar los ejercicios propuestos de interés simple, interés compuesto y conversión de tasas en el presente texto, utilizaremos las siguientes fórmulas de matemáticas financieras con su correspondiente nomenclatura. Es importante re- sal tar que para usar las fórmulas es necesario expresar el tiempo y la tasa de inte- rés efectivo en las mismas referencias:

F = Valor futuro.

P = Valor presente.

n = Número de períodos.

i = Tasa de interés.

I = Interés.

- **Fórmulas de interés simple**

$F = P(1 + i(n))$ Valor futuro

$P = \dfrac{F}{1 + i(n)}$ Valor presente

$n = \dfrac{\left(\frac{F}{P} - 1\right)}{i}$ Número de períodos

$i = \dfrac{\left(\frac{F}{P} - 1\right)}{n}$ Tasa de interés

$I = P(i)(n)$ Interés

- **Fórmulas de interés compuesto**

$F = P(1 + i)^n$ Valor futuro

$P = F(1 + i)^{-n}$ Valor presente

$n = \dfrac{\mathrm{Log}\left(\frac{F}{P}\right)}{\mathrm{Log}(1 + i)}$ Número de períodos

$i = \sqrt[n]{\left(\frac{F}{P}\right)} - 1$ Tasadeinterés

$I = P[(1 + i)^n - 1]$ Interés

- **Conversión de tasas**

i = Tasa efectiva vencida.

ia = Tasa efectiva anticipada.

m = Período de la tasa conocida.

n = Período de la tasa desconocida.

$i = \dfrac{ia}{(1 - ia)}$ de efectiva anticipada a efectiva vencida.

$ia = \dfrac{i}{(1 + i)}$ de efectiva vencida a efectiva anticipada.

$i = (1 + i)^{\left(\frac{m}{n}\right)} - 1$ de efectiva vencida de un período a otro.

- **Tasas deflactadas o reales**

  ir = Tasa deflactada o tasa real.

  i = Tasa efectiva vencida.

  f = Índice de inflación.

  $ir = \frac{i \ \ f}{1 \ \ f}$ Tasa deflactada o real.

  $f = \frac{i \ \ ir}{1 \ \ ir}$ Tasa de inflación.

  $i = ir(1 + f) + f$ Tasa efectiva vencida.

1. Efectúe las siguientes conversiones entre períodos de tiempo:

   a. 78 días = ___ meses = ___ años = ___ trimestres = ___ semestres

   b. 13 años = ___ semestres = ___ meses = ___ bimestres = ___ días

   c. 29 trimestres = ___ meses = ___ días = ___ años = ___ semestres

A manera de ilustración, presentamos un cuadro de conversiones de tiempo toma ndo como base un año, con el ánimo de hacer más entendible el cálculo matemá tico de las conversiones entre períodos que se solicitan:

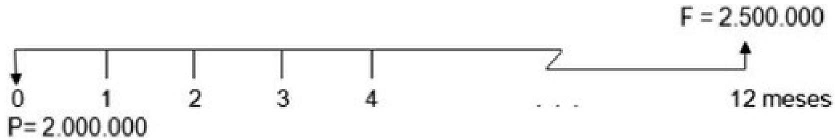
	Día	Mes	Bimestre	Trimestre	Semestre	Año
1 día	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{360}$
1 mes	30	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1 bimestre	60	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1 trimestre	90	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1 semestre	180	6	3	2	1	$\frac{1}{2}$
1 año	360	12	6	4	2	1

a. 78 días = 78/30 = 2,6 meses
= 78/360 = 0,2166 años
= 78/90 = 0,8666 trimestres
= 78/180 = 0,4333 semestres

b. 13 años = 13 3 2 = 26 semestres
= 13 3 12 = 156 meses
= 13 3 6 = 78 bimestres
= 13 3 360 = 4.680 días

c. 29 trimestres = 29(3) = 87 meses
= 29(90) = 2610 días
= 29/4 = 7,25 años
= 29/2 = 14,5 semestres

2. En un proyecto se invierten $2.000.000 y al final de un año el proyecto devuelve en total $2.500.000. a. Represente gráficamente esta transacción; b. ¿Cuál es el interés que se obtuvo en este proyecto?; c. ¿Cuál es la tasa de interés que se gana en este proyecto?



La gráfica nos muestra la inversión inicial del proyecto y su valor futuro al cabo de los 12 meses. Para el cálculo del interés ganado que se obtuvo, restamos el valor futuro del valor presente, esto es:

$I = F - P$

$I = \$2.500.000 - \$2.000.000$

$I = \$500.000$

Para el cálculo de la tasa de interés:

Con interés simple se tiene:

$$i = \frac{\left(\frac{2.500.000}{2.000.000} - 1\right)}{12} = 0,020833\ (100) = 2,08\%\ M$$

Con interés compuesto se tiene:

$$i = \sqrt[12]{\frac{2.500.000}{2.000.000}} - 1 = 0,018769\ (100) = 1,87\%\ EM$$

3. Juan deposita en una cuenta de ahorros $3.500.000 hoy y, al cabo de seis meses, hace un retiro de la totalidad de la cuenta igual a $4.150.000. a. Represente gráficamente esta transacción; b. ¿Cuál es el interés que obtuvo en la cuenta de ahorros?; c. ¿Cuál es la tasa de interés que gana en la cuenta de ahorros?

La gráfica nos muestra la inversión inicial del proyecto y su valor futuro al cabo de los 6 meses. Para el cálculo del interés ganado que se obtuvo, restamos el valor futuro del valor presente, esto es:

$I = F - P$

$I = \$4.150.000 - \$3.500.000$

$I = \$650.000$

Para el cálculo de la tasa de interés:

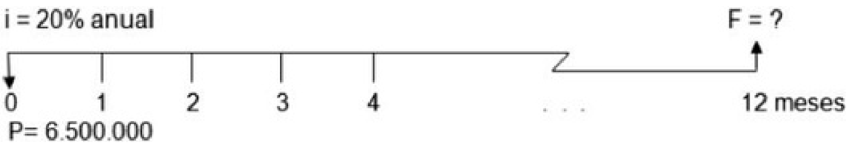
Con interés simple se tiene:

$$i = \frac{\left(\frac{4.150.000}{3.500.000} - 1\right)}{6} = 0,030952(100) = 3,09\%\ M$$

Con interés compuesto se tiene:

$$i = \sqrt[6]{\frac{4.150.000}{3.500.000}} - 1 = 0,028797(100) = 2,87\%\ EM$$

4. Pedro acude a un prestamista que trabaja con un interés del 20% anual para ha cer un préstamo de $6.500.000 con vencimiento a un año. Represente gráficamente esta transacción y diga cuánto debe pagar Pedro al finalizar el año.



La gráfica nos muestra el valor del préstamo o valor presente para calcular un valor futuro en un tiempo determinado. Entonces:

Con interés simple se tiene: $F = 6.500.000(1 + 0,20(1)) = \$7.800.000$

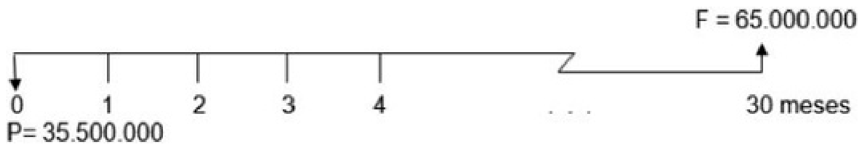
Con interés compuesto se tiene:

$$F = 6.500.000(1 + 0,20)1 = \$7.800.000$$

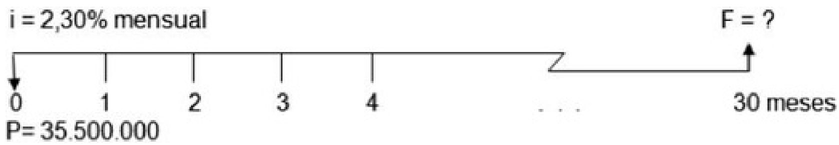
Como se observa, el valor futuro es el mismo tanto en interés simple como en interés compuesto, por cuanto es el mismo período anual para ambos de liquidación de intereses, constituyéndose en tasas equivalentes.

5. ¿Qué le recomendaría usted a un inversionista que se encuentra ante la opción de elegir una de las siguientes alternativas? *A*. Comprar hoy una bodega por $35.500.000, con la posibilidad de venderla por $65.000.000 dentro de 2,5 años; *b*. Prestar este dinero a una tasa de interés del 2,30% mensual.

Alternativa *a*:



Alternativa *b*:



Las gráficas muestran cada una de las alternativas planteadas, y se trata de es- co ger la mejor, es decir, la alternativa que produzca más dinero al final de los 30 meses.

Como ya sabemos que la opción *a* produce en total $65.000.000, que es su valor futuro, una forma de solucionar es hallar el valor futuro de la alternativa *b* y compararlo con el valor futuro de la alternativa *a*. Obviamente, será mejor la alternativa que tenga mayor valor futuro. Entonces:

Con interés simple se tiene:

$$F = 35.500.000(1 + 0,023(30)) = \$59.995.000$$

Con interés compuesto se tiene:

$$F = 35.500.000(1 + 0,023)30 = \$70.225.908$$

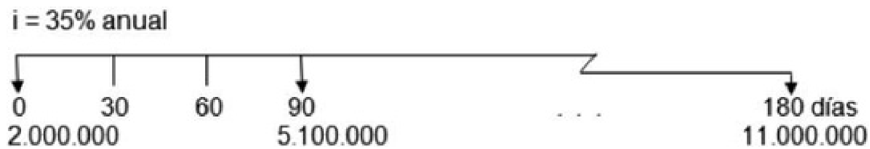
Como se observa, el valor futuro de *b* es menor que el de *a* si se calcula con interés simple, pero es al contrario si se calcula con interés compuesto. Por lo tanto, la respuesta sería la siguiente:

- Considerando interés simple se recomienda la alternativa *a*.
- Considerando interés compuesto se recomienda la alternativa *b*.

6. Si el rendimiento del dinero es del 35% anual, ¿qué oferta es más conveniente para la venta de un terreno? a. $16.000.000 de contado, b. $2.000.000 hoy y el saldo en dos pagarés: uno de $5.100.000 a 90 días y otro de $11.000.000 a 180 días.

Oferta a:

Oferta b:



Las gráficas muestran cada una de las ofertas planteadas, y se trata de escoger la mejor, es decir, la que produzca más dinero a precios de hoy.

Como ya sabemos que con la oferta a dan de contado $16.000.000, que es su valor presente, una forma de solucionar es hallar el valor presente de la oferta *b* y compararlo con el valor presente de la oferta *a*. Obviamente, será mejor la oferta que tenga mayor valor presente. Entonces:

Con interés simple se tiene:

$$P = 2.000.000 + \frac{5.100.000}{1+0.35\left(\frac{90}{360}\right)} + \frac{11.000.000}{1+0.35\left(\frac{180}{360}\right)}$$

P = $16.051.357,30

Con interés compuesto se tiene:

$$P = 2.000.000 + 5.100.000(1+0,35)^{-\left(\frac{90}{360}\right)} + 11.000.000(1+0,35)^{-\left(\frac{180}{360}\right)}$$

P = $16.198.660,69

Como se observa, el valor presente de *b* es siempre mayor que el de *a*, tanto con interés simple como con interés compuesto. Por lo tanto, la mejor oferta para la venta del terreno es la *b*.

7. Se invirtieron $2.000.000 y a los 3 años se recibieron $3.600.000. ¿Qué tasa trimestral arrojó la operación financiera?

La gráfica nos muestra la inversión inicial de la operación financiera y su valor futuro al cabo de los 3 años (12 trimestres). Para el cálculo de la tasa de interés:

Con interés simple se tiene:

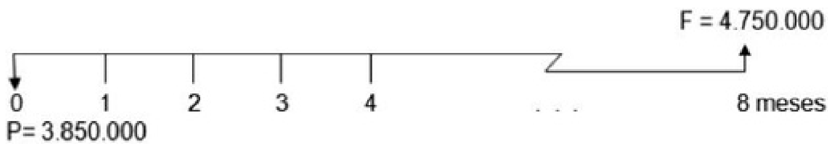
$$i = \frac{\left(\frac{3.600.000}{2.000.000} - 1\right)}{12} = 0,06666(100) = 6,66\%\ T$$

Con interés compuesto se tiene:

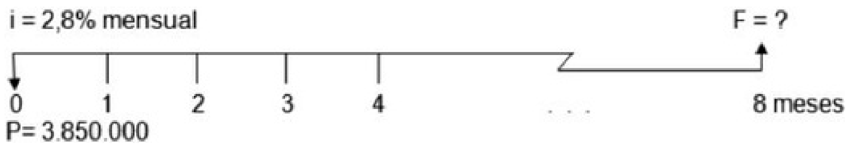
$$i = \sqrt[12]{\frac{3.600.000}{2.000.000}} - 1 = 0,050201(100) = 5,02\%\ ET$$

8. Hace 8 meses disponía de $3.850.000 y tenía las siguientes alternativas de inversión: a. Comprar un inventario de ropa por este valor, que a precio de hoy vale $4.750.000; b. Invertirlos en una entidad que me paga el 2,8%. Después de consultarlo me decidí por la primera alternativa. ¿Fue acertada la decisión?

Alternativa a:



Alternativa b:



Las gráficas muestran cada una de las alternativas planteadas, y se trata de escoger la mejor, es decir, la alternativa que produzca más dinero al final de los 8 meses.

Como ya sabemos que la opción *a* produce en total \$4.750.000, que es su valor futuro, una forma de solucionar es hallar el valor futuro de la alternativa *b* y compararlo con el de la alternativa *a*. Obviamente, será mejor la alternativa que tenga mayor valor futuro. Entonces:

Con interés simple se tiene:

$$F = 3.850.000(1 + 0{,}028(8)) = \$4.712.400$$

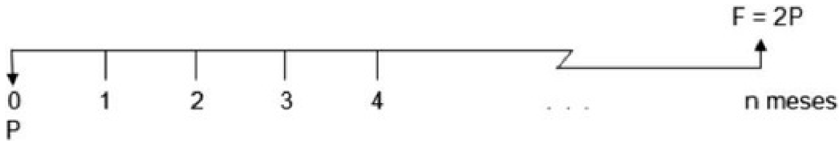
Con interés compuesto se tiene:

$$F = 3.850.000(1 + 0{,}028)8 = \$4.801.717$$

Como se observa, el valor futuro de *b* es menor que el de *a* si se calcula con interés simple, pero es al contrario si se calcula con interés compuesto. Por lo tanto, la respuesta sería la siguiente:

- Considerando interés simple, es mejor la alternativa *a*, o sea, fue acertada la decisión.
- Considerando interés compuesto, es mejor la alternativa *b*, o sea, fue errada la decisión.

9. ¿Cuánto tiempo debo esperar para que se duplique mi inversión en una corpora ción que paga el 1,5% mensual?



Como se trata de duplicar el capital, podemos asumir que si el valor invertido o valor presente es *P*, entonces el valor futuro es 2*P*. En la gráfica, *n* representa el tiempo que debemos hallar. Entonces:

Para interés simple se tiene:

$$n = \frac{\left(\frac{2P}{P} - 1\right)}{0{,}015} = 66{,}66 \text{ meses} = 66 \text{ meses } 20 \text{ días}$$

Para interés compuesto se tiene:

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{2P}{P}\right)}{\mathrm{Log}(1 + 0{,}015)} = 46{,}35 \text{ meses} = 46 \text{ meses } 17 \text{ días}$$

Nótese que, como se trata de una misma tasa, el capital se duplica más rápido con interés compuesto, lo cual se explica porque los intereses se capitalizan.

10. Establecer las siguientes equivalencias:

    a. Una tasa efectiva trimestral equivalente al 7% trimestral anticipada.

    b. Una tasa anticipada mensual equivalente al 13% efectivo semestral.

    c. Una tasa nominal *ATV* equivalente al 24% *AMV*.

    d. Una tasa nominal *AMV* equivalente al 12% efectivo trimestral.

    e. Una tasa *ATA* equivalente al 25% efectivo anual.

    f. Una tasa efectiva anual equivalente al 25% anual anticipada.

    g. Una tasa anual anticipada equivalente al 36% anual vencida.

    h. Una tasa anual anticipada equivalente al 22,5% *AMA*.

    i. Una tasa mensual anticipada equivalente al 41,12% efectivo anual.

    j. Una tasa nominal *AMV* equivalente a tasa nominal del 36% mes anticipado.

    a. 7% TA → *ET*

    Para resolver el problema, debemos pasar la tasa que nos dan, que se encuentra efectiva trimestral anticipada, a efectiva trimestral vencida. Entonces:

$$i = \frac{ia}{(1-ia)} = \frac{0{,}07}{(1-0{,}07)} = 0{,}075268(100) = 7{,}52\%\ ET$$

    b. 13% *ES* → *MA*

    Para resolver el problema, debemos primero convertir la tasa que nos dan, que se encuentra efectiva semestral vencida, a efectiva mensual vencida, para después pasarla a efectiva mensual anticipada. Entonces:

$$i = (1+0{,}13)^{\left(\frac{2}{12}\right)} - 1 = 0{,}020578\ EM$$

$$\Rightarrow \frac{0{,}020578}{(1+0{,}020578)} = 0{,}020163(100) = 2{,}01\%\ EMA$$

    c. 24% *NMV* → *NTV*

    Para resolver el problema, debemos primero pasar la tasa que nos dan, que se encuentra nominal mensual vencida, a efectiva mensual vencida, des pués convertirla a efectiva trimestral vencida, para finalmente pasarla a nominal trimestral vencida. Entonces:

$$j = 24\%\ NMV \Rightarrow \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02\ EM$$

$$i = (1+0{,}02)^{\left(\frac{12}{4}\right)} - 1 = 0{,}061208\ ET\ (4)(100) \Rightarrow j = 24{,}48\%\ NTV$$

d. 12% *ET* → *NMV*

Para resolver el problema, debemos primero convertir la tasa que nos dan, que se encuentra efectiva trimestral vencida, a efectiva mensual vencida, para después pasarla a nominal mensual vencida. Entonces:

$$i = (1\;\;0{,}12)^{\left(\frac{4}{12}\right)} - 1 = 0{,}038498\ EM\ (12)(100) \Rightarrow j = 46{,}19\%\ NMV$$

e. 25% *EA* → *NTA*

Para resolver el problema, debemos primero convertir la tasa que nos dan, que se encuentra efectiva anual vencida, a efectiva trimestral vencida, para después pasarla a efectiva trimestral anticipada y finalmente pasarla a nomi nal trimestral anticipada. Entonces:

$$i = (1\;\;0{,}25)^{\left(\frac{1}{4}\right)} - 1 = 0{,}057371\ ET$$

$$ETA = \frac{0{,}057371}{(1\ 0{,}057371)} = 0{,}0542583\ (4)(100) \Rightarrow j = 21{,}70\%\ NTA$$

f. 25% *EAA* → *EA*

Para resolver el problema, debemos pasar la tasa que nos dan, que se encuen tra efectiva anual anticipada, a efectiva anual vencida. Entonces:

$$i = \frac{0{,}25}{(1\;\;0{,}25)} = 0{,}333333(100) = 33{,}33\%\ EA$$

g. 36% *EA* → *EAA*

Para resolver el problema, debemos pasar la tasa que nos dan, que se encuen tra efectiva anual vencida, a efectiva anual anticipada. Entonces:

$$i = \frac{0{,}36}{(1\ 0{,}36)} = 0{,}264705\ (100) = 26{,}47\%\ EAA$$

h. 22,5% *NMA* → *EAA*

Para resolver el problema, debemos primero pasar la tasa que nos dan, que se encuentra nominal mensual anticipada, a efectiva mensual anticipada, des pués pasarla a efectiva mensual vencida, para convertirla a efectiva anual vencida, y finalmente pasarla a efectiva anual anticipada. Entonces:

$$j = 25{,}5\%\ NMA \Rightarrow \frac{0{,}225}{12} = 0{,}01875\ EMA$$

$$\frac{0{,}01875}{(1\ 0{,}01875)} = 0{,}019108\ EM$$

$$i = (1\ 0{,}019108)^{\left(\frac{12}{1}\right)} - 1 = 0{,}255000\ EA$$

$$i = \frac{0{,}255000}{(1\ 0{,}255000)} = 0{,}203187\ (100) = 20{,}31\%\ EAA$$

i. 41,12% *EA* → *EMA*

Para resolver el problema, debemos primero convertir la tasa que nos dan, que se encuentra efectiva anual vencida, a efectiva mensual vencida, para después pasarla a efectiva mensual anticipada. Entonces:

$$i = (1\ \ 0{,}4112)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 = 0{,}029119\ EM$$

$$i = \frac{0{,}029119}{(1\ 0{,}029119)} = 0{,}028295(100) = 2{,}82\%\ EMA$$

j. 36% *NMA* → *NMV*

Para resolver el problema, debemos primero pasar la tasa que nos dan, que se encuentra nominal mensual anticipada, a efectiva mensual anticipada, después pasarla a efectiva mensual vencida y finalmente pasarla a nominal mensual vencida. Entonces:

$$j = 36\%\ NMA \Rightarrow \frac{0{,}36}{12} = 0{,}03\ EMA$$

$$\frac{0{,}03}{(1\ \ 0{,}03)} = 0{,}030927\ EM\ (12)(100) \Rightarrow j = 37{,}11\%\ NMV$$

11. Se quieren invertir cinco millones a dos años. Las tasas de interés que se ofrecen en el mercado son las siguientes: a. 23,8% nominal semestre anticipado; b. 26% nominal trimestre vencido; c. 25,5% nominal mes vencido; d. 28,7% efectivo anual. Determinar el valor final para cada alternativa. ¿Cuál es la mejor?

Una forma de resolver el ejercicio y poder determinar la mejor alternativa es convertir todas las tasas a un mismo período; puede ser todas a efectivas anuales, aprovechando que la última tasa está dada en esas referencias (ahorrándonos una conversión). Lógicamente, será mejor la que resulte mayor. De igual forma, calculamos el valor futuro de cada una observando cuál es la mejor. Entonces:

a. 23,8% *NSA* → *EA*

Debemos primero pasar la tasa que nos dan, que se encuentra nominal semestre anticipada, a efectiva semestral anticipada, después pasarla a efectiva semestral vencida, y finalmente a efectiva anual vencida:

$$j = 23{,}8\%\ NSA \Rightarrow \frac{0{,}238}{2} = 0{,}119\ ESA$$

$$\frac{0{,}119}{(1 - 0{,}119)} = 0{,}135073\ ES$$

$$i = (1 + 0{,}135073)^{2} - 1 = 0{,}288392\ (100) = 28{,}83\%\ EA$$

Calculamos el valor futuro:

$$F = 5.000.000(1 + 0{,}288392)^2 = \$8.299.775{,}98$$

b. 26% *NTV* → *EA*

Debemos primero pasar la tasa que nos dan, que se encuentra nominal tri mes tral vencida, a efectiva trimestral vencida, para convertirla a efectiva anual vencida:

$$j = 26\%\ NTV \Rightarrow \frac{0{,}26}{4} = 0{,}065\ ET$$

$$i = (1 + 0{,}065)^{4} - 1 = 0{,}286466\ (100) = 28{,}64\%\ EA$$

Calculamos el valor futuro:

$$F = 5.000.000(1 + 0{,}286466)^2 = \$8.274.978{,}35$$

c. 25,5% *NMV* → *EA*

Debemos primero pasar la tasa que nos dan, que se encuentra nominal mes vencido, a efectiva mensual vencida, para convertirla a efectiva anual vencida:

$$j = 25{,}5\%\ NMV \Rightarrow \frac{0{,}255}{12} = 0{,}02125\ EM$$

$$i = (1 + 0{,}02125)^{12} - 1 = 0{,}287018\ (100) = 28{,}70\%\ EA$$

Calculamos el valor futuro:

$$F = 5.000.000(1 + 0{,}287018)^2 = \$8.282.084{,}81$$

d. 28,7% *EA*

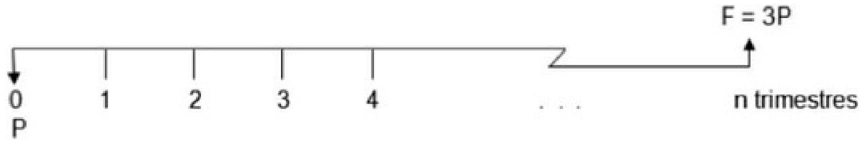
Como la tasa se encuentra efectiva anual vencida, calculamos el valor fu tu ro:

$$F = 5.000.000(1 + 0{,}287)^2 = \$8.281.845$$

Observando las anteriores conversiones y cálculos, la tasa más favorable y el mayor valor futuro son los de la alternativa *a*.

12. Determine:

a. Cuánto tiempo se necesita para triplicar un capital al 30% *ATV*.

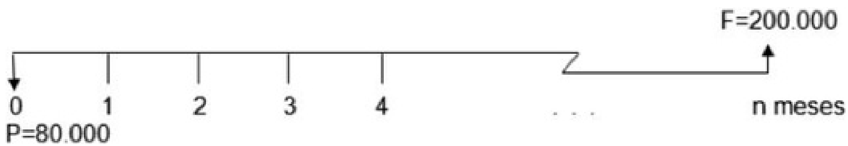


Para resolver el ejercicio debemos primero convertir la tasa que se encuen- tra nominal trimestre vencido a efectiva trimestre vencido, para luego uti- li zar la fórmula del tiempo. Así mismo, como se trata de triplicar el capital, podemos asumir que si el valor invertido o valor presente es *P*, su valor futuro es 3*P*. Entonces:

$$j = 30\%\ ATV \Rightarrow \frac{0{,}30}{4} = 0{,}075\ ET$$

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{3P}{P}\right)}{\mathrm{Log}(1+0{,}075)} = 15{,}19 \text{ trimestres}$$

b. Cuánto tiempo se requiere para que \$80.000 se conviertan en \$200.000, al 30% *AMV*.

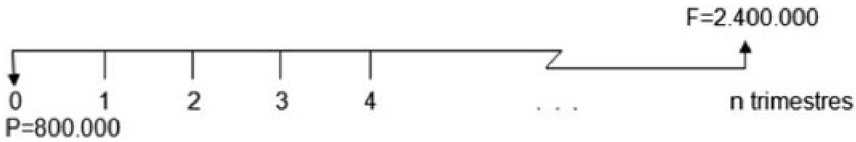


Para resolver el ejercicio debemos convertir la tasa que se encuentra no mi- nal mes vencido a efectiva vencida, para luego utilizar la fórmula del tiem po. Entonces:

$$j = 30\%\ AMV \Rightarrow \frac{0{,}30}{12} = 0{,}025\ EM$$

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{200.000}{80.000}\right)}{\mathrm{Log}(1+0{,}025)} = 37{,}10 \text{ meses}$$

c. Cuánto tiempo se necesita para que $800.000 se tripliquen al 20% *ATA*.



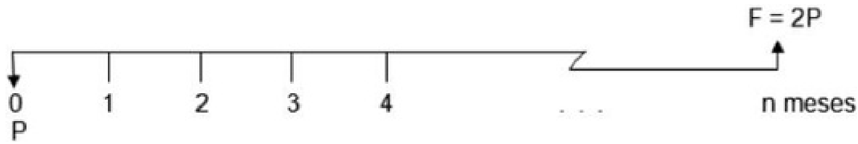
Para resolver el ejercicio debemos primero convertir la tasa que se encuentra nominal trimestre anticipado a efectiva vencida, para luego utilizar la fórmula del tiempo. Así mismo, como se trata de triplicar el capital, tomamos el valor invertido, lo triplicamos y su valor futuro es $2.400.000. Entonces:

$$j = 20\%\ ATA \Rightarrow \frac{0{,}20}{4} = 0{,}05\ ETA$$

$$\frac{0{,}05}{(1 - 0{,}05)} = 0{,}052631\ ET$$

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{2.400.000}{800.000}\right)}{\mathrm{Log}(1 + 0{,}052631)} = 21{,}41 \text{ trimestres}$$

d. Cuánto tiempo se necesita para duplicar un capital al 30% *AMV*.

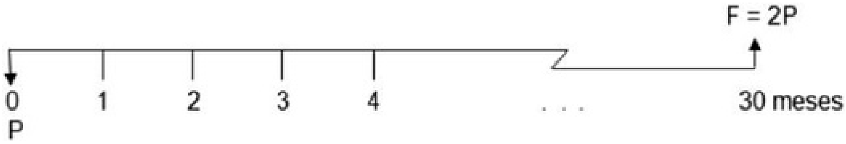


Para resolver el ejercicio debemos primero convertir la tasa que se encuentra nominal mes vencido a efectiva vencida, para luego utilizar la fórmula del tiempo. Así mismo, como se trata de duplicar el capital, podemos asumir que si el valor invertido o valor presente es *P*, su valor futuro es 2*P*. Entonces:

$$j = 30\%\ AMV \Rightarrow \frac{0{,}30}{12} = 0{,}025\ EM$$

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{2P}{P}\right)}{\mathrm{Log}(1 + 0{,}025)} = 28{,}07 \text{ meses}$$

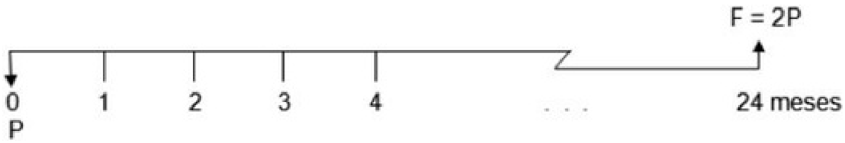
e. A qué tasa efectiva anual se duplica un capital en dos años y medio.



Para resolver el ejercicio, constatamos primero que el tiempo dado está en las mismas referencias respecto al período de la tasa que preguntan, para luego utilizar la fórmula de la tasa. Así mismo, como se trata de duplicar el capital, podemos asumir que si el valor invertido o valor presente es *P*, su valor futuro es 2*P*. Entonces:

$$i = \sqrt[2.5]{\frac{2P}{P}}\ 1 = 0{,}319507\ (100) = 31{,}95\%\ EA$$

f. A qué tasa nominal convertible semestralmente se duplica un capital en dos años.

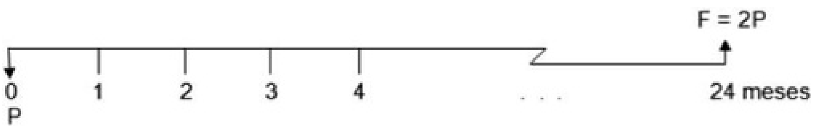


Para resolver el ejercicio, lo mejor es expresar el tiempo en semestres y luego aplicar la fórmula para obtener de una vez la tasa efectiva semestral vencida. Después basta multiplicarla por 2 para obtener la tasa que se pide. De otra parte, como se trata de duplicar el capital, podemos asumir que si el valor invertido o valor presente es *P*, entonces su valor futuro es 2*P*. Por lo tanto:

2 años = 4 semestres $i = 2P4$

$$\sqrt{\frac{}{P}}\ 1 = 0{,}189207\ ES\ (2)(100) \Rightarrow j = 37{,}84\%\ NS$$

g. A qué tasa nominal convertible mensualmente se duplica un capital en dos años.

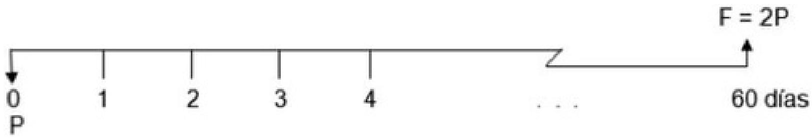


Para resolver el ejercicio debemos primero expresar el tiempo en el período de la tasa que preguntan, para luego utilizar la fórmula de la tasa. Como al realizar el cálculo la tasa queda en términos efectiva mensual vencida, hay que realizar la conversión a nominal pagadera por mes vencido, multipli- cán dola por el número de meses en un año. Así mismo, como se trata de du plicar el capital, podemos asumir que si el valor invertido o valor pre- sente es *P*, su valor futuro es 2*P*. Entonces:

2 años = 24 meses

$$i = \sqrt[24]{\frac{2P}{P}}\ 1 = 0{,}029302\ EM\ (12)(100) \Rightarrow j = 35{,}16\%\ NM$$

h. Qué tasa efectiva anual se requiere para que, en dos meses, un capital se in cre mente en un 2,5%.

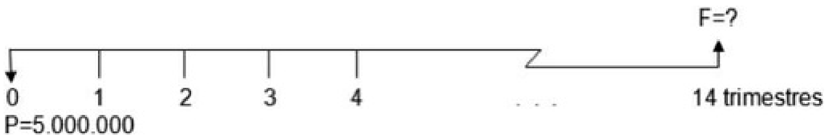


Para resolver el ejercicio debemos primero convertir el tiempo al período de la tasa que preguntan, para luego utilizar la fórmula de la tasa. Así mis mo, como se trata de incrementar el capital en un 2,5%, podemos asumir que si el valor invertido o valor presente es *P*, su valor futuro es 1.025 *P*. Entonces:

$$2 \text{ meses} = \frac{2}{12} = 0{,}166666 \text{ años}$$

$$i = \sqrt[0.166666]{\frac{1.025P}{P}}\ 1 = 0{,}159693\ (100) = 15{,}96\%\ EA$$

13. Hallar el valor final de un documento de valor inicial $5.000.000 en un plazo de 3 años y 6 meses si el interés es el 34% *ATV*.



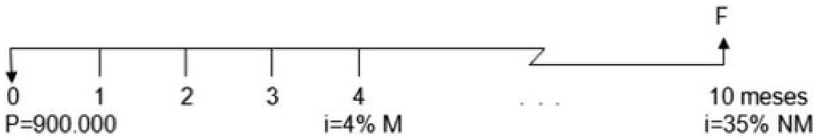
La gráfica nos muestra el valor del documento o valor presente para calcular un valor futuro en un tiempo determinado. Para resolver el ejercicio debemos primero pasar la tasa que se encuentra nominal pagadera por trimestre vencido a efectiva vencida, convertir el tiempo en las mismas referencias de la tasa, para luego utilizar la fórmula del valor futuro. Entonces:

$$j = 34\%\ ATV = \frac{0{,}34}{4} = 0{,}085\ ET$$

3 años 6 meses = 14 trimestres

F = 5.000.000(1 + 0,085)14 = $15.667.017,87

14. La corporación financiera Consaca recibe una letra de cambio por valor nominal de $900.000 con vencimiento en 10 meses y un interés del 35% *NMV*. A los cuatro meses Consaca vende la letra a la corporación financiera Damolienda, que cobra el 4% mensual por la transacción. ¿Cuánto recibe la corporación Con saca por la letra? ¿Cuánto le cuesta el tener que vender la letra?



Lo primero que debemos calcular es el valor futuro de la letra al tiempo y tasa pactados inicialmente. Como la tasa es nominal vencida, debemos expresarla en forma efectiva vencida, en este caso dividiéndola entre 12, esto es:

$$j = 35\%\ NMV \Rightarrow \frac{0,35}{12} = 0,029166\ EM$$

El cálculo del valor futuro sería:

F = 900.000(1 + 0,029166)10 = $1.199.774

Como la letra se vende a los 4 meses de emitida, es decir, 6 meses antes de su vencimiento, lo que hace la corporación que la compra es una inversión de la cual conoce el valor futuro, el tiempo y la tasa de interés y necesita determinar exactamente cuánto invertir, es decir, hallar *P*.

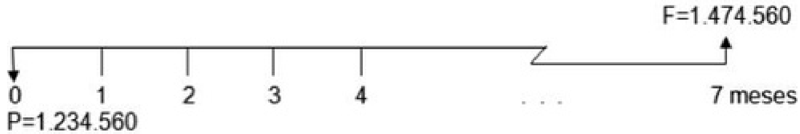
P = 1.199.774(1 + 0,04)–6 = $948.199

Este valor presente es lo que paga Damolienda y es el que recibe Consaca. Pero si calculamos el valor de la letra a los 4 meses de emitida, tenemos:

F = 900.000(1 + 0,029166)4 = $1.009.684

En otras palabras, Consaca vende por $948.199 una letra que vale a ese momen to $1.009.684; por lo tanto, nos damos cuenta de que haciendo la resta de vuelve, en total, $61.485.

15. Hoy se invierten $1.234.560 en un negocio que al cabo de 7 meses retorna $1.474.560. Expresar la rentabilidad de este negocio como efectiva anual, efectiva mensual y efectiva semanal. Asuma que un año tiene 52 semanas.



La gráfica nos muestra la inversión inicial del negocio y su valor futuro al ca bo de los 7 meses. Para resolver el ejercicio debemos primero convertir el tiem po al período de la tasa de rentabilidad que preguntan, para luego utilizar la fórmula de la tasa. Entonces:

$$7 \text{ meses} = \frac{7}{12} = 0{,}583333 \text{ años}$$

$$i = \sqrt[0.583333]{\frac{1.474.560}{1.234.560}}\,1 = 0{,}355993\ (100) = 35{,}59\%\ EA$$

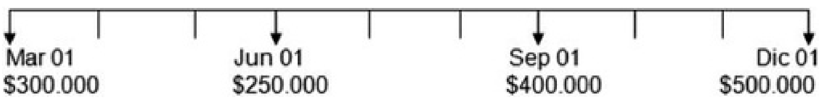
7 meses

$$i = 1,\sqrt[7]{\frac{474.560}{1.234.560}}\ 1 = 0{,}025702\ (100) = 2{,}57\%\ EM$$

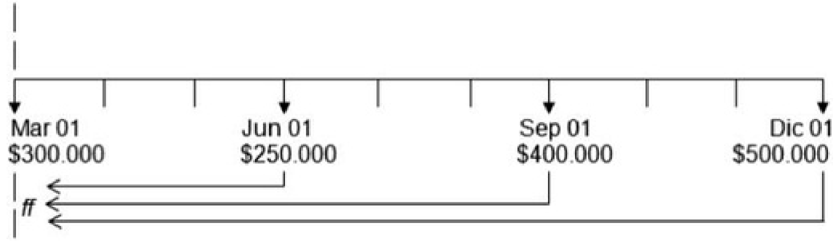
$$7 \text{ meses} = \frac{7*52}{12} = 30{,}333333 \text{ semanas}$$

$$i = \sqrt[30.333333]{\frac{1.474.560}{1.234.560}}\,1 = 0{,}005873\ (100) = 0{,}58\%\ ESm$$

16. Un equipo de sonido se adquiere pagando \$300.000 el día 1 de marzo, \$250.000 el día 1 de junio, \$400.000 el día 1 de septiembre y \$500.000 el día 1 de diciembre de un mismo año. Suponiendo una tasa de financiación del 45% efectivo anual, determine cuál sería el valor del equipo si se pagara de contado el día 1 de marzo, el día 1 de junio, el día 1 de septiembre y el día 1 de diciembre.

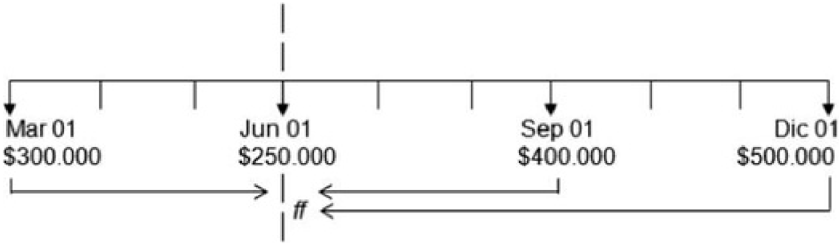


La gráfica nos muestra los diferentes pagos en las diferentes fechas que de ben hacerse para la compra del equipo de sonido. Para resolver el ejercicio debe- mos primero señalar la fecha focal para cada pregunta, convertir el tiempo al período de la tasa de financiación que dan, para luego llevar a esa fecha focal los diferentes pagos, ya sea con valor presente o valor futuro, dependiendo cada caso, y sumarlos para determinar el valor de contado del equipo de sonido en esa fecha focal. Entonces:



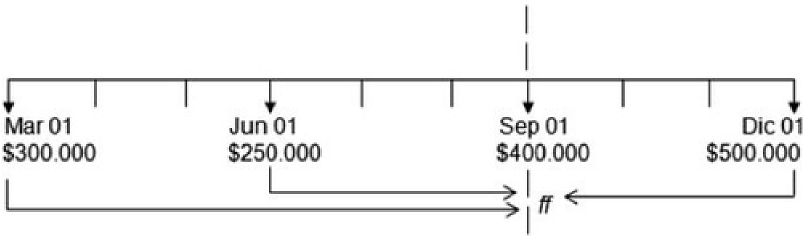
$$P = 300.000 + 250.000(1+0,45)^{-\frac{90}{360}} + 400.000(1+0,45)^{-\frac{180}{360}}$$
$$+ 500.000(1+0,45)^{-\frac{270}{360}}$$

$P = \$1.238.398,94$



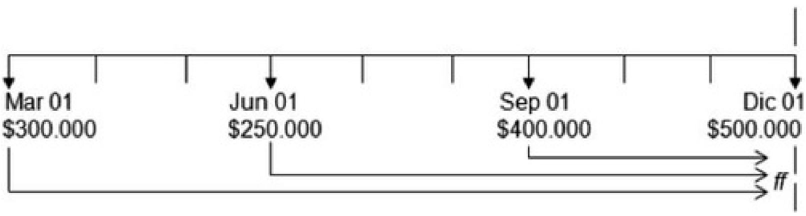
$$P = 300.000(1+0,45)^{\frac{90}{360}} + 250.000 + 400.000(1+0,45)^{-\frac{90}{360}} + 500.000(1+0,45)^{-\frac{180}{360}}$$

$P = \$1.358.947,17$



$$P = 300.000(1+0,45)^{\frac{180}{360}} + 250.000(1+0,45)^{\frac{90}{360}} + 400.000 + 500.000(1+0,45)^{-\frac{90}{360}}$$

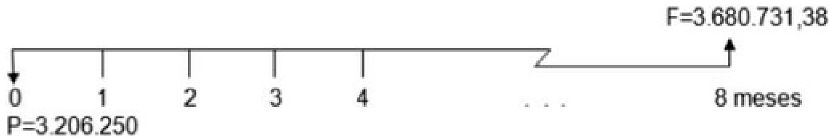
$P = \$1.491.229,80$



$$P = 300.000(1\ 0{,}45)^{\frac{270}{360}}\ 250.000(1\ 0{,}45)^{\frac{180}{360}}\ 400.000(1\ 0{,}45)^{\frac{90}{360}} + 500.000$$

$P = \$1.636.389{,}08$

17. *M* es un proyecto de inversión en el que usted invierte hoy $3.206.250 y a los 8 meses obtiene $3.680.731,38. Considerando una inflación del 8,56% efectiva anual, determine cuál es la rentabilidad real de *M*.



La gráfica nos muestra la inversión inicial del proyecto y su valor futuro al cabo de los 8 meses. La inflación es un proceso económico en el cual se presenta un aumento general de precios, y para su cálculo se toma una serie de artículos que conforman la canasta familiar. Al hacer el análisis sobre el proyecto de in versión presentado, es necesario tener en cuenta que la inflación afecta la ren tabilidad real del proyecto. Para calcular la rentabilidad real hacemos uso de la siguiente fórmula:

$$ir = \frac{i\ f}{i\ f}$$

Donde *i* es la rentabilidad del proyecto, y *f* es la inflación. Para que podamos usar la fórmula es necesario conocer de primer plano la rentabilidad del proyecto *M* y convertir el tiempo al período de la tasa anual de financiación. Entonces:

$$8 \text{ meses} = \frac{8}{12} = 0{,}666666 \text{ años}$$

$$i\ \ 0.666666\sqrt{\frac{3{,}680.731{,}38}{3.206.250}} - 1 = 0{,}23\ (100) = 23\%\ EA$$

Calculamos la rentabilidad real:

$$ir = \frac{(0{,}23\ \ 0{,}0856)}{(1\ 0{,}0856)} = 0{,}133014\ (100) = 13{,}3\%\ EA$$

18. Considerando una inflación del 18,5%, ¿cuál debe ser la rentabilidad total para que la rentabilidad real sea el 27%?

Para resolver el ejercicio, debemos tomar la fórmula de rentabilidad real y despejar algebraicamente la rentabilidad total (*i*). Entonces:

$$i_r = \frac{i\ ir}{1ir} \Rightarrow ir(1+f) = i - f \Rightarrow i = ir(1+f) + f$$

Calculamos la rentabilidad total:

$$i = 0{,}27(1 + 0{,}185) + 0{,}185 = 0{,}50495\ (100) = 50{,}49\%\ EA$$

19. Usted estaba muy satisfecho porque la empresa obtuvo una rentabilidad total del 38,9% durante el año que acabó de terminar, pero un amigo aguafiestas le dice que su verdadera rentabilidad fue 13,3%. ¿Qué inflación estará considerando su amigo?

Para resolver el ejercicio, debemos tomar la fórmula de rentabilidad real y despejar algebraicamente la inflación (f). Entonces:

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f} \Rightarrow i_r(1 + f) = i - f \Rightarrow i_r + i_r(f) = i - f$$

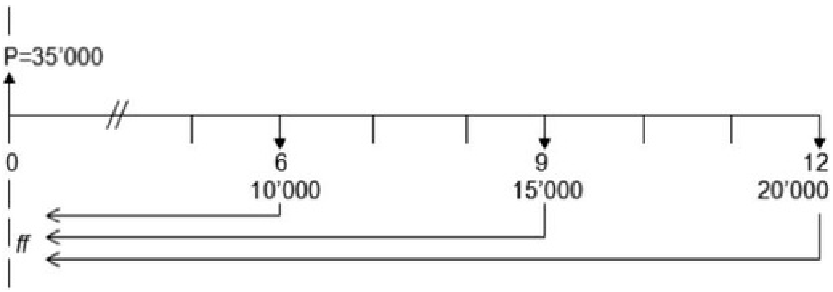
$$\Rightarrow f + i_r(f) = i - i_r$$

$$f(1 + i_r) = i - i_r \Rightarrow f = \frac{i - i_r}{1 + i_r}$$

Calculamos la inflación:

$$f = \frac{(0{,}389 - 0{,}133)}{(1 + 0{,}133)} = 0{,}225948\ (100) = 22{,}59\%\ EA$$

20. Hoy se adquiere un vehículo que vale 50 millones, se cancela el 30%, y el saldo se debe pagar en 3 cuotas de 10, 15 y 20 millones dentro de 6, 9 y 12 meses res pectivamente. ¿Qué tasa de interés efectiva anual cobra el concesionario?



La gráfica nos muestra los diferentes pagos en las diferentes fechas que deben hacerse para la financiación del vehículo. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal (escogemos hoy), convertir el tiempo al período de la tasa de financiación que preguntan, para luego llevar a esa fecha focal calculando valor presente los pagos. Igualamos la ecuación a cero. Simplificamos los tres ceros de cada pago y convertimos el tiempo al período de la tasa anual de financiación que preguntan. Entonces:

6 meses = 0,5 años

9 meses = 0,75 años

12 meses = 1 año

$35 - 10(1 + i)^{-0,5} - 15(1 + i)^{-0,75} - 20(1 + i)^{-1} = 0$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combinado con una interpolación. El método consiste en escoger una tasa i_1 y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otra tasa i_2 y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con i_1 = 36%; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$35 - 10(1 + 0,36)^{-0,5} - 15(1 + 0,36)^{-0,75} - 20(1 + 0,36)^{-1} = 0,191505$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con otra tasa i_2 = 37%, y la ecuación con su resultado será:

$35 - 10(1 + 0,37)^{-0,5} - 15(1 + 0,37)^{-0,75} - 20(1 + 0,37)^{-1} = -0,012453$

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocamos de la siguiente forma:

V/r tasa **V/r función**

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0,36 \\ i\end{array}\right. \\ 0,37\end{array}\right. \begin{array}{l}\rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow\end{array} \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}0,191505 \\ 0\end{array}\right] \\ -0,012453\end{array}\right]$$

Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{i - 0,36}{0,37 - 0,36} = \frac{0 - 0,191505}{-0,012453 - 0,191505}$$

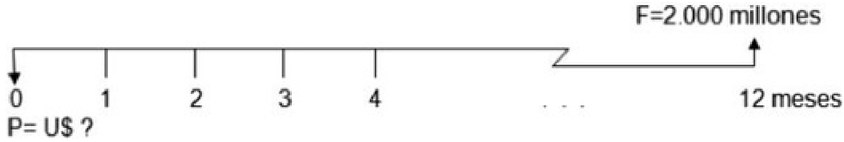
Al despejar (i) en la ecuación anterior tenemos:

$$i = 36,938943\%\ EA$$

Observación: la interpolación produce un error que será despreciable siempre y cuando el intervalo que se toma para interpolar no sea muy grande. En la práctica financiera un punto porcentual es el máximo permitido para que el error sea despreciable. En este caso hemos usado un punto porcentual porque hemos interpolado entre 36% y 37%. La respuesta exacta con seis decimales es:

$$i = 36{,}938554\%\ EA$$

21. El municipio de Neiva recibe un préstamo en dólares con una tasa de interés del 7% efectivo anual y un año de plazo. En el momento del desembolso un dólar vale $1.987 y se estima una devaluación del 9% anual. Al final del año debe pagar $2.000 millones para cancelar el crédito. Determine la cantidad pres tada en dólares.



La gráfica nos muestra el pago final en pesos de un préstamo en dólares con un año de plazo. La pérdida de valor de una moneda frente a otra moneda se denomina devaluación. Para resolver el problema, debemos primero hallar el valor del dólar estimando la devaluación en el momento de cancelar la deuda, o sea, un año después, con el fin de calcular el valor total en dólares con que se canceló el crédito, para después traer a valor presente a la tasa de interés pres- tada y determinar la cantidad prestada en dólares. Entonces:

Valor del dólar hoy : 1.987

Devaluación : 9%

Valor dólar a 1 año : 1.987 * 1,09 = 2.165,83

Cantidad cancelada en pesos : 2.000 millones

Cantidad cancelada en dólares : $\dfrac{2.000.000}{2.165{,}83} = \$923.433{,}51$

Calculamos el valor presente (cantidad prestada) en dólares:

$$P = 923.433{,}51(1 + 0{,}07)–1 = U\$863.021{,}97$$

UNIDAD 2

ECUACIONES DE VALOR

Ejercicios propuestos

Suponga que el valor de su matrícula en la universidad es $542.651 si se cancela el 1 de agosto, pero la universidad le permite cancelar $180.000 el primero de agosto, $120.000 a los 30 días y un último valor el día 1 de noviembre. Deter- mi ne este último valor suponiendo que la universidad cobra un interés del 24,4832% *ATV*.

Una persona debe $500.000 con vencimiento en 5 meses e intereses del 20%

ATV,

$1.000.000 con vencimiento en 9 meses e intereses del 24% *ASV* y $1.200.000

1. con vencimiento en 21 meses e intereses del 30% *EA*. Si estas deudas se

quieren

cancelar mediante dos pagos iguales, uno hoy y otro dentro de 3 años, hallar el

valor de esos pagos a un rendimiento del 24% *AMV*. Un equipo de sonido vale

2. de contado $1.276.880 y se puede comprar financiado

con una tasa de interés del 32% efectiva anual, pagando $500.000 como cuota

inicial y el saldo en dos cuotas iguales, una a los 3 meses y otra a los 10

meses.

3. Determine el valor de estas cuotas.

Un concesionario ofrece un tipo de vehículo en una supuesta oferta así: el

50%

4. al retiro del vehículo del concesionario y 4 cuotas mensuales de $4.500.000 cada una, pagando la primera exactamente a los 6 meses de haber retirado el vehículo de la sala de ventas. Determine cuánto habría que pagar por el vehículo si se pagara de contado en el momento de sacarlo de la sala de

ventas,

a una tasa de interés del 30% efectiva anual.

5. El valor de contado de una moto es $5.000.000, pero se puede adquirir por el sistema de credicontado pagando en tres cuotas así: $2.000.000 al retiro de la moto, $2.000.000 a los 2 meses y $*X* a los 4 meses. Determine el valor de la cuota *X*, suponiendo una tasa de interés del 30% *EA*.

6. Asuma que usted es el gerente de una empresa y debe decidir, con base única-men te en factor costo, cuál de los firmas, A o B, contratar para realizar unas me-jo ras de planta física. A cobra 3 cuotas de $2.000.000, una cada 2 meses pagan do la primera el día en que se firme el contrato, y además una cuota extraordinaria de $8.000.000 que debe pagarse al final del mes 6. B cobra un anticipo de $6.800.000 el día que se firme el contrato y tres pagos de, $1.200.000, $2.000.000 y $3.000.000 al final de los meses 2, 3 y 6 respectivamente. Suponga una tasa de interés del 27% *EA*.

7. *M* es un proyecto de inversión en el que usted invierte hoy $3.206.250; a los 4 meses obtiene $1.680.730, y a los 4 meses obtiene $2.000.000. Considerando una inflación del 8,56% *EA*, determine las rentabilidades total y real de *M*. 8. ¿A qué tasa nominal convertible mensualmente un pago de $1.000.000 dentro de 3 meses es equivalente a pagar $600.000 dentro de 1 mes y $1.000.000 dentro de 18 meses?

9. Hoy se adquiere un vehículo que vale 50 millones, se cancela el 30%, y el saldo se debe pagar en 3 cuotas de 10, 15 y 20 millones dentro de 6, 9 y 12 meses res pec tivamente. ¿Qué tasa de interés efectiva anual cobra el concesionario?

10. Una persona debe $800.000 a 3 meses y $1.110.000 a 10 meses. Si ofrece pagar $500.000 hoy, ¿en qué fecha deberá pagar $1.500.000 para cancelar la deuda a una tasa del 21% *AMV*?

11. ¿Cuánto debe pagarse hoy para cancelar 3 deudas de $500.000, $750.000 y $1.235.000, cuyos vencimientos son 3, 5 y 9 meses respectivamente? Asuma un rendimiento del 41% *EA*.

12. Determine en qué fecha debería efectuarse un pago único de $4.175.000 para cancelar las siguientes deudas, asumiendo un rendimiento del 38% *AMV*; $1.000.000 de vencimiento en 15 meses, al 31% *ATA*; $2.130.000 de vencimiento en 23 meses al 42% efectivo anual; y $580.000 de vencimiento en 18 meses al 23% de corrección monetaria y 14% de tasa adicional.

13. Se tienen dos deudas de 1 y 2 millones de pesos con vencimiento a 8 y 15 meses, respectivamente, pero un acuerdo de pago entre acreedor y deudor las cambia por dos pagos: uno de $600.000 de inmediato y otro a los dos años. Determine el valor de este último pago, suponiendo una tasa de interés del 30% *AMV*.

14. Usted, como contador, es llamado para una asesoría que se compromete a realizar en 4 meses y solicita como pago 10 millones como anticipo el día del inicio y dos cuotas de 5 millones cada una al final de 2 y 4 meses. El gerente le manifiesta que está de acuerdo con el monto pero le propone cambiar la forma del pago; le ofrece un anticipo de 5 millones, 3 cuotas de 4 millones cada una al final de los meses 1, 2 y 3 y un pago al final al cuarto mes. Suponiendo que usted acepta, halle este pago final considerando una tasa de interés del 20% nominal trimestral anticipada.

15. En su empresa se requiere una ampliación y dos ingenieros *X* y *Z* han presentado propuesta para realizarla. *X* se compromete a terminar la obra en 6 meses y solicita un anticipo de 8 millones el día del inicio de la obra y dos pagos más: uno de 12 millones a los 4 meses y otro de 9 millones a los 6 meses, el día de la entrega de la obra. *Z* se compromete a terminar la obra en 6 meses y solicita 5 pagos mensuales anticipados (al comienzo del mes) de 4 millones de pesos cada uno, durante los 5 primeros meses y un pago final de 8 millones el día de la entrega de la obra. Asumiendo que los dos ingenieros son igualmente confiables, diga con cuál resultaría más económica la obra, considerando una tasa de interés de 27% *ATV*. Justifique plenamente su decisión.

16. El señor Cándido Bravo hizo una consignación de $2.000.000 el día 1 de fe bre ro de 2003 en una entidad que ofrece un rendimiento del 17% *EA*, para que su hijo, que estudia en la universidad, haga 4 retiros mensuales de $450.000 para manutención, haciendo el primer retiro el día 1 marzo de 2003. Determine la fe cha en que con un retiro final de $300.000 se le agota el saldo.

17. Una moto que tiene precio de contado de $4.000.000 se adquiere financiada pagando 3 cuotas de $1.700.000 cada una al final de 4, 8 y 12 meses. Determine la tasa de financiación.

18. Una deuda de $2.500.000 debía pagarse el día 1 de marzo de 2003 pero, median te un acuerdo de pago, se cambia por dos pagos: uno de $1.500.000 y otro de $2.000.000 los días 1 de julio y 1 de diciembre de 2003. Determine la tasa de refinanciación.

19. Hoy 1 de marzo se adquieren dos deudas: una de $2.500.000 con interés de 25% *AMV* y otra de $3.500.000 con interés de 28% *ATA*, que debían pagarse los días 1 de junio y 1 de noviembre del mismo año, respectivamente, pero me dian te un acuerdo de pago se cambian por un solo pago de $7.500.000 el día 1 de julio del año siguiente. Determine la tasa de refinanciación.

20. Su empresa vincula a un trabajador con un sueldo de $400.000 y estima que a los 20 años de servicio lo liquidará con el equivalente a 20 sueldos iguales al sueldo devengado en ese entonces. Se estima que el sueldo se reajusta 14% *EA* durante los primeros 8 años y 17% *EA* durante los siguientes 12 años. El

gerente quiere consignar hoy mismo la cantidad necesaria para garantizar la liquidación del trabajador. El depósito se efectuará en una corporación que ofrecerá una rentabilidad el 20% *ATV* durante los primeros 12 años y 18% *AMV* durante los siguientes 8 años. Calcule el valor que debe consignar la empresa hoy.

21. En una empresa que usted asesora se requiere comprar una aplicación de sistemas, y un ingeniero *X* ha presentado una propuesta comprometiéndose a entregar la aplicación funcionando, en un término de 6 meses. Solicita un anticipo de 10 millones el día del inicio del trabajo y dos pagos más, uno de 12 millones a los 4 meses y otro de 9 millones a los 6 meses, día en que entregará la aplicación. Usted conoce a este ingeniero *X* y quiere que el haga el trabajo, así que como gerente le ofrece un anticipo de 8 millones el día del inicio de la obra y dos pagos más iguales entre sí: uno a los 5 meses y otro a los 8 meses. Suponiendo una tasa de interés del 28% *EA*, hallar el valor de cada uno de los pagos iguales.

22. Una deuda de $2.500.000 debía pagarse el día 1 de marzo de 2003, pero median te un acuerdo de pago se cambia por dos pagos: uno de $1.500.000 el día 1 de enero de 2003 y otro de $1.800.000 en una fecha que debe encontrarse, supo niendo una tasa del 18% *EA*. Hallar la fecha del último pago.

23. Cuando el contador le llevó los estados financieros del período, el gerente que dó satisfecho pues las cifras mostraban una rentabilidad del 38%, pero la inflación, que fue del 13%, no se había tenido en cuenta. Determine la verdadera rentabilidad de ejercicio.

24. Un equipo de cómputo cuyo precio de contado es $6.000.000 es adquirido por usted pagando el 50% al recibo, y por el saldo se compromete a pagar 2 cuotas de $2.000.000 cada una, exactamente a los 2 y 12 meses de haber recibido el equipo. Determine la tasa de interés de financiación.

25. Usted, que está sin trabajo, recibe la oferta de un contrato que le pagarán en 4 cuotas mensuales de $500.000 cada una, la primera exactamente a los 4 meses de haber iniciado el trabajo, además de una cuota extra de $800.000 a los 5 meses de comenzar el trabajo. Determine el valor de ese contrato en pesos de hoy (día del inicio del trabajo) suponiendo una tasa de interés del 30% *EA*.

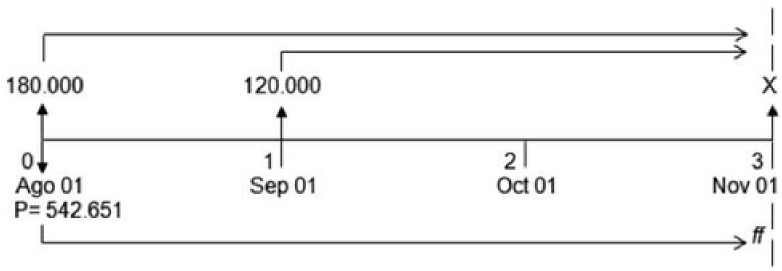
26. Hoy marzo 1 se adquieren dos deudas: una de $2.500.000 con interés de 25% *AMV* y otra de $ 3.500.000 con interés de 28% *ATA*, que debían pagarse los días 1 de junio y 1 de noviembre del 2003 respectivamente, pero mediante un acuerdo de pago, que incluye una tasa de refinanciación del 24% *EA*, se cambian por un solo pago de $7.500.000. Determine la fecha de este último pago.

27. Para adquirir una máquina, su empresa recibe una propuesta que exige \$20.000.000 de cuota inicial y dos cuotas de \$12.500.000 al final de los años 1 y 3. El proveedor acepta cambiar la forma de pago por 15 millones hoy (fecha de entrega de la máquina) y un pago de 30 millones en una fecha futura. Usted debe determinar esa fecha suponiendo una tasa de interés del 31% *ATV*.

28. Un auto vale 30 millones de contado pero se puede adquirir financiado con una tasa de interés del 27% *ATA* mediante el siguiente plan: 30% de cuota inicial, cuotas de 8 y 9 millones, respectivamente, al final de los meses 6 y 12, y una cuota más de 10 millones en una fecha que debe encontrarse. Determinar esa fecha.

Ejercicios resueltos

1. Suponga que el valor de su matrícula en la universidad es \$542.651 si se cancela el 1 de agosto, pero la universidad le permite cancelar \$180.000 el primero de agos to, \$120.000 a los 30 días y un último valor el día 1 de noviembre. Deter- mi ne es te último valor suponiendo que la universidad cobra un interés del 24,4832% *ATV*.



La gráfica nos muestra el valor de una matrícula universitaria con posibilidad de cancelarla a cuotas. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser donde está la *X*, expresar la tasa que se encuentra nominal trimestre vencida a su equivalente efectiva mensual vencida, para luego trasladar a la fecha focal cada una de las cantidades a valor futuro. No olvidar expresar los períodos de tiempo en la misma referencia de la tasa para plantear la ecuación de valor (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*). Entonces:

$$j = 24{,}4832\%\ ATV \Rightarrow \frac{0{,}244832}{4} = 0{,}061208\ ET$$

$$i = (1 + 0{,}061208)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0{,}02(100) = 2\%\ EM$$

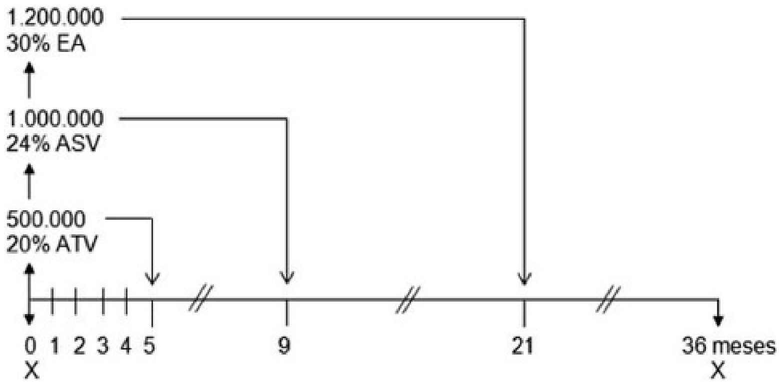
Planteamos la ecuación de valor:

$$180.000(1 + 0{,}02)^3 + 120.000(1 + 0{,}02)^2 + X = 542.651(1 + 0{,}02)^3$$

Al despejar X en la ecuación anterior tenemos:

$$X = \$260.000$$

2. Una persona debe \$500.000 con vencimiento en 5 meses e intereses del 20% *ATV*, \$1.000.000 con vencimiento en 9 meses e intereses del 24% *ASV* y \$1.200.000 con vencimiento en 21 meses e intereses del 30% *EA*. Si estas deudas se quieren cancelar mediante dos pagos iguales, uno hoy y otro dentro de 3 años, hallar el valor de esos pagos suponiendo un rendimiento del 24% *AMV*.



La gráfica nos muestra una serie de deudas con vencimientos e intereses dife- ren tes y que se quieren cancelar mediante dos pagos iguales de X valor. Para resolver el ejercicio debemos primero liquidar el valor de cada deuda en la fe cha de su vencimiento. Luego se señala una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser donde esté una de las dos X, y se expresan las tasas que se encuentran nominales vencidas a su equivalente efectivas vencidas, para después trasladar a la fecha focal cada una de las cantidades a valor futuro. No olvidar expresar los períodos de tiempo en las mismas referencias de las tasas para plantear la ecuación de valor (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*). Entonces:

$P = 500.000$

$n = 5 \text{ meses} = \frac{5}{3} = 1{,}666666 \text{ trimestres}$

$j = 20\%\ ATV \Rightarrow \frac{0{,}20}{4} = 0{,}05\ ET$

$F = 500.000(1 + 0{,}05)1{,}666666 = \$542.357{,}32$

$P = 1.000.000$

$n = 9 \text{ meses} = \frac{9}{6} = 1{,}5 \text{ semestres}$

$j = 24\%\ ASV \Rightarrow \frac{0{,}24}{2} = 0{,}12\ ES$

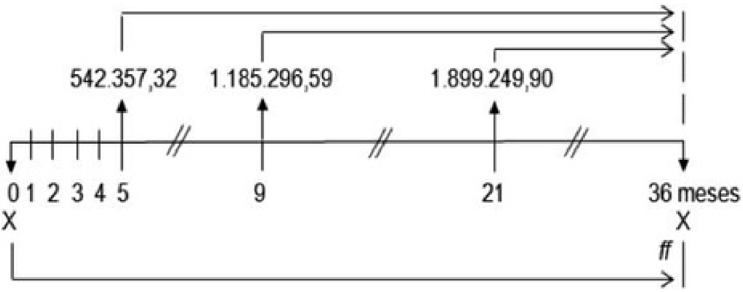
F = 1.000.000(1 + 0,05)1,5 = \$1.185.296,59

P = 1.200.000

$n = 21 \text{ meses} = \frac{21}{12} = 1{,}75 \text{ años}$

i = 30% *EA*

F = 1.200.000(1 + 0,30)1,75 = \$1.899.249,90



Planteamos la ecuación de valor, utilizando la tasa de rendimiento previa conver sión a efectiva mensual vencida:

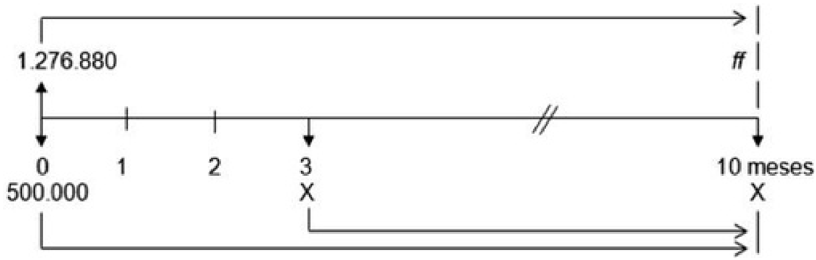
$j = 24\%\ AMV \Rightarrow \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02\ EM$

X(1 + 0,02)36 + X = 542.357,32(1 + 0,02)31 + 1.185.296,59(1 + 0,02)27 + 1.899.249,90(1 + 0,02)15

Al despejar X en la ecuación anterior tenemos:

X = \$1.836.042,05

3. Un equipo de sonido vale de contado \$1.276.880 y se puede comprar financiado con una tasa de interés del 32% efectiva anual, pagando \$500.000 como cuota inicial y el saldo en dos cuotas iguales: una a los 3 meses y otra a los 10 meses. Determine el valor de estas cuotas.



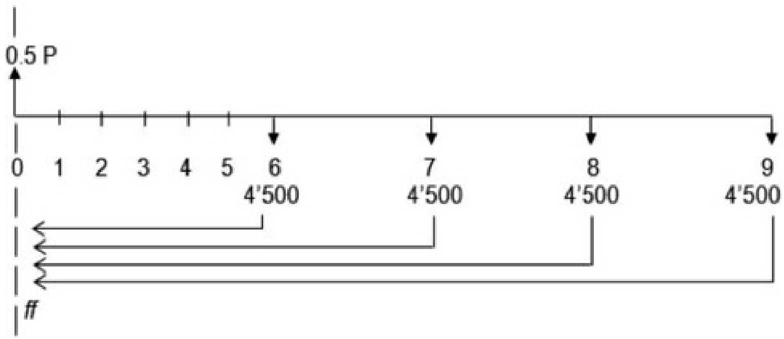
La gráfica nos muestra el valor de un equipo de sonido con posibilidad de cance larlo a cuotas. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser donde está una de los dos *X*, para luego trasladar a la fecha focal cada una de las cantidades a valor futuro. No olvidar expresar los períodos de tiempo en la misma referencia de la tasa para plantear la ecuación de valor y despejar la incógnita (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*). Entonces:

$$500.000(1\ 0{,}32)^{\left(\frac{10}{12}\right)} + X(1\ 0{,}32)^{\left(\frac{7}{12}\right)} + X = 1.276.880(1\ 0{,}32)^{\left(\frac{10}{12}\right)}$$

Al despejar *X* en la ecuación anterior tenemos:

$$X = \$450.000$$

4. Un concesionario ofrece un tipo de vehículo en una supuesta oferta así: el 50% al retiro del vehículo del concesionario y 4 cuotas mensuales de $4.500.000 cad a una, pagando la primera exactamente a los 6 meses de haber retirado el vehículo de la sala de ventas. Determine cuánto habría que pagar por el vehí cu lo si se pagara de contado en el momento de sacarlo de la sala de ventas, su poniendo una tasa de interés del 30% *EA*.



La gráfica nos muestra la forma de financiación para la adquisición de un vehículo en un concesionario. Para resolver el ejercicio debemos primero se- ña lar una fecha focal (para efectos de simplificación de cálculos escogemos la de hoy, para obtener de una vez el valor de contado del vehículo). No olvidar expresar los períodos de tiempo en la misma referencia de la tasa para plantear la ecuación de valor y despejar la incógnita (∑ Ingresos = ∑ Egresos en la *ff*). Entonces:

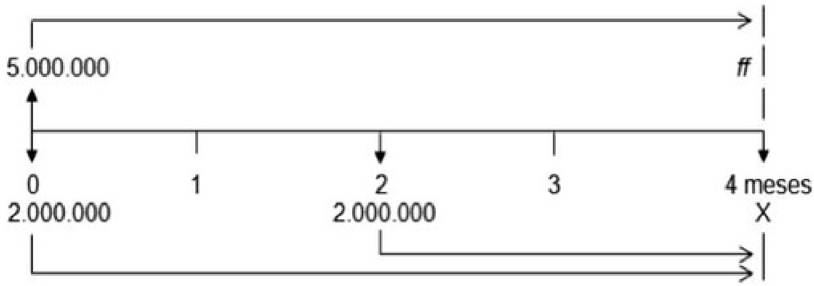
$$0{,}5P = +4.500.000(1\ 0{,}30)^{\left(-\frac{6}{12}\right)} + 4.500.000(1\ 0{,}30)^{\left(-\frac{7}{12}\right)}$$

$$+ 4.500.000(1\ 0{,}30)^{\left(-\frac{8}{12}\right)} + 4.500.000(1\ 0{,}30)^{\left(-\frac{9}{12}\right)}$$

Al despejar *P* en la ecuación anterior tenemos:

$$P = \$30.564.524,79$$

5. El valor de contado de una moto es $5.000.000 pero se puede adquirir por el sistema de credicontado pagando en tres cuotas así: $2.000.000 al retiro de la moto, $2.000.000 a los 2 meses y $*X* a los 4 meses. Determine el valor de la cuota *X*, suponiendo una tasa de interés del 30% *EA*.



La gráfica nos muestra el valor de contado de una moto con posibilidad de cancelarla a cuotas. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fe- cha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser donde está la *X*, para luego trasladar a la fecha focal cada una de las cantidades a valor futuro. No olvidar expresar los períodos de tiempo en la misma referencia de la tasa para plantear la ecuación de valor y despejar la incógnita (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*). Entonces:

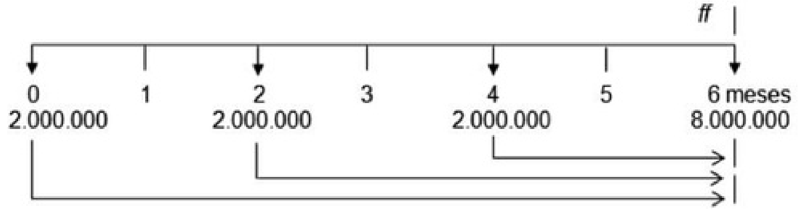
$$2.000.000(1+0,30)^{\frac{4}{12}} + 2.000.000(1+0,30)^{\frac{2}{12}} + X = 5.000.000(1+0,30)^{\frac{4}{12}}$$

Al despejar *X* en la ecuación anterior tenemos:

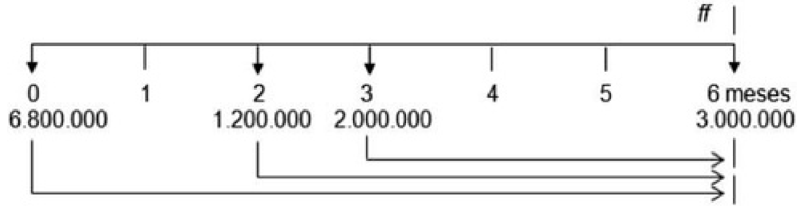
$$X = \$1.184.783,63$$

6. Asuma que usted es el gerente de una empresa y debe decidir, con base únicamente en factor costo, cuál de dos firmas, A o B, contratar para realizar unas me joras de planta física. A cobra 3 cuotas de $2.000.000, una cada 2 meses pa gando la primera el día en que se firme el contrato, y además una cuota extraordinaria de $8.000.000 que debe pagarse al final del mes 6. B cobra un anticipo de $6.800.000 el día que se firme el contrato y tres pagos de $1.200.000, $2.000.000 y $3.000.000 al final de los meses 2, 3 y 6 respectivamente. Suponga una tasa de interés del 27% *EA*.

Firma a)



Firma b)



La gráfica nos muestra los costos de dos firmas contratadas para realizar mejo- ras a una planta física, con sus respectivas formas de cobro. Para resolver el ejercicio, y como se trata de identificar cuál de los dos contratos genera menor costo para la empresa, debemos primero señalar una misma fecha focal para cada contratista y llevar todos los costos a esa fecha focal. No olvidar convertir el tiempo al período de la tasa de rendimiento que dan y establecer la sumatoria de ellos. Lógicamente, será la mejor alternativa aquella cuyo valor sea menor. Entonces:

Firma A:

$$F = 2.000.000(1+0{,}27)^{\left(\frac{6}{12}\right)} + 2.000.000(1+0{,}27)^{\left(\frac{4}{12}\right)}$$

$$+2.000.000(1+0{,}27)^{\left(\frac{2}{12}\right)} + 8.000.000$$

F = $14.501.030,30

Firma B:

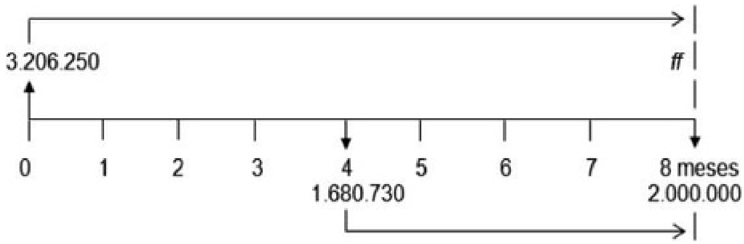
$$F = 6.800.000(1+0{,}27)^{\left(\frac{6}{12}\right)} + 1.200.000(1+0{,}27)^{\left(\frac{4}{12}\right)}$$

$$+ 2.000.000(1+0{,}27)^{\left(\frac{3}{12}\right)} + 3.000.000$$

F = $14.085.880,59

Como se observa, el valor futuro de la firma B es menor que el de la firma A; porlo tanto, su costo es menor y se recomienda la propuesta de la firma B.

7. *M* es un proyecto de inversión en el que usted invierte hoy \$3.206.250, a los 4 meses obtiene \$1.680.730 y a los 4 meses obtiene \$2.000.000. Considerando una inflación del 8,56% *EA*, determine las rentabilidades total y real de *M*.



La gráfica nos muestra la proyección financiera de una inversión en el tiempo, donde preguntan su rentabilidad total y real. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal (escogemos al final de la proyección), convertir el tiempo al período de la tasa de financiación que preguntan, para luego calcular los montos a esa fecha focal. Igualamos la ecuación a cero. Entonces:

$$1.680.730(1+i)^{\frac{4}{12}} + 2.000.000 - 3.206.250(1+i)^{\frac{8}{12}} = 0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combina do con una interpolación. El método consiste en escoger una tasa $i1$ y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otra tasa $i2$ y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con $i1$ = 30%; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$$1.680.730(1+0{,}30)^{\frac{4}{12}} + 2.000.000 - 3.206.250(1+0{,}30)^{\frac{8}{12}} = 12.802{,}19$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con otra tasa $i2$ = 32%, y la ecuación con su resultado será:

$$1.680.730(1+0{,}32)^{\frac{4}{12}} + 2.000.000 - 3.206.250(1+0{,}32)^{\frac{8}{12}} = -12018{,}51$$

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

V/r tasa		**V/r función**
0,30	→	12,802,19
i	→	0
0,32	→	−12,018,51

Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la diferen cia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{i\ 0{,}30}{0{,}32\ 0{,}30} \qquad \frac{0\ 12.802{,}19}{12.018{,}51\ 12.802{,}19}$$

Al despejar *i* en la ecuación anterior tenemos la rentabilidad total:

$$i = 31{,}03\%\ EA$$

Observación: la interpolación produce un error que será despreciable siempre y cuando el intervalo que se toma para interpolar no sea muy grande. La respuesta exacta con seis decimales es:

$$i = 31{,}025618\%\ EA$$

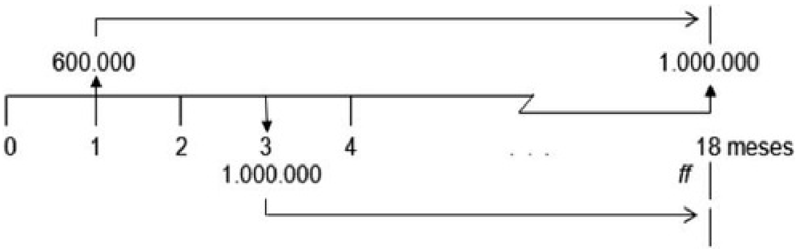
Para calcular la rentabilidad real hacemos uso de la siguiente fórmula:

$$ir = \frac{i\ \ f}{1\ f}$$

Donde *i* es la rentabilidad del proyecto, y *f* es la inflación. Entonces calculamos la rentabilidad real:

$$ir = \frac{(0{,}3102\ \ \ 0{,}\ 0856)}{(1\ 0{,}0856)} = 0{,}206942\ (100) = 20{,}69\%\ EA$$

8. ¿A qué tasa nominal convertible mensualmente un pago de $1.000.000 dentro de 3 meses es equivalente a pagar $600.000 dentro de un mes y $1.000.000 den tro de 18 meses?



La gráfica nos muestra una deuda que se quiere pagar mediante dos pagos en diferentes fechas, donde preguntan la tasa de interés de financiación. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal (escogemos al final de la línea del tiempo), llevar los datos a esa fecha focal a una tasa *i* y plantear la ecuación de valor igualándola a cero (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*). Entonces:

$$600.000(1 + i)17 + 1.000.000 - 1.000.000(1 + i)15 = 0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combinado con una interpolación. El método consiste en escoger una tasa $i1$ y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otra tasa $i2$ y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con $i1$ = 8% *EM*; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$$600.000(1 + 0{,}08)^{17} + 1.000.000 - 1.000.000(1 + 0{,}08)^{15} = 11.972{,}34$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con otra tasa $i2$ = 9% *EM*, y la ecuación con su resultado será:

$$600.000(1 + 0{,}09)^{17} + 1.000.000 - 1.000.000(1 + 0{,}09)^{15} = -9.731{,}02$$

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

V/r tasa		**V/r función**
0,08	→	11,972,34
i	→	0
0,09	→	29,731,02

Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{i\ 0{,}08}{0{,}09\ 0{,}08} \qquad \frac{0\ 11.972{,}34}{9.731{,}02\ 11.972{,}34}$$

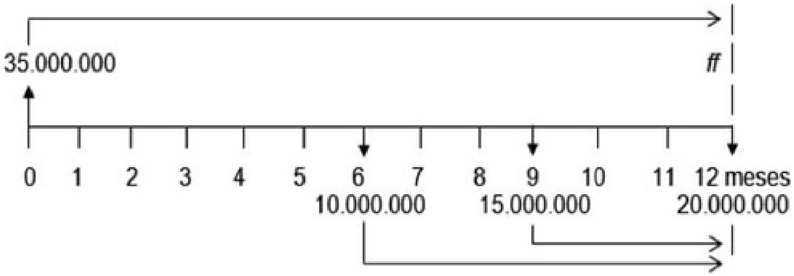
Al despejar i en la ecuación anterior tenemos la tasa de interés:

$$i = 8{,}55\%\ EM\ (12) \Rightarrow j = 102{,}60\%\ NMV$$

Observación: la interpolación produce un error que será despreciable siempre y cuando el intervalo que se toma para interpolar no sea muy grande. La respuesta exacta con seis decimales es:

$$i = 8{,}551635\%\ EM\ (12) \Rightarrow j = 102{,}62\%\ NMV$$

9. Hoy se adquiere un vehículo que vale 50 millones, se cancela el 30%, y el saldo se debe pagar en 3 cuotas de 10, 15 y 20 millones dentro de 6, 9 y 12 meses respectivamente. ¿Qué tasa de interés efectiva anual cobra el concesionario?



La gráfica nos muestra la forma de pago de adquisición de un vehículo con pa go a cuotas, donde preguntan la tasa de interés de financiación que está co- bran do el concesionario. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal (escogemos al final de la proyección), convertir el tiempo al período de la tasa de financiación que preguntan, para luego calcular los montos a esa fecha focal. Planteamos la ecuación de valor igualándola a cero (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*). Entonces:

$$35.000.000(1\ i)^{\frac{12}{12}} - 10.000.000(1\ i)^{\frac{6}{12}} - 15.000.000(1\ i)^{\frac{3}{12}} - 20.000.000 = 0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combi- na do con una interpolación. El método consiste en escoger una tasa $i1$ y calcu- lar el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otra tasa $i2$ y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con $i1$ = 36%; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$$35.000.000(1\ 0{,}36)^{\frac{12}{12}} - 10.000.000(1\ 0{,}36)^{\frac{6}{12}}$$

$$- 15.000.000(1\ 0{,}36)^{\frac{3}{12}} - 20.000.000 = 191.505{,}90$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con otra tasa $i2$ = 38%, y la ecua- ción con su resultado será:

$$35.000.000(1\ 0{,}38)^{\frac{12}{12}} - 10.000.000(1\ 0{,}38)^{\frac{6}{12}}$$

$$- 15.000.000(1\ 0{,}38)^{\frac{3}{12}} - 20.000.000 = -213.686{,}81$$

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

V/r tasa **V/r función**

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{lcl} 0{,}36 & \rightarrow & 191.505{,}90 \\ i & \rightarrow & 0 \end{array}\right] \\ 0{,}38 \quad \rightarrow \quad 213.686{,}81 \end{array}\right]$$

Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la diferen cia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{i \; 0{,}36}{0{,}38 \; 0{,}36} \qquad \frac{0 \; 191.505{,}90}{213.686{,}81 \; 191.505{,}90}$$

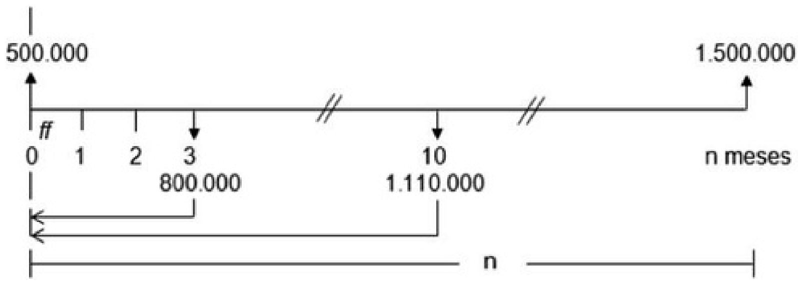
Al despejar i en la ecuación anterior tenemos la rentabilidad total:

$$i = 36{,}94\% \; EA$$

Observación: la interpolación produce un error que será despreciable siempre y cuando el intervalo que se toma para interpolar no sea muy grande. La respuesta exacta con seis decimales es:

$$i = 36{,}938554\% \; EA$$

10. Una persona debe \$800.000 a 3 meses y \$1.110.000 a 10 meses. Si ofrece pagar \$500.000 hoy, ¿en qué fecha deberá pagar \$1.500.000 para cancelar la deuda? Suponga intereses al 21% *AMV*.



La gráfica nos muestra unas deudas de una persona, quien ofrece cancelarlas con unos pagos en diferentes fechas, y se solicita la fecha de pago de la última cuota. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos se toma en la fecha cero, expresar la tasa que se encuentra nominal mensual vencida a su equivalente efectiva mensual vencida, para luego trasladar a la fecha focal cada una de las cantidades a valor presente. Una vez obtenido ese valor presente, procedemos a calcular el tiempo y tomamos como valor futuro el pago de 1.500.000. Entonces:

$$j = 21\%\ AMV = \frac{0{,}21}{12} = 0{,}0175\ EM$$

Planteamos la ecuación de valor para calcular valor presente de los datos con las fechas conocidas:

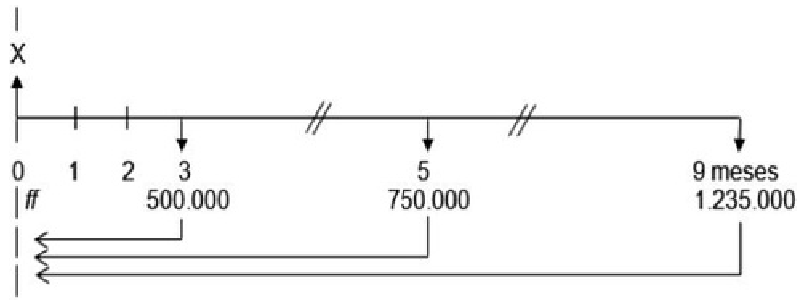
$P = 800.000(1 + 0{,}0175)^{-3} + 1.110.000(1 + 0{,}0175)^{-10} - 500.000$

$P = 1.192.636{,}97$

Procedemos a calcular el tiempo:

$$n = \frac{\text{Log}\left(\dfrac{1.500.000}{1.192.636{,}97}\right)}{\text{Log}(1 + 0{,}0175)} = 13{,}217 \text{ meses}$$

11. ¿Cuánto debe pagarse hoy para cancelar 3 deudas de \$500.000, \$750.000 y \$1.235.000, cuyos vencimientos son 3, 5 y 9 meses respectivamente? Asuma un rendimiento del 41% *EA*.

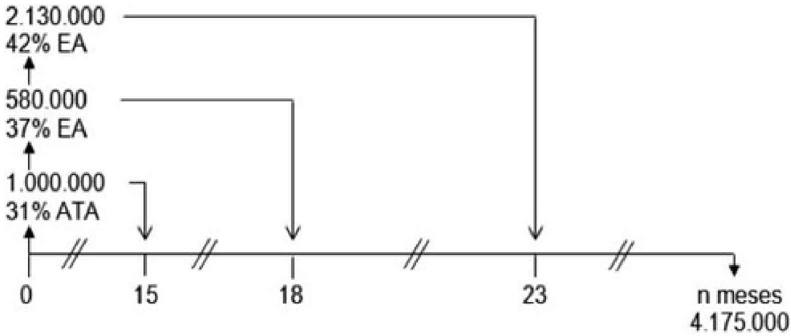


La gráfica nos muestra unas deudas que se deben cancelar en un solo pago. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser donde está la *X*, para luego trasladar a la fecha focal cada una de las cantidades a valor presente. No olvidar expresar los períodos de tiempo en la misma referencia de la tasa, y finalmente plantear la ecuación de valor (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*) para despejar la incógnita. Entonces:

$$X = 500.000(1 + 0{,}41)^{-\left(\frac{3}{12}\right)} + 750.000(1 + 0{,}41)^{-\left(\frac{5}{12}\right)} + 1.235.000(1 + 0{,}41)^{-\left(\frac{9}{12}\right)}$$

$X = 2.063.252{,}95$

12. Determine en qué fecha debería efectuarse un pago único de $4.175.000 para cancelar las siguientes deudas, asumiendo un rendimiento del 38% *AMV*: $1.000.000 con vencimiento en 15 meses, al 31% *ATA*; $2.130.000 con vencimien to en 23 meses al 42% efectivo anual; y $580.000 con vencimiento en 18 me ses al 23% de corrección monetaria y 14% de tasa adicional.



La gráfica nos muestra una serie de deudas con vencimientos e intereses diferen tes y que se quieren cancelar mediante un único pago. Para resolver el ejer cicio debemos primero liquidar el valor de cada deuda en la fecha de su vencimiento. Luego se traen a valor presente a fecha de hoy asumiendo la tasa de rendimiento. No olvidar expresar los períodos de tiempo en las mismas referencias de las tasas y finalmente calcular el tiempo de realización del pago. Así mismo, se debe expresar la tasa que se encuentra nominal anticipada a su equivalente efectiva vencida. Entonces:

$P = 1.000.000$

$n = 15 \text{ meses} = \frac{15}{3} = 5 \text{ trimestres}$

$j = 31\%\ ATA \Rightarrow \frac{0{,}31}{4} = 0{,}0775\ ETA \Rightarrow \frac{0{,}0775}{(1\ 0{,}0775)} = 0{,}084011\ ET$

$F = 1.000.000(1 + 0{,}0775)5 = \$1.496.815$

$P = 580.000$

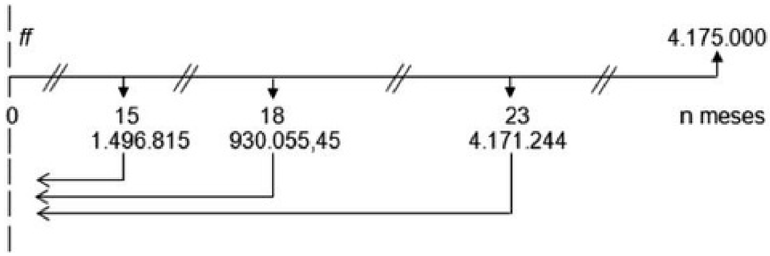
$n = 18 \text{ meses} = \frac{18}{12} = 1{,}5 \text{ años}$

$i = 37\%\ EA$

$F = 580.000(1 + 0{,}37)1{,}5 = \$930.055{,}45$

$P = 2.130.000$
$n = 23$ meses $= \dfrac{23}{12} = 1{,}916666$ años
$i = 42\%\ EA$

$F = 2.130.000(1 + 0{,}42)^{1{,}916666} = \$4.171.244$

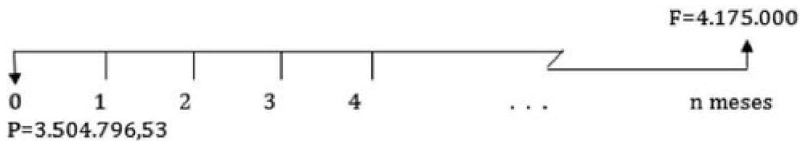


Calculamos valor presente a la tasa de rendimiento:

$j = 38\%\ AMV \Rightarrow \dfrac{0{,}38}{12} = 0{,}031666\ EM$

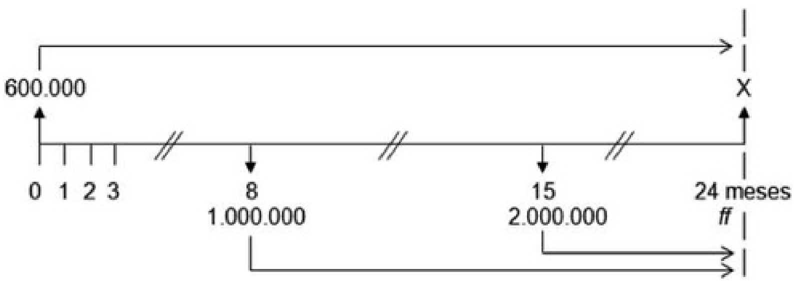
$P = 1.496.815(1 + 0{,}031666)^{-15} + 930.055{,}45(1 + 0{,}031666)^{-18}$
$\quad + 4.171.244(1 + 0{,}031666)^{-23}$

$P = 3.504.796{,}53$



Calculamos el tiempo: $n = \dfrac{\text{Log}\left(\dfrac{4.175.000}{3.504.796{,}53}\right)}{\text{Log}(1+0{,}031666)} = 5{,}61$ meses

13. Se tienen dos deudas de 1 y 2 millones de pesos con vencimiento a 8 y 15 meses, respectivamente, pero un acuerdo de pago entre acreedor y deudor las cambia por dos pagos: uno de \$600.000 de inmediato y otro a los dos años. Determine el valor de este último pago, suponiendo una tasa de interés del 30% *AMV*.



La gráfica nos muestra el valor de dos deudas para cancelarlas en dos pagos con distintas fechas. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser donde está la *X*, expresar la tasa que se encuentra nominal mensual vencida a su equivalente efectiva mensual vencida, para luego trasladar a la fecha focal cada una de las cantidades a valor futuro. Planteamos la respectiva ecuación de valor (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*). Entonces:

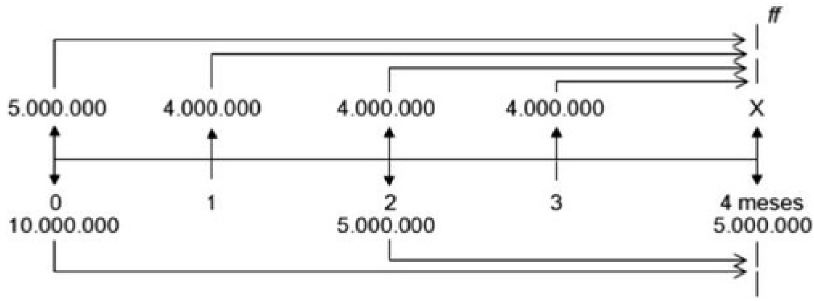
$$j = 30\%\ AMV \Rightarrow \frac{0{,}30}{12} = 0{,}025\ EM$$

$$600.000(1 + 0{,}025)24 + X = 1.000.000(1 + 0{,}025)16 + 2.000.000(1 + 0{,}025)9$$

Al despejar *X* de la ecuación anterior, tenemos:

$$X = \$2.896.996$$

14. Usted, como contador, es llamado para una asesoría que se compromete a realizar en 4 meses y solicita como pago 10 millones como anticipo el día del inic io y dos cuotas de 5 millones cada una al final de 2 y 4 meses. El gerente le ma nifies ta que está de acuerdo con el monto pero le propone cambiar la forma del pa go: le ofrece un anticipo de 5 millones, 3 cuotas de 4 millones cada una al final de los meses 1, 2 y 3 y un pago al final al cuarto mes. Suponiendo que usted acep ta, halle este pago final considerando una tasa de interés del 20% *ATA*.



La gráfica nos muestra la propuesta en pesos de una asesoría como contador y a su vez la contrapropuesta del gerente de la compañía que se va a asesorar. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser donde está la *X*, para luego trasladar a la fecha focal cada una de las cantidades a valor futuro, hacer la conversión de tasa que se encuentra nominal trimestre anticipado, pasarla a efectiva mensual vencida, finalmente plantear la ecuación de valor y despejar la respectiva incóg- nita (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*). Entonces:

$j = 20\%\ ATA \Rightarrow \frac{0,20}{4} = 0,05\ ETA$

$\frac{0,05}{(1 - 0,05)} = 0,052631\ ET$

$i = (1 + 0,052631)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0,017244\ EM$

Planteamos la ecuación de valor:

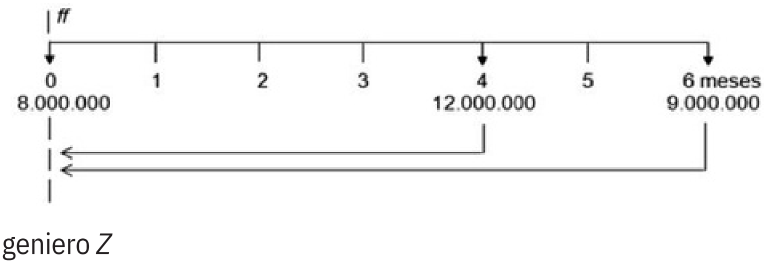
$5.000.000(1 + 0,017244)^4 + 4.000.000(1 + 0,017244)^3$
$+ 4.000.000(1 + 0,017244)^2 + 4.000.000(1 + 0,017244)^1$
$+ X = 10.000.000(1 + 0,017244)^4 + 5.000.000(1 + 0,017244)^2 + 5.000.000$

Al despejar X en la ecuación anterior tenemos:

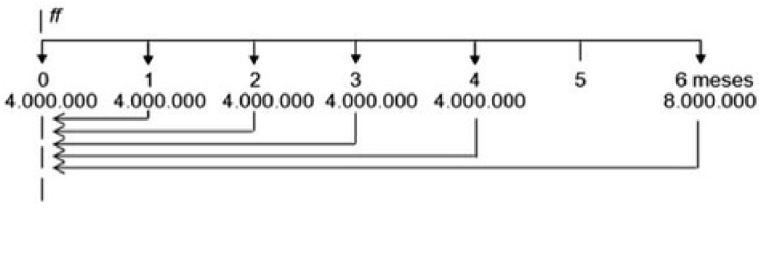
$$X = \$3.109.201,36$$

15. En su empresa se requiere una ampliación, y dos ingenieros, *X* y *Z*, han presentado propuesta para realizarla. *X* se compromete a terminar la obra en 6 meses y solicita un anticipo de 8 millones el día del inicio de la obra y dos pagos más: uno de 12 millones a los 4 meses y otro de 9 millones a los 6 meses, el día de la entrega de la obra. *Z* se compromete a terminar la obra en 6 meses y solicita 5 pagos mensuales anticipados (al comienzo del mes), de 4 millones de pesos cada uno, durante los 5 primeros meses y un pago final de 8 millones el día de entrega de la obra. Asumiendo que los dos ingenieros son igualmente confiables, diga con cuál resultaría más económica la obra, considerando una tasa de interés de 27% *ATV*. Justifique plenamente su decisión.

a. Ingeniero *X*



b. Ingeniero *Z*



Las gráficas muestran cada una de las propuestas planteadas de obra de ingenie ría, y se trata de escoger la mejor, es decir, la alternativa que resulte más económica. Una forma de solucionar es hallar el valor presente de las propuestas a la tasa de interés de rendimiento y, obviamente, será mejor la alternativa que tenga menor valor. Debemos primero convertir la tasa que se encuentra nominal trimestre vencido a efectiva mensual vencida. Entonces:

$$j = 27\%\ ATV \Rightarrow \frac{0{,}27}{4} = 0{,}0675\ ET$$

$$i = (1 + 0{,}0675)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0{,}022011\ EM$$

Calculamos el valor presente de la propuesta de *X*:

$$P = 8.000.000 + 12.000.000(1 + 0{,}022011)^{-4} + 9.000.000(1 + 0{,}022011)^{-9}$$

$$P = 26.397.524{,}24$$

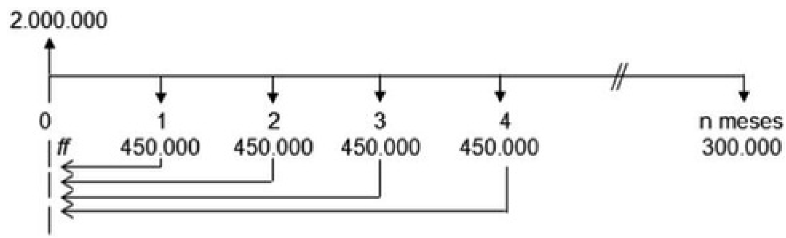
Calculamos el valor presente de la propuesta de *Z*:

$$P = 4.000.000 + 4.000.000(1 + 0{,}022011)^{-1} + 4.000.000(1 + 0{,}022011)^{-2}$$
$$+ 4.000.000(1 + 0{,}022011)^{-3} + 4.000.000(1 + 0{,}022011)^{-4}$$
$$+ 8.000.000(1 + 0{,}022011)^{-6}$$

$$P = 26.177.119{,}45$$

Como se observa, el valor presente de *X* es mayor que el de *Z*; por lo tanto, la mejor propuesta de obra para la empresa es la del ingeniero *X*.

16. El señor Cándido Bravo hizo una consignación de $2.000.000 el día 1 de febrero de 2003 en una entidad que ofrece un rendimiento del 17% *EA* para que su hijo, que estudia en la universidad, haga 4 retiros mensuales de $450.000 para manutención, haciendo el primer retiro el día 1 marzo de 2003. Determine la fecha en que con un retiro final de $300.000 se le agota el saldo.

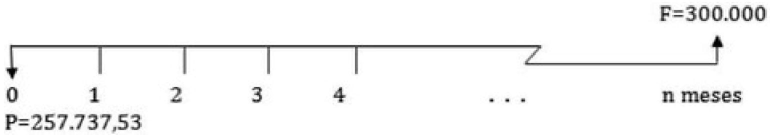


La gráfica nos muestra una línea de tiempo donde, previo una consignación, se realiza el valor de varios retiros. Se pregunta la fecha del retiro final. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser la de hoy, traer a valor presente los retiros de igual valor y restarlos de la consignación inicial. No olvidar expresar el tiempo en las mismas referencias de la tasa, para finalmente calcular el tiempo de realización del retiro. Entonces:

$$P = 2.000.000 - 450.000(1+0,17)^{-\left(\frac{1}{12}\right)} - 450.000(1+0,17)^{-\left(\frac{2}{12}\right)}$$

$$- 450.000(1+0,17)^{-\left(\frac{3}{12}\right)} - 450.000(1+0,17)^{-\left(\frac{4}{12}\right)}$$

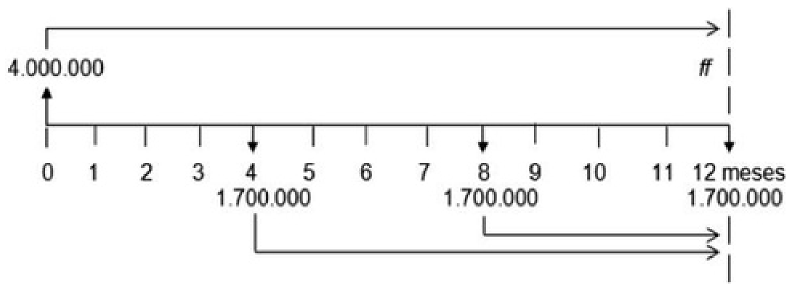
$P = 257.737,53$



Calculamos el tiempo:

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{300.000}{257.737,53}\right)}{\mathrm{Log}(1+0,17)} = 0,967115 \text{ años } (12) = 11,60 \text{ meses}$$

17. Una moto que tiene precio de contado de \$4.000.000 se adquiere financiada pa gando 3 cuotas de \$1.700.000 cada una al final de 4, 8 y 12 meses. Determine la tasa de financiación.



La gráfica nos muestra la forma de pago de adquisición de una moto con pago a cuotas, y se pregunta la tasa de interés de financiación que está cobrando el concesionario. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal (escogemos al final de la proyección), para luego llevar los datos a esa fecha focal calculando valor futuro. Planteamos la ecuación de valor igualándola a cero (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*). Entonces:

$$4.000.000(1 + i)12 - 1.700.000(1 + i)8 - 1.700.000(1 + i)4 - 1.700.000 = 0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combinado con una interpolación. El método consiste en escoger una tasa i_1 y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otra tasa i_2 y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con $i_1 = 3\%$ *EM*; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$$4.000.000(1 + 0{,}03)^{12} - 1.700.000(1 + 0{,}03)^{8} - 1.700.000(1 + 0{,}03)^{4} - 1.700.000 = 44.769{,}47$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con otra tasa $i_2 = 4\%$ *EM*, y la ecuación con su resultado será:

$$4.000.000(1 + 0{,}04)^{12} - 1.700.000(1 + 0{,}04)^{8} - 1.700.000(1 + 0{,}04)^{4} - 1.700.000 = -242.844{,}54$$

Tomamos los resultados, ya que presentan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

V/r tasa		**V/r función**
0,03	→	44.769,47
i	→	0
0,04	→	−242.844,54

Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{i - 0{,}03}{0{,}04 - 0{,}03} = \frac{0 - 44.769{,}47}{-242.844{,}54 - 44.769{,}47}$$

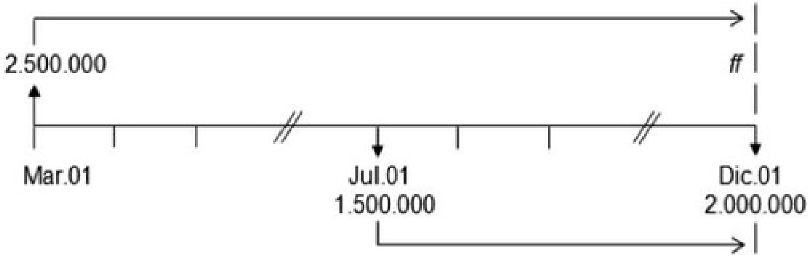
Al despejar i en la ecuación anterior tenemos la rentabilidad total:

$$i = 3{,}155658\%\ EM$$

Observación: la interpolación produce un error que será despreciable siempre y cuando el intervalo que se toma para interpolar no sea muy grande. La respuesta exacta con seis decimales es:

$$i = 3{,}149423\%\ EM$$

18. Una deuda de $2.500.000 debía pagarse el día 1 de marzo de 2003, pero mediante un acuerdo de pago se cambia por dos pagos: uno de $1.500.000 y otro de $2.000.000 los días 1 de julio y 1 de diciembre de 2003. Determine la tasa de refinanciación (rendimiento).



La gráfica nos muestra una deuda contraída por una persona con un acuerdo de pago, y se pide determinar la tasa de refinanciación. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal (escogemos al final de la proyección), para luego llevar los datos a esa fecha focal calculando valor futuro. Igualamos la ecuación a cero. Entonces:

$$2.500.000(1 + i)^9 - 1.500.000(1 + i)^5 - 2.000.000 = 0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combinado con una interpolación. El método consiste en escoger una tasa i_1 y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otra tasa i_2 y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con i_1 = 5% *EM*; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$$2.500.000(1 + 0{,}05)^9 - 1.500.000(1 + 0{,}05)^5 - 2.000.000 = 23.271{,}54$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con otra tasa i_2 = 6% *EM*, y la ecuación con su resultado será:

$$2.500.000(1 + 0{,}06)^9 - 1.500.000(1 + 0{,}06)^5 - 2.000.000 = -128.062{,}58$$

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lcl} \textbf{V/r tasa} & & \textbf{V/r función} \\ 0{,}05 & \rightarrow & 23.271{,}54 \\ i & \rightarrow & 0 \\ 0{,}06 & \rightarrow & 2128.062{,}58 \end{array}$$

Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la dife rencia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{i\ 0{,}05}{0{,}06\ 0{,}05} \qquad \frac{0\ 23.271{,}54}{128.062{,}58\ 23.271{,}54}$$

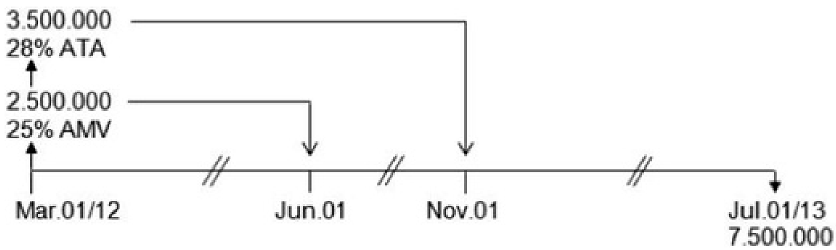
Al despejar i en la ecuación anterior tenemos la rentabilidad total:

$$i = 5{,}153775\%\ EM$$

Observación: la interpolación produce un error que será despreciable siempre y cuando el intervalo que se toma para interpolar no sea muy grande. La respuesta exacta con seis decimales es:

$$i = 5{,}148631\%\ EM$$

19. Hoy 1 de marzo se adquieren dos deudas: una de $2.500.000 con interés de 25% *AMV* y otra de $3.500.000 con interés de 28% *ATA*, que debían pagarse los días 1 de junio y 1 de noviembre del mismo año, respectivamente, pero median te un acuerdo de pago se cambian por un solo pago de $7.500.000 el día 1 de julio del año siguiente. Determine la tasa de refinanciación.



La gráfica nos muestra dos deudas con vencimientos e intereses diferentes y que se quieren cancelar mediante un único pago. Para resolver el ejercicio debemos primero liquidar el valor de cada deuda en la fecha de su vencimiento, luego señalamos una fecha focal (escogemos al final de la proyección), para luego lle- var los datos a esa fecha focal calculando valor futuro. No olvidar expresar las tasas que se encuentran nominales a su equivalente efectiva vencida. Iguala mos la ecuación a cero. Entonces:

$P = 2.500.000$

$n = 3$ meses

$j = 25\%\ AMV \Rightarrow \dfrac{0{,}25}{12} = 0{,}020833$

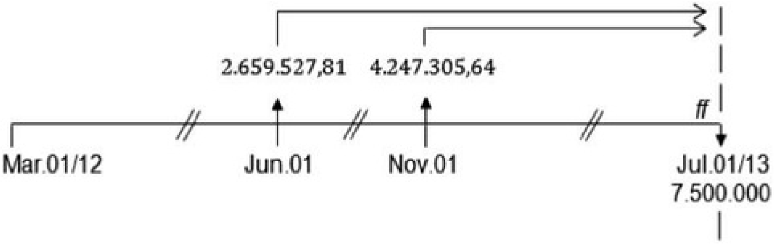
$F = 2.500.000(1 + 0{,}020833)12 = \$2.659.527{,}81$

$P = 3.500.000$

$n = 8 \text{ meses} = \frac{8}{3} = 2{,}666666 \text{ trimestres}$

$j = 28\%\ ATA \Rightarrow \frac{0{,}28}{4} = 0{,}07\ ETA = \frac{0{,}07}{(1 - 0{,}07)} = 0{,}075268\ ET$

$F = 3.500.000(1 + 0{,}075268)^{2{,}666666} = \$4.247.305{,}64$



$$2.659.527{,}81(1 + i)^{13} + 4.247.305{,}64(1 + i)^{8} + 7.500.000 = 0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combinado con una interpolación. El método consiste en escoger una tasa i_1 y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otra tasa i_2 y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con $i_1 = 0{,}5\%\ EM$; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$2.659.527{,}81(1 + 0{,}005)^{13} + 4.247.305{,}64(1 + 0{,}005)^{8} - 7.500.000 = 226.919{,}17$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con otra tasa $i_2 = 1\%\ EM$, y la ecuación con su resultado será:

$2.659.527{,}81(1 + 0{,}01)^{13} + 4.247.305{,}64(1 + 0{,}01)^{8} - 7.500.000 = -110.723{,}90$

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

V/r tasa **V/r función**

$$\begin{bmatrix} 0{,}005 & \rightarrow & 226.919{,}17 \\ i & \rightarrow & 0 \\ 0{,}01 & \rightarrow & 2110.723{,}90 \end{bmatrix}$$

Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mos tra - das en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la di- fe rencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{i\ 0{,}005}{0{,}01\ 0{,}005} \qquad \frac{0\ 226.919{,}17}{110.723{,}90\ 226.919{,}17}$$

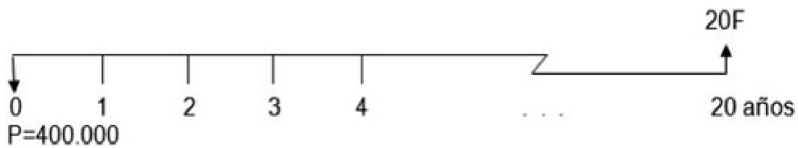
Al despejar *i* en la ecuación anterior tenemos la rentabilidad total:

$$i = 0{,}836034\%\ EM$$

Observación: la interpolación produce un error que será despreciable siempre y cuando el intervalo que se toma para interpolar no sea muy grande. La respues ta exacta con seis decimales es:

$$i = 0{,}831506\%\ EM$$

20. Su empresa vincula a un trabajador con un sueldo de $400.000 y estima que a los 20 años de servicio lo liquidará con el equivalente a 20 sueldos iguales al sueldo devengado en ese entonces. Se estima que el sueldo se reajusta 14% *EA* durante los primeros 8 años y 17% *EA* durante los siguientes 12 años. El gerente quiere consignar hoy mismo la cantidad necesaria para garantizar la liquidación del trabajador. El depósito se efectuará en una corporación que ofrecerá una rentabilidad el 20% *ATV* durante los primeros 12 años y 18% *AMV* durante los siguientes 8 años. Calcule el valor que debe consignar la empresa hoy.



La gráfica nos muestra la línea de tiempo en años del sueldo de un trabajador. Previos ajustes salariales, se debe calcular el valor del depósito hoy que garan ti ce ese salario en el tiempo. Para resolver el ejercicio debemos primero liqui dar el valor del salario a los 20 años con los debidos reajustes porcentuales en el tiempo. Luego traemos a valor presente ese valor con las rentabilidades esperadas en el tiempo, para poder llegar al dato que se pregunta. No olvidar expresar las tasas que se encuentran nominales a su equivalente efectiva vencida. Entonces:

Calculamos el valor reajustado del sueldo los primeros 8 años:

$P = 400.000$

$n = 8$ años

$i = 14\%\ EA$

$F = 400.000(1 + 0{,}14)8 = \$1.141.034{,}57$

Calculamos el valor reajustado del sueldo los últimos 12 años:

P = 1.141.034,57

n = 12 años

i = 17% EA

F = 1.141.034,57(1 + 0,17)12 = $7.508.084,35

Calculamos el valor de la liquidación a los 20 años de servicio:

$$X = 20(7.508.084{,}35) = \$150.161.687$$

Traemos a valor presente la liquidación de los últimos 8 años:

F = 150.161.687

n = 8 años = 96 meses

$j = 18\%\ AMV \Rightarrow \dfrac{0{,}18}{12} = 0{,}015\ EM$

P = 150.161.687(1 + 0,015)–96 = $35.959.950,29

Traemos a valor presente la liquidación de los primeros 12 años, que es el valor que debe consignar el día de hoy la empresa para garantizar la liquidación del trabajador a los 20 años de servicio.

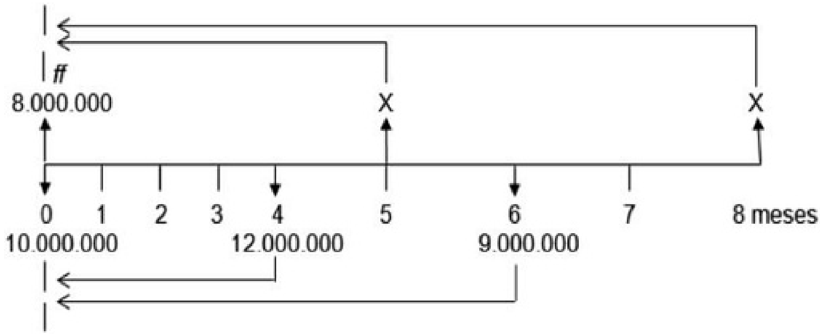
F = 35.959.950,29

n = 12 años = 48 trimestres

$j = 20\%\ ATV \Rightarrow \dfrac{0{,}20}{4} = 0{,}05\ ET$

P = 35.959.950,29(1 + 0,05)–48 = $3.457.265,46

21. En una empresa que usted asesora se requiere comprar una aplicación de sis temas, y un ingeniero X ha presentado una propuesta comprometiéndose a entregar la aplicación funcionando en un término de 6 meses. Solicita un antici po de 10 millones el día del inicio del trabajo y dos pagos más: uno de 12 mi llo nes a los 4 meses y otro de 9 millones a los 6 meses, día en que entregará la aplicación. Usted conoce a este ingeniero X y quiere que el haga el trabajo, así que como geren te le ofrece un anticipo de 8 millones el día del inicio de la obra y dos pagos más (iguales entre sí): uno a los 5 meses y otro a los 8 meses. Supo nien do una ta sa de interés del 28% EA, hallar el valor de cada uno de los pagos iguales.



La gráfica nos muestra la propuesta en pesos de compra de una aplicación de sis- temas funcionando y a su vez la contrapropuesta del gerente de la empresa pa ra el pago. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser la fecha de inicio de tra ba jo, para luego trasladar a la fecha focal cada una de las cantidades a valor pre sente. No olvidar colocar el tiempo en las mismas referencias de la tasa, y finalmente plantear la ecuación de valor despejando la respectiva incógnita (∑ Deudas = ∑ Pagos en la *ff*). Entonces:

Planteamos la ecuación de valor:

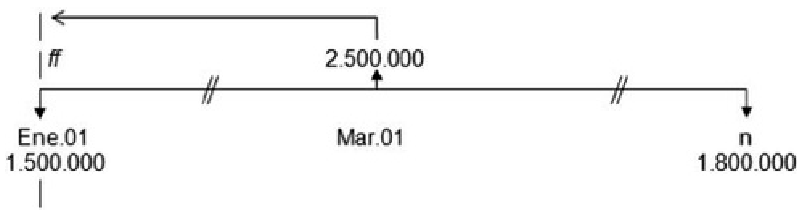
$$8.000.000 + X(1+0,28)^{-\frac{5}{12}} + X(1+0,28)^{-\frac{8}{12}} = 10.000.000$$

$$+ 12.000.000(1+0,28)^{-\frac{4}{12}} + 9.000.000(1+0,28)^{-\frac{6}{12}}$$

Al despejar *X* en la ecuación anterior tenemos:

$X = \$12.120.112,68$

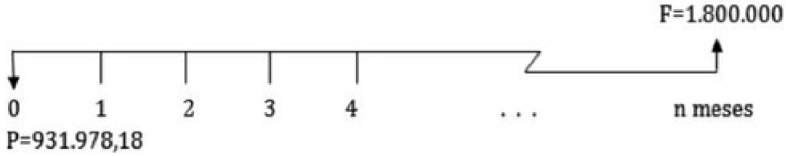
22. Una deuda de \$2.500.000 debía pagarse el día 1 de marzo de 2003, pero mediante un acuerdo de pago se cambia por dos pagos: uno de \$1.500.000 el día 1 de enero de 2003 y otro de \$1.800.000 en una fecha que debe encontrarse, suponiendo una tasa de refinanciación del 18% *EA*. Hallar la fecha del último pago.



La gráfica nos muestra un acuerdo de pago de una deuda, y se pregunta la fecha del pago final. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha fo- cal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser la fecha del primer pa go del acuerdo, traer a valor presente la deuda teniendo en cuenta que se ex- pre se el tiempo en las mismas referencias de la tasa y restarla del primer pago, para finalmente calcular el tiempo de realización del último pago. Entonces:

$$P = 2.500.000(1+0,18)^{-\left(\frac{2}{12}\right)} - 1.500.000$$

$$P = 931.978,18$$



Calculamos la fecha del último pago:

$$n = \frac{\text{Log}\left(\frac{1.800.000}{931.978,18}\right)}{\text{Log}(1+0,18)} = 3,9768 \text{ años} = \text{a los 4 años}$$

23. Cuando el contador le llevó los estados financieros del período, el gerente que dó satisfecho pues las cifras mostraban una rentabilidad del 38%, pero la inflación, que fue del 13%, no se había tenido en cuenta. Determine la verda- de ra rentabilidad de ejercicio.

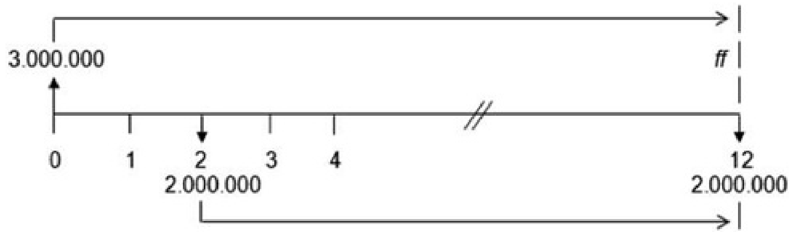
El ejercicio nos muestra la rentabilidad de una empresa pero sin tener en cuenta el índice de inflación. La inflación es un proceso económico en el cual se presenta un aumento general de precios, y para su cálculo se toma una serie de artículos que conforman la canasta familiar. Al hacer el análisis sobre la rentabilidad de la empresa, es necesario tener en cuenta que la inflación afecta la rentabilidad real. Para calcular la rentabilidad real hacemos uso de la siguiente fórmula:

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

Donde *i* es la rentabilidad contable de la empresa, y *f* es la inflación. Entonces calculamos la rentabilidad real, teniendo en cuenta que las dos tasas de interés están efectivas anuales:

$$ir = \frac{(0,38 - 0,13)}{(1+0,13)} = 0,221239\ (100) = 22,12\%\ EA$$

24. Usted adquiere un equipo de cómputo, cuyo precio de contado es $6.000.000, pagando el 50% al recibo, y por el saldo se compromete a pagar 2 cuotas de $2.000.000 cada una, exactamente a los 2 y 12 meses de haber recibido el equi- po. Determine la tasa de interés de financiación.



La gráfica nos muestra la forma de pago en la financiación de un equipo de cóm- puto, y se pide determinar la tasa de interés cobrada. Para resolver el ejercicio de bemos primero señalar una fecha focal (escogemos al final de la proyección), para luego calcular los montos a esa fecha focal. Igualamos la ecuación a cero. Entonces:

$$3.000.000(1 + i)^{12} - 2.000.000(1 + i)^{10} - 2.000.000 = 0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combina do con una interpolación. El método consiste en escoger una tasa $i1$ y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otra tasa $i2$ y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con $i1$ = 4% *EM*; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$$3.000.000(1 + 0{,}04)^{12} - 2.000.000(1 + 0{,}04)^{10} - 2.000.000 = 98.306{,}52$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con otra tasa $i2$ = 5% *EM*, y la ecuación con su resultado será:

$$3.000.000(1 + 0{,}05)^{12} - 2.000.000(1 + 0{,}05)^{10} - 2.000.000 = -72.266{,}21$$

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

V/r tasa		**V/r función**
0,04	→	98.306,52
i	→	0
0,05	→	272.266,21

Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la di fe rencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la dife-ren cia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{i\ 0{,}04}{0{,}05\ 0{,}04} \qquad \frac{0\ 98.306{,}52}{72.266{,}21\ 98.306{,}52}$$

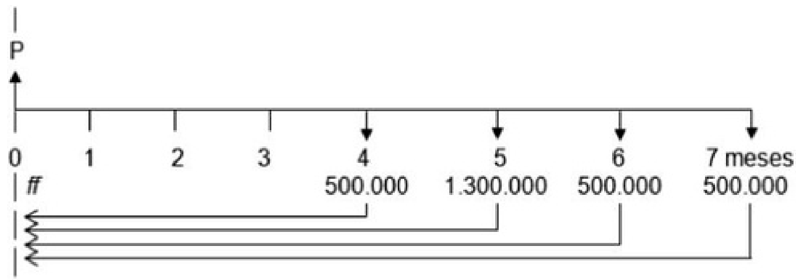
Al despejar *i* en la ecuación anterior tenemos la rentabilidad total:

$$i = 4{,}576332\%\ EM$$

Observación: la interpolación produce un error que será despreciable siempre y cuando el intervalo que se toma para interpolar no sea muy grande. La res-pues ta exacta con seis decimales es:

$$i = 4{,}563489\%\ EM$$

25. Usted, que está sin trabajo, recibe la oferta de un contrato que le pagarán en 4 cuotas mensuales de $500.000 cada una, la primera exactamente a los 4 meses de haber iniciado el trabajo, además de una cuota extra de $800.000 a los 5 me-ses de comenzar el trabajo. Determine el valor de ese contrato en pesos de hoy (día del inicio del trabajo) suponiendo una tasa de interés del 30% *EA*.



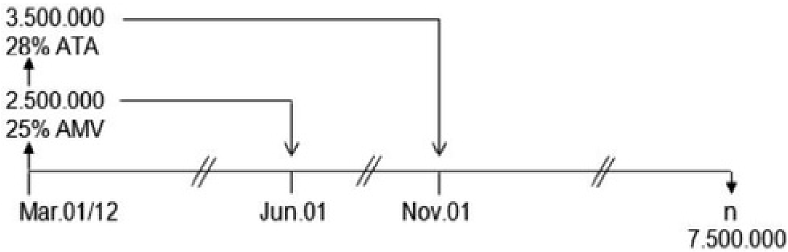
La gráfica nos muestra la forma de pago en una línea de tiempo de un contrato, y se pregunta el valor de ese contrato a pesos de hoy. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser la fecha de hoy, para luego trasladar a la fecha focal cada una de las cantidades a valor presente, teniendo en cuenta que se exprese el tiempo en las mismas unidades de la tasa de rendimiento. Entonces:

$$P = 500.000(1\ 0{,}30)^{\frac{4}{12}} + 1.300.000(1\ 0{,}30)^{\frac{5}{12}}$$

$$+\ 500.000(1\ 0{,}30)^{\frac{6}{12}} + 500.000(1\ 0{,}30)^{\frac{7}{12}}$$

$P = \$2.491.082{,}75$

26. Hoy marzo 1 se adquieren dos deudas: una de $2.500.000 con interés de 25% *AMV* y otra de $3.500.000 con interés de 28% *ATA*, que debían pagarse los días 1 de junio y 1 de noviembre del 2003 respectivamente, pero mediante un acuer do de pago, que incluye una tasa de refinanciación del 24% *EA*, se cambian por un solo pago de $7.500.000. Determine la fecha de este último pago.



La gráfica nos muestra dos deudas con vencimientos e intereses diferentes y que se quieren cancelar mediante un único pago. Para resolver el ejercicio de- bemos primero liquidar el valor de cada deuda en la fecha de su vencimiento, luego seña lamos una fecha focal (escogemos al principio de la proyección), para luego cal cular el capital a esa fecha focal y finalmente calcular el tiempo en el cual se debe realizar el pago único. No olvidar expresar las tasas que se encuentran nomi nales a su equivalente efectiva vencida. Igualamos la ecua- ción a cero. Enton ces:

$P = 2.500.000$

$n = 3$ meses

$$j = 25\%\ AMV \Rightarrow \frac{0{,}25}{12} = 0{,}020833\ EM$$

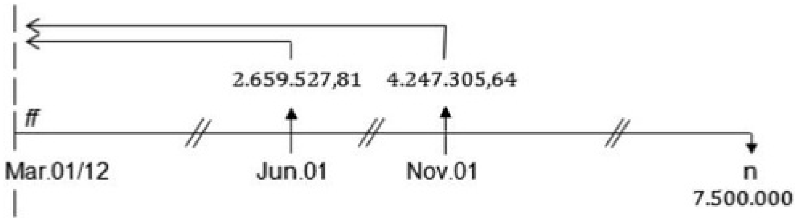
$F = 2.500.000(1 + 0{,}020833)12 = \$2.659.527{,}81$

$P = 3.500.000$

$$n = 8 \text{ meses} = \frac{8}{3} = 2{,}666666 \text{ trimestres}$$

$$j = 28\%\ ATA \Rightarrow \frac{0{,}28}{4} = 0{,}07\ ETA = \frac{0{,}07}{(1\ 0{,}07)} = 0{,}075268\ ET$$

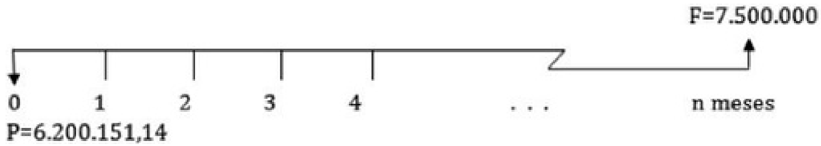
$F = 3.500.000(1 + 0{,}075268)2{,}666666 = \$4.247.305{,}64$



Calculamos valor presente a la tasa de refinanciación:

$$P = 2.659.527,81(1+0,24)^{-\left(\frac{3}{12}\right)} + 4.247.305,64(1+0,24)^{-\left(\frac{8}{12}\right)}$$

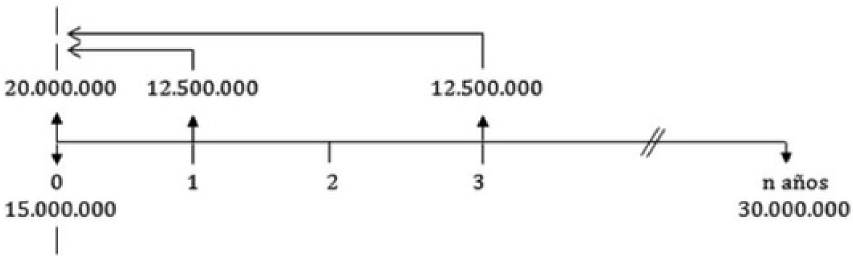
$P = 6.200.151,14$



Calculamos el tiempo:

$$n=\frac{\text{Log}\left(\frac{7.500.000}{6.200.151,14}\right)}{\text{Log}(1+0,24)} = 0,8847944 \text{ años } (12) = 10,61 \text{ meses}$$

27. Para adquirir una máquina, su empresa recibe una propuesta que exige $20.000.000 de cuota inicial y dos cuotas de $12.500.000 al final de los años 1 y 3. El proveedor acepta cambiar la forma de pago por 15 millones hoy (fecha de entrega de la máquina) y un pago de 30 millones en una fecha futura. Usted debe determinar esa fecha suponiendo una tasa de interés del 31% *ATV*.



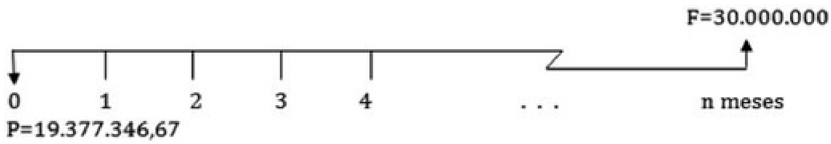
La gráfica nos muestra un acuerdo de pago para la adquisición de una máquina, y se pregunta la fecha del pago final. Para resolver el ejercicio debemos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser la fecha de entrega del activo, y traer a valor presente los valores de la pro- puesta. No olvidar expresar el tiempo en las mismas referencias de la tasa y res tarla del primer pago, para finalmente calcular el tiempo de realización del últi mo pago. Entonces:

$$j = 31\%\ ATV \Rightarrow \frac{0{,}31}{4} = 0{,}0775\ ET$$

Calculamos el valor presente:

$$P = 5.000.000 + 12.500.000(1 + 0{,}0775)^{-4} + 12.500.000(1 + 0{,}0775)^{-12}$$

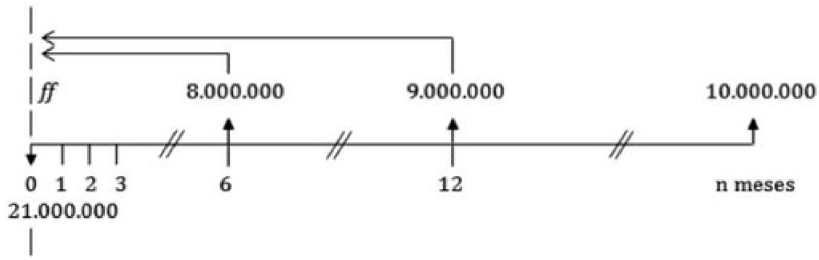
$$P = 19.377.346{,}67$$



Calculamos la fecha del último pago:

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{30.000.000}{19.377.346{,}67}\right)}{\mathrm{Log}(1\ 0{,}0775)} = 5{,}855733 \text{ trimestres } (3) = 17{,}5672 \text{ meses} = 1{,}5 \text{ años}$$

28. Un auto vale 30 millones de contado, pero se puede adquirir financiado con una ta sa de interés del 27% *ATA* mediante el siguiente plan: 30% de cuota inicial, cuo tas de 8 y 9 millones, respectivamente, al final de los meses 6 y 12, y una cuo ta más de 10 millones en una fecha que debe encontrarse. Determinar esa fecha.



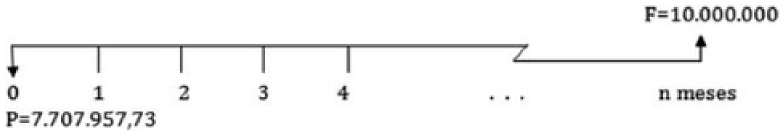
La gráfica nos muestra un acuerdo de pago para la adquisición de un vehículo, y se pregunta la fecha del pago de la última cuota. Para resolver el ejercicio debe mos primero señalar una fecha focal, que para efectos de simplificación de cálculos debe ser la fecha de entrega del activo, y traer a valor presente los valores de las cuotas propuestas. No olvidar expresar el tiempo en las mismas referencias de la tasa y restarla del primer pago, para finalmente calcular el tiem po de realización de la última cuota. Entonces:

$$j = 27\%\ ATA \Rightarrow \frac{0{,}27}{4} = 0{,}0675\ ETA \Rightarrow \frac{0{,}0675}{(1\ 0{,}0675)} = 0{,}0723860\ ET$$

Calculamos el valor presente:

$$P = 21.000.000 - 8.000.000(1+0,0723860)^{-\frac{6}{3}} - 9.000.000(1+0,0723860)^{-\frac{12}{3}}$$

$P = 7.707.957,73$



Calculamos la fecha de la última cuota:

$$n = \frac{\text{Log}\left(\frac{10.000.000}{7.709.957,73}\right)}{\text{Log}(1+0,0723860)} = 3,725086 \text{ trimestres } (3) = 11,17 \text{ meses} = 1 \text{ año}$$

UNIDAD 3

ANUALIDADES

Ejercicios propuestos

1. ¿Cuánto debe depositarse al final de cada trimestre, en un fondo de inversiones que abona el 30% *AMV*, para acumular $5.000.000 al cabo de 5 años?

2. Cándido Alzate compró una casa cuyo valor es de $60.000.000. Pagó $20.000.000 como cuota inicial y quiere cancelar el saldo mediante pagos mensuales iguales vencidos durante 15 años. Con un interés del 36% *AMV*, halle los pagos mensuales.

3. Una máquina que vale $4.000.000 de contado se vende a plazos, con una cuota inicial de $300.000 y el saldo a 18 cuotas mensuales cargando el 36% *AMV* de interés. Calcular el valor de la cuota. Una serie de 12 pagos bimestrales anticipados de

4. $100.000 cada uno se debe cambiar por una serie equivalente de 24 pagos mensuales vencidos, de modo que el primer pago mensual se efectúe un mes después de cuando debía cance larse el último pago bimensual. Determine el valor de cada pago mensual asu miendo una tasa de interés del 22% *ATV*. Una deuda de $2.000.000 se debe cancelar

5. con cuotas mensuales de $200.000. Si la tasa de interés es del 36% *ATV*, calcular el número de cuotas. Un equipo se adquiere financiado pagando una cuota inicial de $300.000 y 24

6. pagos mensuales vencidos de $100.000. Suponiendo una tasa de interés del 28% CM, determine el valor del equipo si se adquiere de contado. La compañía ABC compra equipos por $*X* y el mismo día de la compra crea un

7. fondo de reposición, en el cual depositará cuotas trimestrales anticipadas de $700.000 para reponer los equipos al término de la vida útil, que son 10 años. Si

el fondo gana un interés del 26% anual, y considerando que en el mercado los equipos aumentan de precio 14% anual, determine el valor *X* de los equipos.

8. Se consigna, a principios de cada mes, $600.000 en una cuenta de ahorros con interés del 30% *AMV*. Calcular el tiempo necesario para completar $12.831.809 un mes después de hacer la última consignación.

9. El día 1 de marzo de 2003 se firma un pagaré por un crédito de 20 millones para estudios en el exterior. Este crédito debe cancelarse en 60 cuotas mensuales a una tasa de financiación del 1% mensual, pagando la primera el día 1 de agosto de 2008. Determine el valor de la cuota mensual.

10. Los exalumnos de una universidad donan un laboratorio y los fondos para su mantenimiento futuro. Si el costo inicial de los equipos es de $20.000.000 y el mantenimiento se estima en $3.500.000 anuales, hallar el valor de la donación si la tasa efectiva de interés es del 27% anual.

11. Para mantener en buen estado las carreteras, la junta vecinal decide establecer un fondo, con un único valor, para proveer reparaciones futuras, que se estiman en $30.000.000 cada cinco años. Hallar el valor del fondo, con una tasa efectiva del 26% anual.

12. Un empleado consigna $30.000 al principio de cada mes en una cuenta de ahorros que paga el 25% convertible mensualmente. ¿En cuánto tiempo y con qué pago final logrará completar $3.000.000?

13. ¿A qué tasa nominal convertible mensualmente 25 depósitos trimestrales de $500.000 por trimestre anticipado darán un monto de $20.000.000 tres meses después de efectuado el último pago?

14. Una persona deposita $50.000 cada principio de mes en un banco que abona el 28%, convertible semestralmente. Calcular el acumulado de los depósitos al cabo de 10 años.

15. Se conviene pagar un crédito con cuotas de $400.000, al comienzo de cada trimestre, durante ocho años. Hallar el valor del crédito suponiendo una tasa del 34% *ATV* y sabiendo que la deuda se adquirió 5 meses antes de efectuar el primer pago.

16. Hallar el valor presente de una anualidad perpetua de $156.000 por mes vencido, suponiendo un interés de:

    a. 6% efectivo trimestral.

    b. 26% convertible semestralmente.

    c. 26% convertible mensualmente.

17. Una persona recibe tres ofertas para la compra de su propiedad: a. \$20.000.000 de contado; b. \$19.000.000 de contado y \$500.000 semestral durante 2,5 años; c. \$2.000.000 por trimestre anticipado durante tres años y un pago de \$12.500.000 al finalizar el cuarto año. ¿Qué oferta debe preferir si la tasa de interés es del 38% efectivo anual? Justifique su respuesta.

18. Una persona deposita hoy \$1.000.000 en una cuenta de ahorros que abona el 28% *AMV* de interés. Transcurridos exactamente 8 meses, hace un depósito de *X* pesos y decide seguir haciendo depósitos de *X* pesos, cada final de trimestre, de modo que transcurridos 5 años, contados a partir del primer depósito trimestral, tenga \$6.000.000 en el momento de efectuar el último depósito. Hallar el valor de los depósitos trimestrales.

19. Calcular el valor de contado de un equipo médico que se vende a dos años de plazo, con el 29% de interés convertible trimestralmente, pagos trimestrales anticipados de \$380.000 y un último pago de \$190.000, a los dos años tres meses.

20. Un comerciante vende máquinas de tejer a \$12.500.000, precio de contado. Para promover sus ventas, decide venderlas en 18 cuotas mensuales con 2% efectivo mensual de interés. ¿Cuál es el valor de las mensualidades?

21. Hallar el precio de contado de una propiedad comprada con el siguiente plan: una cuota inicial de \$30.000.000; 6 pagos trimestrales de \$10.000.000, debiendo efectuar el primer pago dentro de un año, y un pago final de \$25.000.000, 6 meses después de pagada la última cuota trimestral. Suponga un interés del 32% convertible trimestralmente.

22. Una casa que vale 50 millones de contado se adquirió financiada con una tasa de interés del 26% efectivo anual, pagando el 20% de cuota inicial. Se acuerda cancelar el saldo en 15 años mediante cuotas mensuales vencidas y cuotas extras de 4 millones al final de cada año. Al pagar la cuota (ordinaria y extraordinaria) correspondiente al mes 96, de común acuerdo con el banco, el deudor decide pagar el saldo en 16 cuotas trimestrales vencidas. Determinar el valor de la cuota trimestral.

23. Para cancelar una matrícula de doctorado se recibe un crédito de \$20.000.000, con una tasa de interés del 28% *ATA* y con el compromiso de pagarlo en 36 cuotas mensuales vencidas, pagando la primera exactamente a los 48 meses de firmado el pagaré y recibido el dinero. Además, se deben pagar cuotas extras de 2,5, 3,5 y 4 millones respectivamente, simultáneas con las cuotas 11, 23 y 31. Determine el valor de la cuota mensual.

24. Un crédito se debe cancelar en 30 cuotas mensuales de \$1.300.000, pagando la primera exactamente a los 8 meses de firmado el pagaré. Además, se acuerda el pago de 3 cuotas extras de 3, 5 y 7 millones, simultáneas con las cuotas ordi-

na rias 15, 25 y 30, respectivamente. Suponiendo una tasa de interés del 29,5% efectivo anual, determine el valor del crédito.

25. Una compañía adquiere unos yacimientos de mineral. Los estudios de ingenie ría muestran que los trabajos preparatorios y las vías de acceso demorarán seis años, y la producción empieza en el año 7 con una ganancia anual de $240.000.000. Suponiendo que la tasa comercial de interés es del 18% efectivo anual y que los yacimientos se agotarán después de 15 años continuos de explotación, hállese el monto de las ganancias que se espera obtener en pesos de hoy.

26. ¿Con cuánto se puede comprar una renta de $1.000.000 trimestrales, pagadera durante 15 años, mediante un pago único dentro de 12 años, si la tasa de interés es del 26%, capitalizable trimestralmente?

27. Se deposita $1.000.000 en un banco para que, inmediatamente después de 10 años, se le empiecen a retirar $2.000.000, a principio de cada mes. ¿Cuántos reti ros pueden efectuarse si el banco abona el 26% *AMV*?

28. Hallar el precio de contado de una propiedad comprada con el siguiente plan: una cuota inicial de $30.000.000; 6 pagos trimestrales de $10.000.000, debiendo efectuar el primer pago dentro de un año, y un pago final de $25.000.000, 6 meses después de pagada la última cuota trimestral. Suponga un interés del 32% *AMV*.

29. Una deuda aceptada al 28% *AMV* debe cancelarse con 8 cuotas semestrales de $20.000.000 cada una, pagando la primera cuota dos años después de aceptar la deuda. Se quiere sustituir por una obligación equivalente pagadera con 24 cuotas trimestrales, pagando la primera cuota de inmediato. Determine el valor de las cuotas trimestrales.

30. Se quiere comprar una casa que cuesta $80.000.000 con un plazo de 12 años, dando una cuota inicial del 29% y el saldo mediante cuotas mensuales vencidas. Si al pagar la cuota 51 se decide que el saldo restante se cancelará mediante cuotas trimestrales vencidas, determine el valor de las cuotas mensuales y trimestrales, suponiendo una tasa de interés de 35% *ATV*.

31. El 1 de enero un papá deposita $5.000.000 en una cuenta que reconoce un interés de 25% efectivo anual para que su hijo haga retiros mensuales iguales desde el 1 de febrero hasta el 1 de noviembre del mismo año. Determine el valor de los retiros.

32. Una máquina que se vende de contado en $8.000.000 se ofrece en un plan de ventas por mensualidades, sin cuota inicial. Hallar el número de cuotas necesarias de $800.0000 para cancelar la máquina, si se cobra el 8% de interés efectivo trimestral.

33. ¿En qué forma se reúnen más rápidamente $10.000.000? a. Depositando $650.000 cada dos meses en un banco que abona el 28%, con capitalización semestral; b. Depositando $320.000 al principio de cada mes, en el mismo banco.

34. Una propiedad cuyo valor es $50.000.000 se vende con una cuota inicial de $15.000.000 y el saldo en cuotas mensuales a 15 años plazos, con un interés del 36% *AMV*. Hallar el valor de las cuotas mensuales y el saldo al finalizar el cuarto año.

35. Una deuda de $5.000.000 con interés del 36% capitalizable trimestralmente debe amortizarse con cuatro pagos trimestrales iguales consecutivos, debiendo efectuarse el primer pago dentro de dos años. Hallar el valor de los pagos.

36. Usted tiene la oportunidad de tomar en arriendo un restaurante durante 1 año y le garantizan que podrá vender exactamente 6.000 almuerzos mensuales a $1.600 cada uno, pero le pagarán en un solo contado al final del año y sin intereses. Suponga que el costo de los insumos de cada almuerzo será de $500, los cuales deberán ser adquiridos y pagados al principio de cada mes. El costo mensual de mano de obra se considera estable en $850.000 y, además, se requerirá de una inversión inicial de $5.000.000 para la adecuación del restaurante. Suponiendo un interés mensual del 3%, calcular cuál será el valor de la ganancia o pérdida: a. En pesos de hoy (comienzo año); b. En pesos futuros (final de año).

37. El día de su matrimonio, una pareja hace los siguientes planes: el sexto aniversario lo celebrarán con un viaje que pagarán mediante 8 cuotas semestrales de igual valor, pagando la primera cuota el mismo día del viaje, que será exactamente 6,5 años después de la boda. La cuota semestral para viajes similares vale hoy 3 millones y se incrementa 4,5% cada semestre. La pareja se propone ahorrar cuotas semestrales iguales, una al final de cada uno de los 10 semestres siguientes a la boda, con el fin de acumular lo necesario para pagar el viaje. Los ahorros los efectúan en una entidad que ofrece un rendimiento del 11,5% *EA*, tasa que se supone constante durante todo el tiempo. Determine el valor del depósito semestral.

38. Una línea de crédito del Icetex, especial para estudios de posgrado, consiste en un crédito de 30 millones que el estudiante debe pagar en 30 cuotas mensuales pero con la condición de que cada una de las 15 últimas sea igual al doble de cada una de las 15 primeras, es decir, que a partir de la 16, el valor de la cuota se duplica. Además, se exige el pago de 2 cuotas extras de 3 y 5 millones, simultáneas con las cuotas ordinarias 15 y 25 respectivamente. Suponiendo una tasa de interés del 29,5% efectivo anual, determine el valor de las cuotas mensuales.

Ejercicios resueltos

Para desarrollar los ejercicios propuestos de anualidades en el presente texto, utilizaremos las siguientes fórmulas de matemáticas financieras con su correspondiente nomenclatura. Es importante resaltar que para usar las fórmulas es necesario expresar el tiempo y la tasa de interés efectivo en el mismo período de la anualidad:

P = Valor presente de una anualidad.

F = Valor futuro de una anualidad.

R = Cuota de la anualidad.

i = Tasa de interés efectiva.

n = Número de períodos o cuotas de la anualidad.

- Fórmulas de anualidades vencidas

$$P = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$ Valor presente

$$F = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$ Valor futuro

$$R = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$ Cuota de la anualidad conociendo (P)

$$R = F\left[\frac{i}{(1+i)^{n}-1}\right]$$ Cuota de la anualidad conociendo (F)

$$n = \frac{-\mathrm{Log}\left(1-\frac{Pi}{R}\right)}{\mathrm{Log}(1+i)}$$ Número de pagos conociendo (P)

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left(1+\frac{Fi}{R}\right)}{\mathrm{Log}(1+i)}$$ Número de pagos conociendo (F)

- Fórmulas de anualidades anticipadas

$$P = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i) \qquad \text{Valor presente}$$

$$F = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i) \qquad \text{Valor futuro}$$

$$R = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]\frac{1}{(1+i)} \qquad \text{Cuota de la anualidad conociendo } (P)$$

$$R = F\left[\frac{i}{(1+i)^{n}-1}\right]\frac{1}{(1+i)} \qquad \text{Cuota de la anualidad conociendo } (F)$$

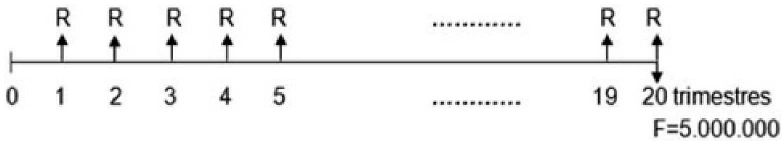
$$n = -\frac{\mathrm{Log}\left[1-\dfrac{Pi}{R(1+i)}\right]}{\mathrm{Log}(1+i)} \qquad \text{Número de pagos conociendo } (P)$$

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left[1+\dfrac{Fi}{R(1+i)}\right]}{\mathrm{Log}(1+i)} \qquad \text{Número de pagos conociendo } (F)$$

- Fórmula de anualidad perpetua

$P = \dfrac{R}{i}$ Valor presente

1. ¿Cuánto debe depositarse al final de cada trimestre en un fondo de inversiones que abona el 30% *AMV* para acumular $5.000.000 al cabo de 5 años?



La gráfica nos muestra los depósitos trimestrales que deben hacerse en un fondo de inversiones con el propósito de acumular al final del tiempo un va lor futuro, y se pregunta el valor de cada depósito. Para resolver el ejercicio debemos primero convertir tanto el tiempo como la tasa de interés al período de la anualidad y finalmente hacer uso de la fórmula de anualidad conociendo valor futuro. Entonces:

R = ? trimestrales

F = 5.000.000

j = 30% AMV

n = 5 años

$$30\%\ AMV = \frac{0,30}{12} = 0,025\ EM \Rightarrow (1+0,025)^{\left(\frac{12}{4}\right)} - 1 = 0,0768906\ ET$$

5 años = 20 trimestres

$$R = 5.000.000\left[\frac{0,0768906}{(1+0,0768906)^{20} - 1}\right] = \$113.081,44 \text{ trimestrales}$$

2. Cándido Alzate compró una casa cuyo valor es de \$60.000.000. Pagó \$20.000.000 como cuota inicial y quiere cancelar el saldo mediante pagos mensuales iguales vencidos durante 15 años. Con una tasa de interés del 36% *AMV*, halle el valor de los pagos mensuales.

La gráfica nos muestra la financiación de un crédito de vivienda para ser cancelado en cuotas fijas mensuales, y se pregunta el valor de cada cuota habiendo realizado un depósito inicial. Para resolver el ejercicio debemos primero convertir tanto el tiempo como la tasa de interés al período de la anualidad y finalmente hacer uso de la fórmula de anualidad conociendo valor presente. Entonces:

R = ? mensuales

P = 60.000.000 – 20.000.000 = 40.000.000

j = 36% AMV

n = 15 años

$$36\%\ AMV = \frac{0,36}{12} = 0,03\ EM$$

15 años = 180 meses

$$R = 40.000.000\left[\frac{0,03}{1-(1+0,03)^{-180}}\right] = \$1.205.896,71 \text{ mensuales}$$

3. Una máquina que vale $4.000.000 de contado se vende a plazos, con una cuota inicial de $300.000 y el saldo a 18 cuotas mensuales cargando el 36% *AMV* de interés. Calcular el valor de la cuota.

La gráfica nos muestra la financiación para la compra de una máquina para ser cancelada en cuotas fijas mensuales, y se pregunta el valor de cada cuota habiendo realizado un depósito inicial. Para resolver el ejercicio debemos primero convertir la tasa de interés que se encuentra nominal mensual vencida a efectiva mensual vencida, o sea, al período de la anualidad, y finalmente hacer uso de la fórmula de anualidad conociendo valor presente. Entonces:

R = ? mensuales

$P = 4.000.000 - 300.000 = 3.700.000$

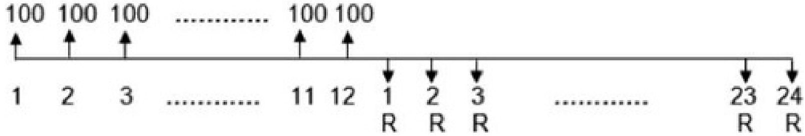
j = 36% *AMV*

n = 18 meses

$36\%\ AMV = \frac{0,36}{12} = 0,03\ EM$

$$R = 3.700.000 \left[\frac{0,03}{1-(1+0,03)^{-18}} \right] = \$269.022,17 \text{ mensuales}$$

4. Una serie de 12 pagos bimestrales anticipados de $100.000 cada uno se debe cambiar por una serie equivalente de 24 pagos mensuales vencidos, de modo que el primer pago mensual se efectúe un mes después de cuando debía cancelarse el último pago bimensual. Determine el valor de cada pago mensual asumiendo una tasa de interés del 22% *ATV*.



La gráfica nos muestra una serie de pagos bimestrales anticipados que se solicita cambiar por unos pagos equivalentes pero mensuales vencidos. Para resolver el ejercicio debemos primero convertir tanto el tiempo como la tasa de interés al período de cada anualidad, hacer uso de la fórmula de valor futuro de una anualidad vencida para hallar el resultado de un período antes y tomar ese valor como valor presente para calcular la nueva anualidad vencida. Entonces:

$F = ?$

R = 100.000 bimestrales

$j = 22\%\ ATV$

n = 12 bimestres

$$22\%\ ATV = \frac{0{,}22}{4} = 0{,}055\ ET \Rightarrow (1+0{,}055)^{\frac{4}{6}} - 1 = 0{,}0363385\ EB$$

$$F = 100.000\left[\frac{(1+0{,}0363385)^{12} - 1}{0{,}0363385}\right] = \$1.471.404{,}32$$

R = ? mensuales

P = 1.471.404,32

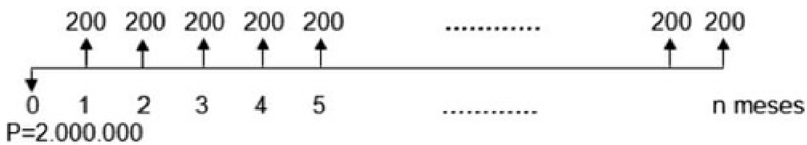
$j = 22\%\ ATV$

n = 24 meses

$$22\%ATV = \frac{0{,}22}{4} = 0{,}055\ ET \Rightarrow (1+0{,}055)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0{,}0180071\ EM$$

R = 1.471.404,32 = \$76.049,58 mensuales

5. Una deuda de \$2.000.000 se debe cancelar con cuotas mensuales de \$200.000. Si la tasa de interés es del 36% *ATV*, calcular el número de cuotas.



La gráfica nos muestra las cuotas fijas mensuales vencidas de una deuda, y se pregunta el número de cuotas por cancelar. Para resolver el ejercicio debemos primero convertir la tasa de interés, que se encuentra nominal trimestral vencida, a efectiva mensual vencida, o sea, al período de la anualidad, y finalmente hacer uso de la fórmula del tiempo conociendo valor presente. Entonces:

R = 200.000 mensuales

P = 2.000.000

j = 36% ATV

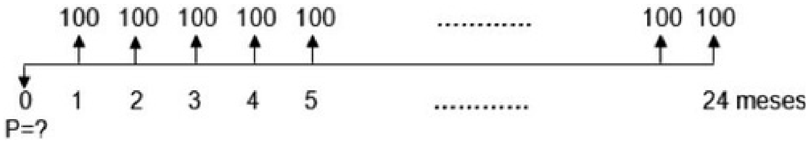
n = ? meses

$$36\%\ ATV = \frac{0{,}36}{4} = 0{,}09\ ET \Rightarrow (1+0{,}09)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0{,}0291424\ EM$$

$$n = -\frac{\operatorname{Log}\left[1 - \dfrac{2.000.000(0{,}0291424)}{200.000}\right]}{\operatorname{Log}(1+0{,}0291424)} = 11{,}99 \text{ meses}$$

$\approx$ 12 cuotas mensuales

6. Un equipo se adquiere financiado pagando una cuota inicial de \$300.000 y 24 pagos mensuales vencidos de \$100.000. Suponiendo una tasa de interés del 28% CM, determine el valor del equipo si se adquiere de contado.



La gráfica nos muestra la financiación para la compra de un equipo para ser can celado en cuotas fijas mensuales, y se pregunta el valor de contado del ac- tivo te nien do en cuenta la cuota inicial. Para resolver el ejercicio debemos pri- mero convertir la tasa de interés, que se encuentra nominal mensual vencida, a efec ti va mensual vencida, o sea, al período de la anualidad, y finalmente hacer uso de la fórmula de valor presente, teniendo en cuenta que se debe sumar al resultado la cuota inicial. Entonces:

R = 100.000 mensuales

P = ?

j = 28% CM

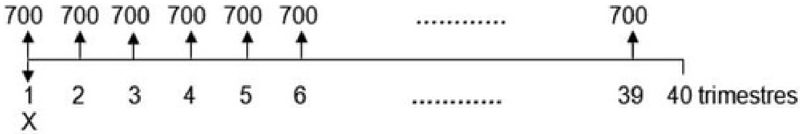
n = 24 meses

$$28\%\ CM = \frac{0{,}28}{12} = 0{,}0233333\ EM$$

$$P = 100.000\left[\frac{1-(1+0{,}023333)^{-24}}{0{,}023333}\right] = 1.821.875{,}34 + 300.000$$

P = \$2.121.875,34

7. La compañía ABC compra equipos por $*X* y el mismo día de la compra crea un fondo de reposición, en el cual depositará cuotas trimestrales anticipadas de $700.000 para reponer los equipos al término de la vida útil, que son 10 años. Si el fondo gana un interés del 26% anual, y considerando que en el mercado los equipos aumentan de precio 14% anual, determine el valor *X* de los equipos.



La gráfica nos muestra unos depósitos trimestrales anticipados creando un fon do para la compra de equipos, que se solicita reponer al final de su vida útil a precios de mercado. Para resolver el ejercicio debemos primero convertir la tasa de interés al período de la anualidad, hacer uso de la fórmula de valor futuro de una anualidad anticipada con la tasa de rendimiento del fondo, tomar ese valor como valor futuro y traerlo a valor presente a la tasa de mercado. Entonces:

$F = ?$

$R = 700.000$ trimestrales

$i = 26\%\ EA$

$n = 10$ años

$$26\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}26)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}0594797\ ET$$

10 años = 40 trimestres

$$F = 700.000\left[\frac{(1+0{,}0594797)^{40}-1}{0{,}0594797}\right](1+0{,}0594797)$$

$F = \$113.286.902{,}88$

Calculamos el valor de los equipos a precios de hoy:

$F = 113.286.902{,}88$

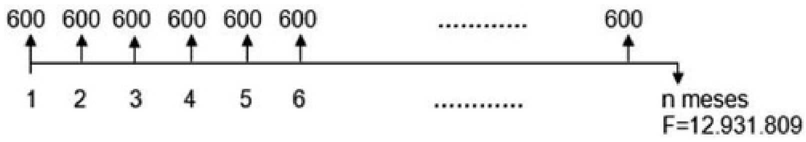
$i = 14\%\ EA$

$n = 10$ años

$P = ?$

$P = 113.286.902{,}88(1+0{,}14)^{-10} = \$30.558.440{,}75$

8. Se consigna, a principios de cada mes, \$600.000 en una cuenta de ahorros con interés del 30% *AMV*. Calcular el tiempo necesario para completar \$12.831.809 un mes después de hacer la última consignación.



La gráfica nos muestra el valor de los depósitos mensuales anticipados fijos en una cuenta de ahorros con el ánimo de acumular al final del tiempo un valor futuro, y se pregunta el número de los depósitos por realizar. Para resolver el ejer cicio debemos primero convertir la tasa de interés, que se encuentra nomi nal mensual vencida, a efectiva mensual vencida, y finalmente hacer uso de la fórmula del tiem po conociendo valor futuro de una anualidad anticipada. Enton ces:

$F = 12.931.809$

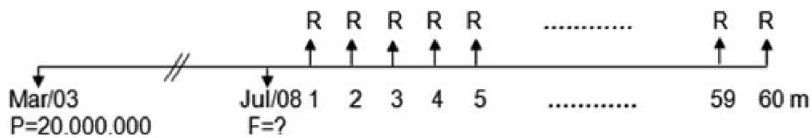
$R = 600.000$ mensuales anticipados

$j = 30\%\ AMV \Rightarrow \frac{0,30}{12} = 0,025\ EM$

$n = ?$

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left[1\ \ \frac{12.616.399,02(0,025)}{600.000(1\ \ 0,025)}\right]}{\mathrm{Log}(1\ \ 0,025)} = 17 \text{ meses}$$

9. El día 1 de marzo de 2003 se firma un pagaré por un crédito de 20 millones para estudios en el exterior. Este crédito debe cancelarse en 60 cuotas mensuales a una tasa de financiación del 1% mensual, pagando la primera el día 1 de agosto de 2008. Determine el valor de la cuota mensual.



La gráfica nos muestra la forma de financiación de un crédito educativo en el que, después de un período de gracia, se debe empezar a cancelar la obligación. Se pregunta el valor de la cuota mensual que se va a cancelar (anualidad diferida). Pa ra resolver el ejercicio, y como hay período de gracia de pago de intereses, de be mos primero calcular el valor futuro de la suma inicial a un mes antes de em pezar a cancelar la deuda para resolverlo como una anualidad vencida y fi nal- men te hacer uso de la fórmula de anualidad conociendo valor presente. Enton ces:

$P = 20.000.000$

$i = 1\%\ EM$

$n = 5$ años 4 meses = 64 meses

$F = 20.000.000(1 + 0,01)^{64} = \$37.809.237,39$

Calculamos el valor de la cuota:

$R = ?$ mensuales

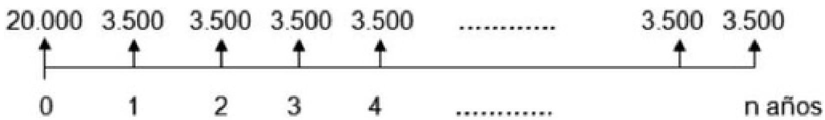
$P = 37.809.237,39$

$i = 1\%\ EM$

$n = 60$ meses

$$R = 37.809.237,39\left[\frac{0,01}{1-(1+0,01)^{-60}}\right] = \$841.045,60 \text{ mensuales}$$

10. Los exalumnos de una Universidad donan un laboratorio y los fondos para su mantenimiento futuro. Si el costo inicial de los equipos es de $20.000.000 y el mantenimiento se estima en $3.500.000 anuales, hallar el valor de la donación si la tasa efectiva de interés es del 27% anual.



La gráfica nos muestra la donación de un laboratorio y su correspondiente man - te nimiento por parte de exalumnos de una universidad, y se pregunta el valor total de la donación. Cabe aclarar que una anualidad que tiene infinito número de pagos se denomina anualidad infinita o perpetua. En realidad, las anuali- dades infinitas no existen, porque en este mundo todo tiene fin, pero su pon- dremos que una anualidad es infinita cuando el número de pagos es muy grande o cuando no se sabe cuántos pagos son pero se sospecha que son muchos. Para resolver el ejercicio calculamos el valor presente de la anualidad perpetua y le sumamos el costo inicial de los equipos. Entonces:

$R = 3.500.000$

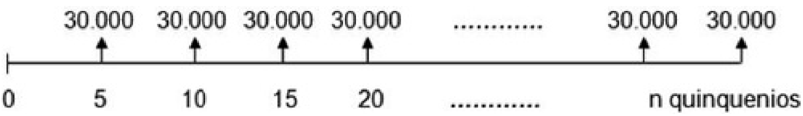
$i = 27\%\ EA$

$$P = \frac{R}{i} \Rightarrow P = \frac{3.500.000}{0,27} = 12.962.962,96$$

Calculamos el valor total de la donación:

$$P = 12.962.962,96 + 20.000.000 = 32.962.962,96$$

11. Para mantener en buen estado las carreteras, la junta vecinal decide establecer un fondo, con un único valor, para proveer reparaciones futuras, que se estiman en $30.000.000 cada cinco años. Hallar el valor del fondo, con una tasa efectiva del 26% anual.



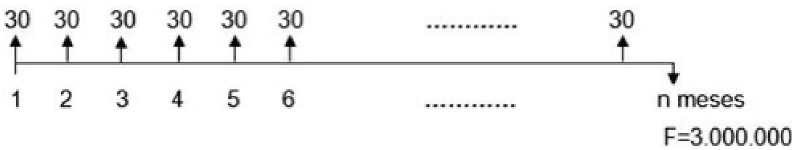
La gráfica nos muestra el costo de reparación en el tiempo de una carretera, y se pregunta el valor del fondo a la fecha para proveer esas reparaciones futuras. Para resolver el ejercicio, debemos primero convertir la tasa, que se encuentra efectiva anual, y pasarla a efectiva quinquenal, que es el período de la anualidad, para finalmente calcular el valor presente de la anualidad perpetua. Entonces:

$R = 30.000.000$

$i = 26\% \ EA \Rightarrow (1+0,26)^{5}-1 = 217,5797\%$ efectiva quinquenal

$P = \dfrac{R}{i} \Rightarrow P = \dfrac{30.000.000}{2,175797} = 13.788.051,39$

12. Un empleado consigna $30.000 al principio de cada mes en una cuenta de ahorros que paga el 25% convertible mensualmente. ¿En cuánto tiempo y con qué pago final logrará completar $3.000.000?



La gráfica nos muestra el valor de los depósitos mensuales anticipados fijos en una cuenta de ahorros con el ánimo de acumular al final del tiempo un valor futuro, y se pregunta el número de los depósitos por realizar y el abono final pa- ra completar exactamente el valor deseado. Para resolver el ejercicio debemos calcular el tiempo de una anualidad anticipada conociendo valor futuro, te- nien do en cuenta que se debe convertir la tasa de interés, que se encuentra no- mi nal mensual vencida, a efectiva mensual vencida, y finalmente establecer la di ferencia para completar el valor exacto deseado. Entonces:

$F = 3.000.000$

$R = 30.000$ mensuales anticipados

$j = 25\%\ CM \Rightarrow \frac{0,25}{12} = 0,020833\ EM$

$n = ?$ meses

$$n = \frac{\text{Log}\left[1 + \frac{3.000.000(0,020833)}{30.000(1+0,020833)}\right]}{\text{Log}(1+0,020833)} = 53,9362 \text{ meses}$$

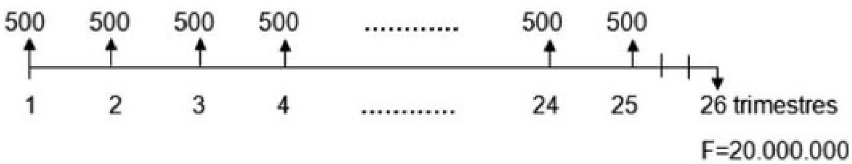
Calculamos el valor futuro para poder establecer el valor para completar el aho - rro deseado:

$$F = 30.000\left[\frac{(1+0,020833)^{53} - 1}{0,020833}\right](1 + 0,020833) = \$2.914.539,58$$

Valor final para completar el pago:

$$X = 30.000.000 - 2.914.539,58 = \$85.460,41$$

13. ¿A qué tasa nominal convertible mensualmente 25 depósitos trimestrales de $500.000 por trimestre anticipado darán un monto de $20.000.000 tres meses después de efectuado el último pago?



La gráfica nos muestra el valor de los pagos trimestrales anticipados fijos reali zados con el ánimo de acumular al final del tiempo un monto o valor futuro, y se pregunta la tasa de interés un período después de efectuar el último pago. Para resolver el ejercicio debemos plantear una ecuación de valor teniendo en cuenta que es una anualidad anticipada, calcular la tasa de interés por el méto do de ensayo y error combinando con una interpolación, para finalmente con vertirla a la referencia que solicita el ejercicio (puesto que los depósitos son trimestrales, inicialmente se halla la tasa trimestral y luego se hace la conversión correspondiente). Entonces:

$F = 20.000.000$

$R = 500.000$ trimestrales anticipados

$n = 25$ trimestres

$j = ?\ NMV$

Planteamos la ecuación de valor con la fórmula de valor futuro de una anualidad anticipada:

$$500.000\left[\frac{(1+i)^{25}-1}{i}\right](1+i)-20.000.000=0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combinado con una interpolación. El método consiste en escoger una tasa i_1 y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otra tasa i_2 y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con $i_1 = 3\%$ *EM*; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$$500.000\left[\frac{(1+0,03)^{25}-1}{0,03}\right](1+0,03)-20.000.000=584.340,32$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con otra tasa $i_2 = 4\%$ *EM*, y la ecuación con su resultado será:

$$500.000\left[\frac{(1+0,04)^{25}-1}{0,04}\right](1+0,04)-20.000.000=-621.145,52$$

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

V/r tasa		**V/r función**
0,03	$\rightarrow$	584.340,32
i	$\rightarrow$	0
0,04	$\rightarrow$	−621.145,52

Ahora planteamos una proporción teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{i-0,03}{0,04-0,03}=\frac{0-584.340,2}{-621.145,52-584.340,32}$$

Al despejar i en la ecuación anterior tenemos la rentabilidad total:

$$i = 3,484734\%\ ET$$

Observación: la interpolación produce un error que será despreciable siempre y cuando el intervalo que se toma para interpolar no sea muy grande. La respuesta exacta con seis decimales es:

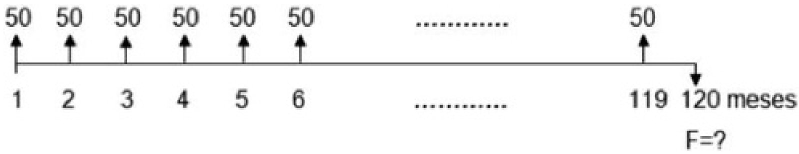
$$i = 3{,}445317\%\ ET$$

Convertimos la tasa a nominal pagadera mes vencida:

$i = 3{,}445317\%ET \Rightarrow (1+0{,}0345317)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0{,}011354\ EM$

$j = 0{,}011354\ EM\ (12) = 13{,}62\%\ NM$

14. Una persona deposita $50.000 cada principio de mes en un banco que abona el 28%, convertible semestralmente. Calcular el acumulado de los depósitos al ca bo de 10 años.



La gráfica nos muestra el valor de los depósitos mensuales anticipados fijos rea lizados en un banco, y se pregunta el valor acumulado de los depósitos al ca bo de un tiempo. Para resolver el ejercicio debemos primero convertir la ta sa de interés y el tiempo al período de los depósitos y finalmente calcular el va lor futuro teniendo en cuenta que se debe utilizar la fórmula de anualidades vencidas. Entonces:

$F = ?$

$R = 50.000$ mensuales anticipados

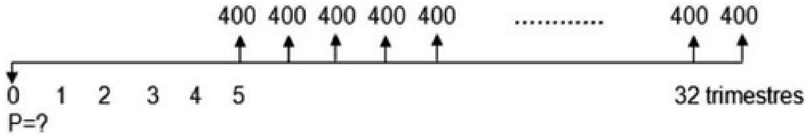
$n = 10$ años $= 120$ meses

$j = 28\%\ CS \Rightarrow \frac{0{,}28}{2} = 0{,}14\ ES \Rightarrow (1+0{,}14)^{\frac{2}{12}}$

Calculamos valor futuro de una anualidad anticipada:

$$F = 50.000\left[\frac{(1+0{,}0220782)^{120}-1}{0{,}0220782}\right](1+0{,}0220782) = \$29.497.016{,}58$$

15. Se conviene pagar un crédito con cuotas de $400.000, al comienzo de cada trimestre, durante ocho años. Hallar el valor del crédito suponiendo una tasa del 34% *ATV* y sabiendo que la deuda se adquirió 5 meses antes de efectuar el primer pago.



La gráfica nos muestra la forma de financiación de un crédito que después de un período de gracia (anualidad diferida) debe empezar a cancelar la obligación, y se pregunta el valor de la deuda adquirida. Para resolver el ejercicio, y como hay período muerto de pago de intereses, debemos primero calcular el valor presente de una anualidad anticipada teniendo en cuenta que se debe convertir la tasa a efectiva trimestral vencida, que es el período de la anualidad, y traer ese valor a valor presente para saber el valor del préstamo a precios de hoy, sin olvidar convertir el tiempo a las mismas referencias de la tasa de interés. Entonces:

R = 400.000 trimestrales anticipados

n = 8 años = 32 trimestres

$j = 34\%\ ATV = \frac{0,34}{4} = 0,085\ ET$

P = ?

$$R = 400.000\left[\frac{1-(1+0,085)^{-32}}{0,085}\right](1+0,085) = 4.730.633,66$$

Calculamos el valor presente:

P = ?

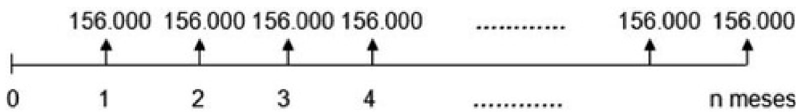
F = 4.730.633,66

$i = 8,5\%\ ET$

$n = 5 \text{ meses} = \frac{5}{3} = 1,666666$ trimestres

$P = 4.730.633,66(1+0,085)^{-1,666666} = \$4.129.236,47$

16. Hallar el valor presente de una anualidad perpetua de $156.000 por mes vencido, suponiendo un interés de: a. 6% efectivo trimestral; b. 26% convertible semestralmente; c. 26% convertible mensualmente.



La gráfica nos muestra una anualidad perpetua vencida, y se pregunta el valor presente de esa serie de pagos suponiendo diferentes tasas de interés.

Cabe aclarar que una anualidad que tiene infinito número de pagos se denomina anualidad infinita o perpetua. En realidad, las anualidades infinitas no existen, porque en este mundo todo tiene fin, pero supondremos que una anualidad es infinita cuando el número de pagos es muy grande o cuando no se sabe cuántos pagos son pero se sospecha que son muchos. Para resolver el ejercicio, debemos primero convertir las tasas de interés al período de la anualidad, y finalmente calcular el valor presente de la anualidad perpetua. Entonces: a. R = 156.000 mensuales perpetuos

$$i = 6\%\ ET \Rightarrow (1+0{,}06)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0{,}0196128\%\ EM$$

$$P = \frac{156.000}{0{,}0196128} = \$7.953.980{,}14$$

b. R = 156.000 mensuales perpetuos

$$j = 26\%CS \Rightarrow \frac{0{,}26}{2} = 0{,}13\ ES \Rightarrow (1+0{,}13)^{\frac{2}{12}} - 1 = 0{,}0205784\%\ ES$$

$$P = \frac{156.000}{0{,}0205784} = \$7.580.734{,}20$$

c. R = 156.000 mensuales perpetuos

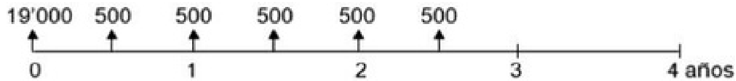
$$j = 26\%\ CM \Rightarrow \frac{0{,}26}{12} = 0{,}0216666\ EM$$

$$P = \frac{156.000}{0{,}0216666} = \$7.200.000$$

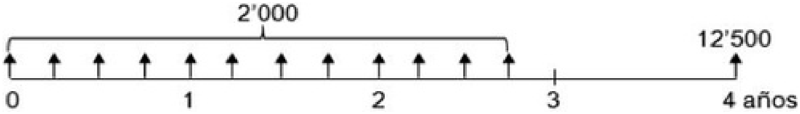
17. Una persona recibe tres ofertas para la compra de su propiedad: a. \$20.000.000 de contado; b. \$19.000.000 de contado y \$500.000 semestral durante 2,5 años; c) \$2.000.000 por trimestre anticipado durante tres años y un pago de \$12.500.000 al finalizar el cuarto año. ¿Qué oferta debe preferir si la tasa de interés es del 38% efectivo anual? Justifique su respuesta.

a.

b.



c.



Las gráficas muestran tres propuestas para la compra de una propiedad, y se trata de escoger la mejor, es decir, la que resulte mejor económicamente. Una forma de solucionar es hallar el valor presente de las propuestas a la tasa de interés de rendimiento y, obviamente, será mejor la alternativa que tenga mayor valor. Para realizar los respectivos cálculos, debemos primero convertir la tasa de interés a la referencia del período de las anualidades. Entonces:

a. $P = \$20.000.000$

b. $0{,}38\ EA \Rightarrow (1+0{,}38)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}174734\ ES$

$$P = 19.000.000 + 500.000\left[\frac{1-(1+0{,}174734)^{-5}}{0{,}174734}\right]$$

$P = \$20.582.420{,}57$

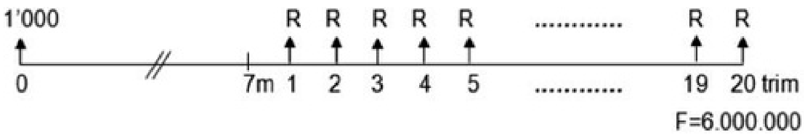
c. $0{,}38\ EA \Rightarrow (1+0{,}38)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}083851\ ET$

$$P = 2.000.000\left[\frac{1-(1+0{,}083851)^{-12}}{0{,}083851}\right](1+0{,}083851) + 12.500.000(1+0{,}38)^{-4}$$

$P = \$19.461.566{,}17$

Como se observa, el valor presente de b es el mayor de las tres propuestas y, por lo tanto, será la opción preferida.

18. Una persona deposita hoy \$1.000.000 en una cuenta de ahorros que abona el 28% *AMV* de interés. Transcurridos exactamente 8 meses, hace un depósito de *X* pesos y decide seguir haciendo depósitos de *X* pesos, cada final de trimestre, de modo que transcurridos 5 años, contados a partir del primer depósito trimestral, tenga \$6.000.000 en el momento de efectuar el último depósito. Hallar el valor de los depósitos trimestrales.



La gráfica nos muestra los diferentes depósitos que una persona realiza en una cuenta de ahorros con el objetivo de poder retirar un tiempo después una cantidad de dinero específica, y se pide hallar el valor de los depósitos fijos. La mejor manera para resolver el ejercicio es llevar el depósito inicial a valor futuro al final del último depósito trimestral, restarlo del valor futuro dado, tomar esa diferencia como valor futuro para calcular el valor de los depósitos solicitados, esto es, la anualidad. Cabe recordar que para realizar los cálculos debemos con vertir la tasa de interés de rendimiento dada, en las mismas referencias del tiempo y del período de la anualidad. Entonces:

$P = 1.000.000$

$j = 28\%\ AMV \Rightarrow \frac{0,28}{12} = 0,023333\ EM$

$n = 5$ años 8 meses $= 68$ meses

$F = 1.000.000(1 + 0,023333)^{68} = \$4.799.148,75$

Calculamos el valor futuro para la anualidad solicitada:

$$F = 6.000.000 - 4.799.148,75 = 1.200.851,25$$

Calculamos la anualidad o el valor de los depósitos solicitados:

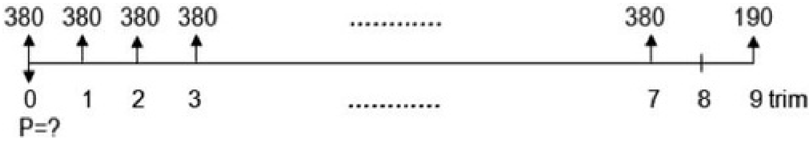
$F = 1.200.851,25$

$j = 28\%\ AMV \Rightarrow \frac{0,28}{12} = 0,023333\ EM \Rightarrow (1 + 0,023333)^{\frac{12}{4}} - 1 = 0,071646\ ET$

$n = 5$ años $= 20$ trimestres

$$R = 1.200.851,25\left[\frac{0,071646}{(1+0,071646)^{20} - 1}\right] = \$28.769,87 \text{ trimestrales}$$

19. Calcular el valor de contado de un equipo médico que se vende a dos años de plazo, con el 29% de interés convertible trimestralmente, pagos trimestrales anti ci pados de \$380.000 y un último pago de \$190.000, a los dos años tres meses.



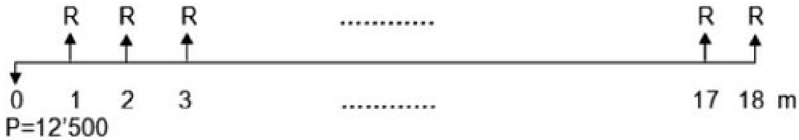
La gráfica nos muestra la forma de financiación de un equipo médico que se cancela mediante una anualidad anticipada y un último pago un tiempo des- pués, y se solicita el valor de contado del activo adquirido. Para resolver el ejer cicio, debemos traer todos los valores a presente y sumarlos, teniendo en cuenta que se debe convertir la tasa de interés de rendimiento dada, en las mis- mas referencias del tiempo y del período de la anualidad. Entonces:

$j = 29\%\ CT \Rightarrow \frac{0,29}{4} = 0,0725\ ET$

$$P = 380.000\left[\frac{1-(1+0,0725)^{-8}}{0,0725}\right](1+0,0725) + 190.000(1+0,0725)^{-9}$$

P = $2.511.400

20. Un comerciante vende máquinas de tejer a $12.500.000, precio de contado. Pa ra promover sus ventas, decide venderlas en 18 cuotas mensuales con 2% efec tivo mensual de interés. ¿Cuál es el valor de las mensualidades?



La gráfica nos muestra la forma de financiación de unas máquinas de coser, y se pregunta el valor de la cuota mensual por cancelar. Para resolver el ejercicio basta hacer uso de la fórmula de anualidad conociendo valor presente. Enton- ces, ya que el tiempo y la tasa de interés están en las mismas referencias del período de la anualidad:

R = ? mensuales

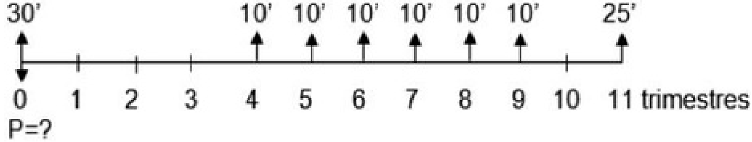
P = 12.500.000

i = 2% EM

n = 18 meses

$$R = 12.500.000\left[\frac{0,02}{1-(1+0,02)^{-18}}\right] = \$833.776,28 \text{ mensuales}$$

21. Hallar el precio de contado de una propiedad comprada con el siguiente plan: una cuota inicial de $30.000.000; 6 pagos trimestrales de $10.000.000, debiendo efectuar el primer pago dentro de un año, y un pago final de $25.000.000, 6 meses después de pagada la última cuota trimestral. Suponga un interés del 32% convertible trimestralmente.



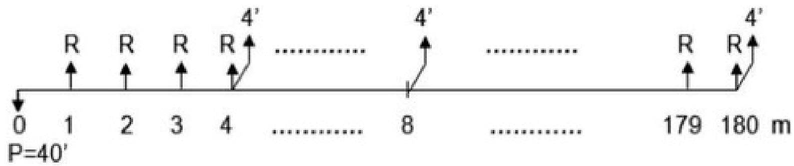
La gráfica nos muestra el plan de pagos en la compra de una propiedad donde se cancela mediante una cuota inicial, una anualidad diferida y un último pago un tiempo después, y se solicita el valor de contado del activo adquirido. Para resolver el ejercicio, debemos traer todos los valores a presente y sumarlos, te- nien do en cuenta que se debe convertir la tasa de interés de rendimiento dada, en las mismas referencias del tiempo y del período de la anualidad. Entonces:

$j = 32\%\ CT \Rightarrow \frac{0,32}{4} = 0,08\ ET$

$$P = 30.000 + 10.000\left[\frac{1-(1+0,08)^{-6}}{0,08}\right](1+0,08)^{-3} + 25.000(1+0,08)^{-11}$$

$P = \$77.419.980,72$

22. Una casa que vale 50 millones de contado se adquirió financiada con una tasa de interés del 26% efectivo anual, pagando el 20% de cuota inicial. Se acuerda can- ce lar el saldo en 15 años mediante cuotas mensuales vencidas y cuotas extras de 4 millones al final de cada año. Al pagar la cuota (ordinaria y extraordinaria) co- rres pondiente al mes 96, de común acuerdo con el banco, el deudor decide pa- gar el saldo en 16 cuotas trimestrales vencidas. Determinar el valor de la cuo ta tri mestral.



La gráfica nos muestra el plan de pagos en la compra de una casa donde se fi nan cia mediante una cuota inicial y dos anualidades vencidas en diferentes períodos de capitalización. De común acuerdo con la entidad financiera se acuerda reestructurar en una fecha determinada el saldo de la deuda en una nue va anualidad. Se solicita el valor de la nueva cuota.

Para resolver el ejercicio, debemos primero calcular la cuota mensual que había sido pactada inicialmente trayendo a precios de hoy las cuotas extraordinarias y restándolas del valor financiado, para luego traer a la fecha de la reestructuración todos los valores adeudados a partir de esa fecha, toda vez que lo cancelado no se debe tener en cuenta porque ya se ha cancelado, y tomar ese valor arrojado como valor presente para la nueva cuota de reestructuración. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación dada, en las mismas referencias del tiempo y del período de la anualidad. Entonces:

R = 4.000.000 anuales

n = 15 años

i = 26% EA

P = ?

$$P = 4.000.000\left[\frac{1-(1+0,26)^{-15}}{0,26}\right] = 14.904.297,82$$

Restamos del valor financiado:

P = 40.000.000 − 14.904.297,82 = 25.095.702,18

Calculamos la anualidad mensual:

R = ?

P = 25.095.702,18

n = 15 años = 180 meses

$$i = 26\%\ EA \Rightarrow (1+0,26)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 = 0,0194459\ EM$$

$$R = 25.095.702,18\left[\frac{0,0194459}{1-(1+0,0194459)^{-180}}\right] = \$503.737,19 \text{ mensuales}$$

Calculamos el saldo de la deuda al pagar las cuotas ordinarias y extraordinarias del mes 96, o sea, en el año 8, lo que significa que faltan 7 años por pagar, es decir, 84 cuotas de la anualidad mensual y 7 cuotas de la anualidad anual, utili zando la fórmula de valor presente con sus correspondientes referencias de tasas de interés de cada anualidad:

$$P = 503.737,19\left[\frac{1-(1+0,0194459)^{-84}}{0,0194459}\right] + 4.000.000\left[\frac{1-(1+0,26)^{-7}}{0,26}\right]$$

P = 33.099.917,68

Calculamos la nueva anualidad trimestral de la reestructuración acordada:

R = ? trimestrales

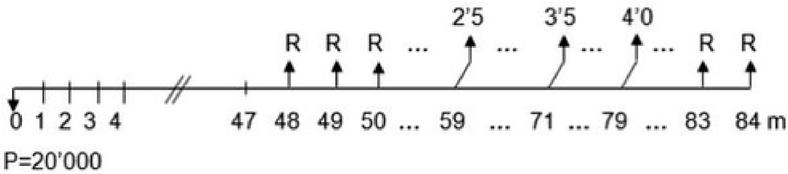
P = 33.099.917,68

n = 16 trimestres

$i = 26\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}26)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}059479\ ET$

$$R = 33.099.917{,}68\left[\frac{0{,}059479}{1-(1+0{,}059479)^{-16}}\right] = \$3.263.614{,}62 \text{ trimestrales}$$

23. Para cancelar una matrícula de doctorado se recibe un crédito de $20.000.000, con una tasa de interés del 28% *ATA* y con el compromiso de pagarlo en 36 cuotas mensuales vencidas, pagando la primera exactamente a los 48 meses de firmado el pagaré y recibido el dinero. Además, se deben pagar cuotas extras de 2,5, 3,5 y 4 millones respectivamente, simultáneas con las cuotas 11, 23 y 31. Determine el valor de la cuota mensual.



La gráfica nos muestra el plan de pagos de un crédito educativo donde se financia mediante una anualidad diferida y pagos de cuotas extraordinarias, y se solicita calcular el valor de la cuota fija. Para resolver el ejercicio, debemos primero calcular el saldo o valor presente del crédito un período antes de la anualidad, para con ese valor poder calcular la cuota solicitada. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación dada, en las mismas referencias del tiempo y del período de la anualidad. Entonces:

Calculamos el valor presente o saldo de la deuda un período antes de la anualidad (mes 47) teniendo en cuenta el valor del crédito y las cuotas extraordinarias:

$i = 28\%\ ATA \Rightarrow \frac{0{,}28}{4} = 0{,}07\ ETA \Rightarrow \frac{0{,}07}{(1-0{,}07)} = 0{,}075268\ ET$

$\Rightarrow (1+0{,}075268)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0{,}024485\ EM$

$P = 20.000.000(1+0{,}024485)^{47} - 2.500.000(1+0{,}024485)^{-12}$
$\quad - 3.500.000(1+0{,}024485)^{-24} - 4.000.000(1+0{,}024485)^{-32}$

$P = 56.670.629{,}11$

Calculamos la cuota de la anualidad mensual diferida:

R = ? mensuales

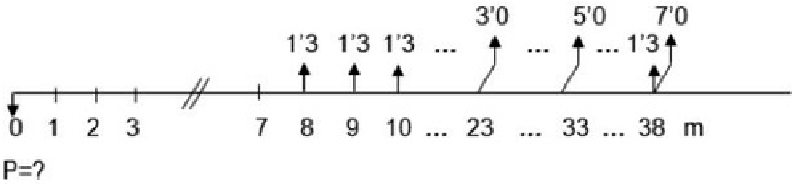
$P = 56.670.629{,}11$

n = 36 meses

i = 2,4485% EM

$$R = 56.670.629,11\left[\frac{0,024485}{1-(1+0,024485)^{-36}}\right] = \$2.386.622,25 \text{ mensuales}$$

24. Un crédito se debe cancelar en 30 cuotas mensuales de $1.300.000, pagando la primera exactamente a los 8 meses de firmado el pagaré. Además, se acuerda el pago de 3 cuotas extras de 3, 5 y 7 millones, simultáneas con las cuotas ordi- na rias 15, 25 y 30, respectivamente. Suponiendo una tasa de interés del 29,5% efectivo anual, determine el valor del crédito.



La gráfica nos muestra el plan de pagos de un crédito donde se financia mediante una anualidad diferida y pagos de cuotas extraordinarias, y se solicita calcular el valor del préstamo. Para resolver el ejercicio, basta traer a valor presente todos los valores a la tasa de interés y sumarlos. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación dada, en las mismas referencias del tiempo y del período de la anualidad. Entonces:

$$i = 29,5\%\ EA \Rightarrow (1+0,295)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 = 0,0217763\ EM$$

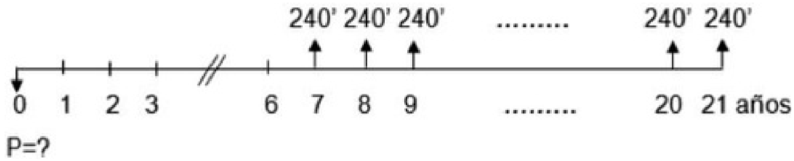
$$P = 1.300.000\left[\frac{1-(1+0,0217763)^{-30}}{0,0217763}\right](1+0,0217763)^{-7}$$

$$+\ 3.000.000(1+0,0217763)^{-23} + 5.000.000(1+0,0217763)^{-33}$$

$$+\ 7.000.000(1+0,0217763)^{-38}$$

P = $31.810.041,95

25. Una compañía adquiere unos yacimientos de mineral. Los estudios de ingeniería muestran que los trabajos preparatorios y las vías de acceso demorarán seis años, y la producción empieza en el año 7 con una ganancia anual de $240.000.000. Suponiendo que la tasa comercial de interés es del 18% efectivo anual y que los yacimientos se agotarán después de 15 años continuos de explotación, hállese el monto de las ganancias que se espera obtener en pesos de hoy.

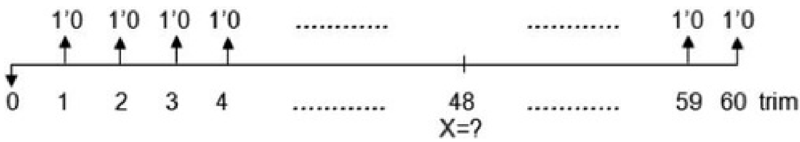


La gráfica nos muestra las proyecciones financieras de ganancias producto de la explotación de un yacimiento de mineral, y se solicita calcular el valor de las utilidades a precios de hoy. Para resolver el ejercicio, basta traer a valor presente la anualidad diferida a la tasa de interés comercial dada. Entonces:

$$P = 240.000.000\left[\frac{1-(1+0,18)^{-15}}{0,18}\right](1+0,18)^{-6}$$

$P = \$452.659.418,90$

26. ¿Con cuánto se puede comprar una renta de \$1.000.000 trimestrales, pagadera durante 15 años, mediante un pago único dentro de 12 años, si la tasa de interés es del 26%, capitalizable trimestralmente?



La gráfica nos muestra una renta periódica de igual valor a una tasa de interés de rendimiento, y se solicita el precio de compra en un tiempo determinado. Para resolver el ejercicio, debemos primero calcular a precios de hoy la anualidad para luego llevar ese valor a la fecha de compra. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés a su correspondiente efectiva vencida. Entonces:

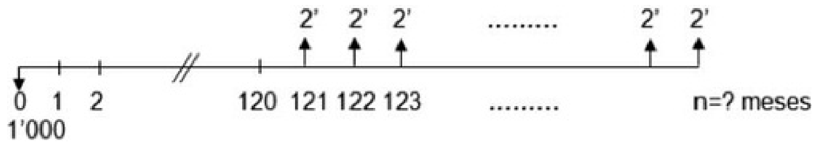
$j = 26\%\ CT \Rightarrow \dfrac{0,26}{4} = 0,065\ ET$

$$P = 1.000.000\left[\frac{1-(1+0,065)^{-60}}{0,065}\right] = 15.032.965,74$$

Calculamos el pago único a los 12 años utilizando valor futuro:

$$X = 15.032.965,74(1 + 0,065)^{48} = \$308.905.642,36$$

27. Se deposita \$1.000.000 en un banco para que, inmediatamente después de 10 años, se le empiecen a retirar \$2.000.000, a principio de cada mes. ¿Cuántos retiros pueden efectuarse si el banco abona el 26% *AMV*?



La gráfica nos muestra un único depósito a la fecha realizado en un banco a una tasa de interés, con el objetivo de empezar a retirar un tiempo después un valor fijo producto de ese rendimiento financiero, y se solicita calcular el nú- me ro de retiros posibles. Para resolver el ejercicio, debemos primero llevar a va lor futuro a 10 años el depósito inicial, para luego tomar ese valor como valor presente y calcular el número de períodos de la anualidad. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés a su correspondiente efectiva vencida. Entonces:

$$j = 26\%\ AMV \Rightarrow \frac{0{,}26}{12} = 0{,}021666\ EM$$

Calculamos el valor futuro del pago único:

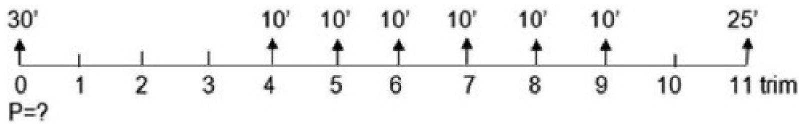
$$F = 1.000.000(1 + 0{,}021666)^{120} = 13.095.042{,}01$$

Calculamos el número de períodos de la anualidad vencida:

$$n = -\frac{\text{Log}\left(1 \quad \frac{13.095.042{,}01}{2.000.000}\right)}{\text{Log}(1\ 0{,}021666)} = 7{,}13 \text{ meses}$$

ù 7 meses

28. Hallar el precio de contado de una propiedad comprada con el siguiente plan: una cuota inicial de $30.000.000; 6 pagos trimestrales de $10.000.000, debiendo efectuar el primer pago dentro de un año, y un pago final de $25.000.000, 6 mes es después de pagada la última cuota trimestral. Suponga un interés del 32% *AMV*.



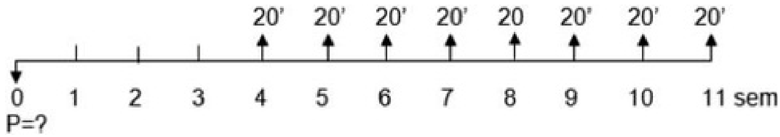
La gráfica nos muestra el plan de pagos en la compra de una propiedad donde se cancela mediante una cuota inicial, una anualidad diferida y un último pago un tiempo después, y se solicita el valor de contado del activo adquirido. Para resolver el ejercicio, debemos traer todos los valores a presente y sumarlos, te- nien do en cuenta que se debe convertir la tasa de interés de rendimiento dada, en las mismas referencias del tiempo y del período de la anualidad. Entonces:

$$j=32\%AMV \Rightarrow \frac{0,32}{12} = 0,026666\ EM \Rightarrow (1+0,026666)^{\frac{12}{4}} - 1 = 0,082152\ ET$$

$$P = 30'000 + 10'000\left[\frac{1-(1+0,082152)^{-6}}{0,082152}\right](1 + 0,082152)^{-3} + 25.000(1 + 0,082152)^{-11}$$

P = \$76.732.225,20

29. Una deuda aceptada al 28% *AMV* debe cancelarse con 8 cuotas semestrales de \$20.000.000 cada una, pagando la primera cuota dos años después de aceptar la deuda. Se quiere sustituir por una obligación equivalente pagadera con 24 cuotas trimestrales, pagando la primera cuota de inmediato. Determine el valor de las cuotas trimestrales.



La gráfica nos muestra la forma de financiación de una deuda en modalidad de anualidad diferida que se quiere sustituir mediante una anualidad anticipada. Para resolver el ejercicio, debemos primero calcular a precios de hoy el valor de la anualidad diferida, tomando este valor como valor presente para calcular la nueva cuota de la sustitución de la deuda. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación dada, en las mismas referencias del tiempo y del período de las anualidades. Entonces:

Calculamos el valor presente de la anualidad diferida:

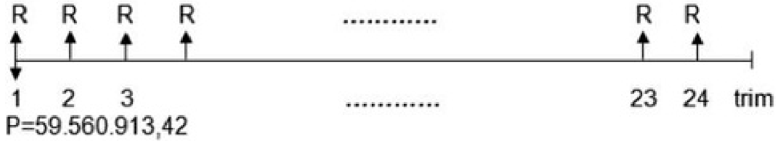
R = 20.000.000 semestrales

n = 8 semestres

$$j = 28\%\ AMV \Rightarrow \frac{0,28}{12} = 0,023333EM \Rightarrow (1+0,026666)^{\frac{12}{4}} - 1 = 0,148425\ ES$$

P = ?

$$P = 20.000.000\left[\frac{1-(1+0,148425)^{-8}}{0,148425}\right](1 + 0,148425)^{-3} = 59.560.913,42$$



Calculamos la cuota de la anualidad anticipada:

R = ? trimestrales

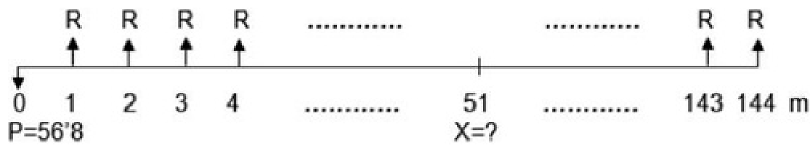
P = 59.560.913,42

n = 24 trimestres

$$j = 28\%\ AMV \Rightarrow \frac{0,28}{12} => 0,023333\ EM \Rightarrow (1+0,023333)^{\left(\frac{12}{4}\right)} - 1 = 0,071646\ ET$$

$$R = 59.560.913,42 \left[\frac{0,071646}{1-(1+0,071646)^{-24}}\right]\left[\frac{1}{(1+0,071646)}\right] = \$4.916.096,01\text{trim}$$

30. Se quiere comprar una casa que cuesta $80.000.000 con un plazo de 12 años, dando una cuota inicial del 29% y el saldo mediante cuotas mensuales vencidas. Si al pagar la cuota 51 se decide que el saldo restante se cancelará mediante cuotas trimestrales vencidas, determine el valor de las cuotas mensuales y tri- mes trales, suponiendo una tasa de interés de 35% *ATV*.



La gráfica nos muestra la financiación pactada para la compra de un inmueble con una cuota inicial y un saldo por diferir en una anualidad vencida que, de común acuerdo en una cuota futura, se decide reestructurar a esa fecha mediante otra anualidad vencida. Se solicita determinar los valores de las cuotas: tanto la inicial como la reestructurada. Para resolver el ejercicio, debemos primero calcu lar el valor de la cuota pactada inicialmente, luego traer a valor presente en la fecha determinada el saldo de la deuda de las cuotas que faltan y finalmente tomar ese valor como valor presente para el cálculo de la nueva anualidad ven- cida de reestructuración. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación dada, en las mismas referencias del tiempo y del período de las anua lidades. Entonces:

Calculamos la cuota pactada inicialmente:

R = ? mensuales

P = 56.800.000

n = 12 años = 144 meses

$$j = 35\%\ ATV \Rightarrow \frac{0,35}{4} = 0,0875ET \Rightarrow (1+0,0875)^{\left(\frac{4}{12}\right)} - 1 = 0,028355\ EM$$

$$R = 56.800.000\left[\frac{0,028355}{1-(1+0,028355)^{-144}}\right]$$

R = $1.639.821,75 mensuales

Calculamos el saldo de la deuda al pagar la cuota 51, o sea, faltando 93 cuotas:

$$P = 1.639.821,75\left[\frac{1-(1+0,028355)^{-93}}{0,028355}\right] = \$53.537.750,20$$

Calculamos la cuota de la nueva anualidad acordada:

R = ? trimestrales

P = 53.537.750,20

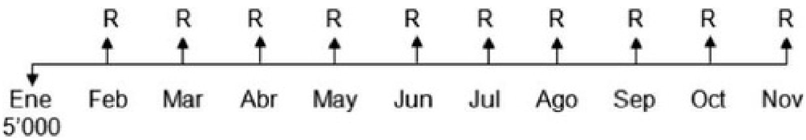
n = 93 meses = 31 trimestres

$j = 35\%\ ATV \Rightarrow \frac{0,35}{4} = 0,0875\ ET$

$$R = 53.537.750,20\left[\frac{0,0875}{1-(1+0,0875)^{-31}}\right]$$

R = $5.060.275,40 trimestrales

31. El 1 de enero un papá deposita $5.000.000 en una cuenta que reconoce un interés de 25% efectivo anual para que su hijo haga retiros mensuales iguales desde el 1 de febrero hasta el 1 de noviembre del mismo año. Determine el valor de los retiros.



La gráfica nos muestra un depósito realizado en la fecha de hoy en una cuenta que reconoce un rendimiento financiero, con el objetivo de realizar retiros igua les durante unos períodos específicos, y se solicita determinar el valor de dichos retiros. Para resolver el ejercicio, basta utilizar la fórmula de anualidad vencida conociendo el valor presente. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación dada, en las mismas referencias del tiempo y del pe- río do de las anualidades. Entonces:

R = ? mensuales

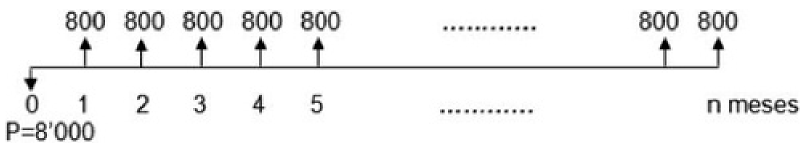
P = 5.000.000

n = 10 meses

$$i = 25\%\ EA \Rightarrow (1+0,25)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,0187693\ EM$$

$$R = 5.000.000\left[\frac{0,0187693}{1-(1+0,0187693)^{-10}}\right] = \$553.054,35 \text{ mensuales}$$

32. Una máquina que se vende de contado en \$8.000.000 se ofrece en un plan de ventas por mensualidades, sin cuota inicial. Hallar el número de cuotas necesarias de \$800.0000 para cancelar la máquina, si se cobra el 8% de interés efectivo trimestral.



La gráfica nos muestra el plan de cuotas fijas mensuales vencidas de la venta de una máquina sin cuota inicial, y se pregunta el número de cuotas necesarias por cancelar cobrando una tasa de financiación. Para resolver basta hallar el tiempo utilizando la fórmula de número de períodos de una anualidad vencida, sin ol- vi dar convertir la tasa a los mismos períodos de la anualidad. Entonces:

R = 800.000 mensuales

P = 8.000.000

$$i = 8\%\ ET \Rightarrow (1+0,08)^{\frac{4}{12}} - 1\ EM = 0,025985\ EM$$

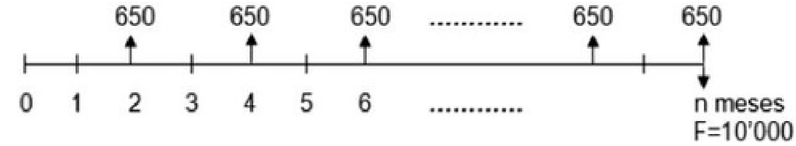
n = ? meses

$$n = \frac{-\text{Log}\left[1-\frac{8.000.000(0,025985)}{800.000}\right]}{\text{Log}(1+0,025985)} = 11,73 \text{ meses}$$

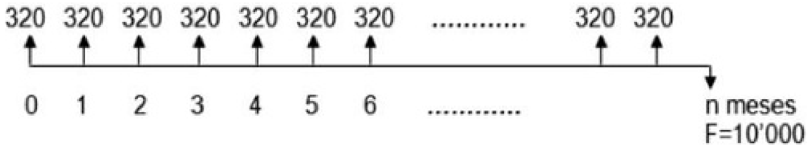
$n \approx 12$ cuotas mensuales

33. ¿En qué forma se reúnen más rápidamente \$10.000.000? a. Depositando \$650.000 cada dos meses en un banco que abona el 28%, con capitalización semestral;
b. Depositando \$320.000 al principio de cada mes, en el mismo banco.

a.



b.



Las gráficas nos muestran dos alternativas de depósitos: una bajo la modalidad de anualidad vencida y la otra como anualidad anticipada, y se solicita averiguar con cuál de las dos capitalizaciones se logra reunir más rápidamente un monto. Para resolver el ejercicio, basta utilizar en cada alternativa la fórmula de número de períodos y, lógicamente, será la mejor la que en tiempo sea la menor. No olvi dar que hay que convertir la tasa de interés de rendimiento dada, en las mis mas referencias del tiempo y del período de las anualidades. Entonces:

a. $F = 10.000.000$

$R = 650.000$ bimestrales vencidos

$j = 28\%\ CS \Rightarrow \frac{0,28}{2} = 0,14\ ES \Rightarrow (1+0,14)^{\left(\frac{2}{6}\right)} - 1 = 0,044644\ EB$

$n = ?$

$$n = \frac{\text{Log}\left[1+\frac{10.000.000(0,044644)}{650.000}\right]}{\text{Log}(1+0,044644)} = 11,97 \text{ bimestres} = 23,94 \text{ meses}$$

$\approx$ 24 meses

b. $F = 10.000.000$

$R = 320.000$ mensuales anticipados

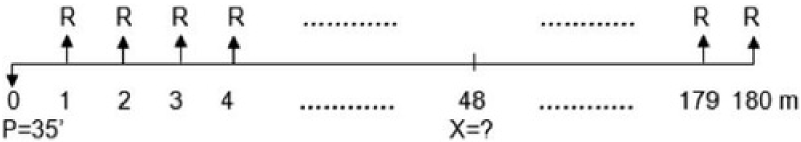
$j = 28\%\ CS \Rightarrow \frac{0,28}{2}\ ES \Rightarrow (1+0,14)^{\left(\frac{2}{12}\right)} - 1 = 0,022078\ EM$

$n = ?$

$$n = \frac{\text{Log}\left[1+\frac{10.000.000(0,022078)}{320.000(1+0,022078)}\right]}{\text{Log}(1+0,022078)} = 23,62 \text{ meses} \approx 24 \text{ meses}$$

Analizando las dos respuestas, podríamos decir que con cualquiera de las dos formas de capitalización se va necesitar el mismo tiempo, toda vez que, al apro ximar a la unidad más cercana, el período da el mismo.

34. Una propiedad cuyo valor es $50.000.000 se vende con una cuota inicial de $15.000.000 y el saldo en cuotas mensuales a 15 años plazos, con un interés del 36% *AMV*. Hallar el valor de las cuotas mensuales y el saldo al finalizar el cuarto año.



La gráfica nos muestra la financiación pactada para la compra de un inmueble con una cuota inicial y un saldo por diferir en una anualidad vencida. Se solicita hallar el valor de la cuota vencida fija de la financiación y el saldo al finalizar un período determinado. Para resolver el ejercicio, debemos primero calcular el valor por financiar restando el precio de compra menos la cuota inicial, luego calcular el valor de la anualidad vencida y finalmente traer a valor presente las cuotas que faltan en la fecha determinada para calcular el saldo de la deuda. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación dada, a su correspondiente efectiva vencida. Entonces:

Calculamos la cuota mensual vencida:

R = ? mensuales

P = 50.000.000 – 15.000.000 = 35.000.000

n = 15 años = 180 meses

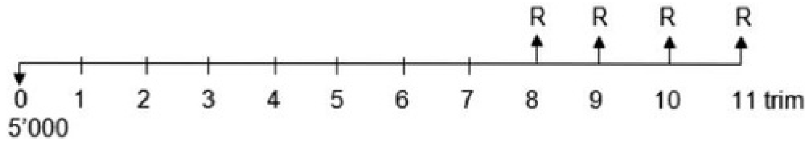
$j = 36\%\ AMV \Rightarrow \frac{0,36}{12} = 0,03\ EM$

$$R = 35.000.000\left[\frac{0,03}{1-(1+0,03)^{-180}}\right] = \$1.055.159,62 \text{ mensuales}$$

Calculamos el saldo de la deuda al pagar la cuota 48, o sea, faltando 132 cuotas:

$$P = 1.055.159,62\left[\frac{1-(1+0,03)^{-132}}{0,03}\right] = \$34.461.292,35$$

35. Una deuda de $5.000.000 con interés del 36% capitalizable trimestralmente debe amortizarse con cuatro pagos trimestrales iguales consecutivos, debiendo efectuarse el primer pago dentro de dos años. Hallar el valor de los pagos.



La gráfica nos muestra la forma de financiación de una deuda en modalidad de anualidad diferida, y se quiere hallar el valor de los pagos. Para resolver el ejercicio, debemos primero llevar a valor futuro el valor de la deuda un período antes del primer pago, para luego calcular el valor de las cuotas de una anualidad vencida. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación dada a su correspondiente efectiva vencida. Entonces:

Calculamos el valor futuro de la deuda un período antes de la anualidad:

$P = 5.000.000$

$j = 36\%\ CT \Rightarrow \frac{0,36}{4} = 0,09\ ET$

$n = 7$ trimestres

$F = 50.000.000(1 + 0,09)7 = \$9.140.195,60$

Calculamos el valor de la cuota:

$R = ?$ trimestrales

$P = 9.140.195,60$

$j = 36\%\ CT \Rightarrow \frac{0,36}{4}$

$n = 4$ trimestres

$$R = 9.140.195,60\left[\frac{0,09}{1-(1+0,09)^{-4}}\right] = \$1.998.674,34 \text{ trimestrales}$$

36. Usted tiene la oportunidad de tomar en arriendo un restaurante durante 1 año y le garantizan que podrá vender exactamente 6.000 almuerzos mensuales a $1.600 cada uno, pero le pagarán en un solo contado al final del año y sin intereses. Supon ga que el costo de los insumos de cada almuerzo será de $500, los cuales de be rán ser adquiridos y pagados al principio de cada mes. El costo mensual de mano de obra se considera estable en $850.000 y, además, se requerirá de una inversión inicial de $5.000.000 para la adecuación del restaurante. Suponiendo un interés mensual del 3%, calcular cuál será el valor de la ganancia o pérdida: a. En pesos de hoy (comienzo de año); b. En pesos futuros (final de año).

Calculamos los ingresos:

6.000 almuerzos mensuales ($1.600 c/u) (12 meses) = $115.200.000

Calculamos los egresos:

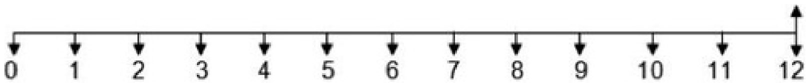
Insumos: 6.000 almuerzos mensuales ($500 c/u) = $3.000.000

Costo mano de obra: 850.000

Inversión inicial: 5.000.000

Plasmamos la anterior información en una línea de tiempo:

Mes	Inversión	Insumos	Mano de obra	Ingresos	Totales
0	5.000.000	3.000.000			(8.000.000)
1		3.000.000	850.000		(3.850.000)
2		3.000.000	850.000		(3.850.000)
3		3.000.000	850.000		(3.850.000)
4		3.000.000	850.000		(3.850.000)
5		3.000.000	850.000		(3.850.000)
6		3.000.000	850.000		(3.850.000)
7		3.000.000	850.000		(3.850.000)
8		3.000.000	850.000		(3.850.000)
9		3.000.000	850.000		(3.850.000)
10		3.000.000	850.000		(3.850.000)
11		3.000.000	850.000		(3.850.000)
12			850.000	115.200.000	111.350.000



La gráfica nos muestra las proyecciones financieras (ingresos y egresos) de un nego cio en un tiempo determinado, y se pide calcular a precios de hoy y a precios fu tu ros las ganancias o pérdidas de la inversión a una tasa de oportunidad de- ter minada. Para resolver la primera incógnita, debemos traer a valor presente los valores totales de cada período a la tasa de oportunidad y, para la segunda in cóg nita, debemos llevar a valor futuro los valores totales de cada período a la tasa de oportunidad. Para simplificar los cálculos tomamos como valores pun- tua les los datos en el mes 0 y 12 y como una anualidad vencida los datos de los me ses 1 al 11. Entonces:

Calculamos el valor presente:

$$P = -8.000.000 - 3.850.000\left[\frac{1-(1+0{,}03)^{-11}}{0{,}03}\right] + 111.350.000(1+0{,}03)^{-12}$$

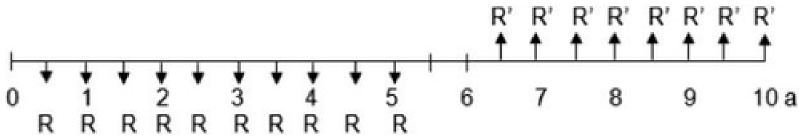
P = \$34.476.046,82

Calculamos el valor futuro:

$$F = 111.350.000 - 3.850.000\left[\frac{(1+0{,}03)^{11}-1}{0{,}03}\right](1+0{,}03) - 8.000.000 + (1+0{,}03)^{12}$$

F = \$49.154.599,09

37. El día de su matrimonio, una pareja hace los siguientes planes: el sexto aniversario lo celebrarán con un viaje que pagarán mediante 8 cuotas semestrales de igual valor, pagando la primera cuota el mismo día del viaje, que será exactamente 6,5 años después de la boda. La cuota semestral para viajes similares vale hoy 3 millones y se incrementa 4.5% cada semestre. La pareja se propone ahorrar cuotas semestrales iguales, una al final de cada uno de los 10 semestres siguientes a la boda, con el fin de acumular lo necesario para pagar el viaje. Los ahorros los efectúan en una entidad que ofrece un rendimiento del 11,5% efectivo anual, tasa que se supone constante durante todo el tiempo. Determine el valor del depósito semestral.



La gráfica nos muestra el plan de financiación de unas vacaciones mediante cuo tas fijas después de disfrutado el viaje, y se quiere calcular el valor del de- pó sito fijo por realizar a partir de la fecha para cumplir con ese sueño de ani- ver sario matrimonial.

Para resolver el ejercicio, debemos primero calcular el valor de la cuota a futuro de un viaje similar teniendo en cuenta el valor a hoy y su incremento a futuro, luego traer a valor presente esa anualidad diferida, para finalmente calcular la cuota de la anualidad vencida. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación dada en los términos del período de la anualidad. Entonces:

Calculamos el valor a futuro de la cuota semestral (R') de un viaje actual:

$$P = 3.000.000(1+0{,}045)^{13} = \$5.316.588{,}29$$

Calculamos el valor a precios de hoy de la anualidad diferida (*R'*):

$P = ?$

$R' = 5.316.588{,}29$

$i = 11.5\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}115)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}0559356\ ES$

$n = 8$ semestres

$$P = 5.316.588{,}29\left[\frac{1-(1+0{,}0559356)^{-8}}{0{,}0559356}\right](1+0{,}0559356)^{-12}$$

$P = \$17.461.321{,}18$

Calculamos el valor de la cuota o depósito semestral:

$R = ?$ semestrales

$P = 17.461.321{,}18$

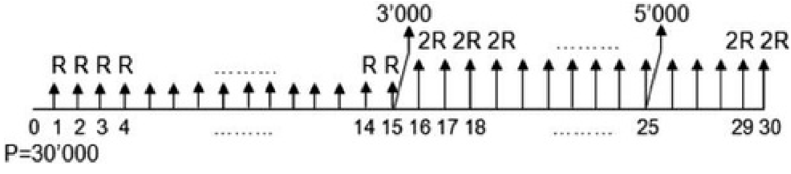
$i = 11{,}5\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}115)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}0559356\ ES$

$n = 10$ semestres

$$R = 17.461.321{,}18\left[\frac{0{,}0559356}{1-(1+0{,}0559356)^{-10}}\right]$$

$R = \$2.326.961{,}71$ semestrales

38. Una línea de crédito del Icetex, especial para estudios de posgrado, consiste en un crédito de 30 millones que el estudiante debe pagar en 30 cuotas mensuales pero con la condición de que cada una de las 15 últimas sea igual al doble de cada una de las 15 primeras, es decir, que a partir de la 16, el valor de la cuota se duplica. Además, se exige el pago de 2 cuotas extras de 3 y 5 millones, simultáneas con las cuotas ordinarias 15 y 25 respectivamente. Suponiendo una tasa de interés del 29,5% efectivo anual, determine el valor de las cuotas mensuales.



La gráfica nos muestra el plan especial de pagos de un crédito educativo donde se financia mediante una anualidad vencida, una anualidad diferida y dos pagos de cuotas extraordinarias, y se solicita calcular el valor de las cuotas fijas del préstamo. Para resolver el ejercicio, hay que traer a fecha de hoy todos los valores a la tasa de interés, plantear una ecuación de valor con el valor inicial del crédito y despejar la incógnita, o sea, el valor de la anualidad. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación dada, en las mismas referencias del tiempo y del período de la anualidad. Entonces:

$$i = 29{,}5\%\ EA\ (1+0{,}295)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 = 0{,}0217763 \Rightarrow EM$$

Planteamos la ecuación de valor:

$$2R\left[\frac{1-(1+0{,}0217763)^{-15}}{0{,}0217763}\right](1+0{,}0217763)^{-15} + R\left[\frac{1-(1+0{,}0217763)^{-15}}{0{,}0217763}\right]$$

$$+\ 3.000.000(1+0{,}0217763)^{-15} + 5.000.000(1+0{,}0217763)^{-25} = 30.000.000$$

Despejando *A* calculamos las primeras 15 cuotas:

$R = \$802.584{,}92$

Calculamos las segundas 15 cuotas:

$2R = \$1.605.169{,}83$

UNIDAD 4

GRADIENTES

Ejercicios propuestos

1. Desde que inicia su proceso de instalación, una fábrica tiene costos fijos de $6.000.000 mensuales. Los costos variables son $150 por unidad. En el mes 7 se iniciará la producción con 1.000 unidades mensuales y cada mes aumentará en 500 unidades hasta llegar al tope de 5.000 unidades al mes. Calcular el cos to total (fijos y variables) de la fábrica durante los primeros 3 años en pesos de hoy. Suponga una tasa del 30% *EA*.

2. Una fábrica produce una utilidad de 20 millones de pesos durante el primer año, pero en el segundo año la utilidad disminuye en $350.000 y sigue disminuyendo la misma cantidad anual debido al desgaste de los equipos. Si la fábrica no cambia equipos durante los próximos 10 años, suponiendo una tasa del 30% *EA*, calcule: a. El total de las ganancias de la fábrica, en pesos, de comienzo primer año y del décimo año; b. La utilidad del año 10.

3. Para un proyecto de inversión se adquiere un crédito para pagarlo mediante 40 cuotas trimestrales que se incrementan en $200.000 cada trimestre. La primera cuota es de $2.000.000 y debe pagarse exactamente un año después de firmado el pagaré; además, deben pagarse cuotas extraordinarias de 15 y 20 millones simultáneas con las cuotas 20 y 30, respectivamente. A una tasa del 26% *ATV*, determine el valor del crédito.

4. ¿Cuántos pagos mensuales deben hacerse para cancelar una deuda de 2.000.000, con intereses del 36% *NMV*, suponiendo que la primera cuota es de $50.000 y que la cuota crece en $500 mensualmente?

5. El 12 de febrero del año 2001 un niño cumple 10 años y el papá, muy precavido, ha decidido que ese día hará el primero de una serie de 6 depósitos anuales uniformes para completar los recursos suficientes para pagar la matrícula de su hijo en la universidad durante los 10 semestres que durará la carrera, asumiendo que el primer pago de matrícula lo deberá hacer el día que el hijo cumpla 16 años. Los depósitos serán consignados en un fondo que paga el 25% *EA*. En la fecha en que el niño cumple 10 años, la matrícula semestral cuesta \$8.000.000 y se estima que aumentará un 5% semestral, que es el período de pago de la matrícula. Calcular el valor de cada depósito anual.

6. Una persona toma en arriendo un restaurante durante 1 año y asume que podrá vender exactamente 6.000 almuerzos mensuales a razón de \$4.600 cada almuerzo. Calcula que el costo de los insumos será \$1.800 por almuerzo, los cua les deberán ser adquiridos y pagados al principio de cada mes, y su valor aumentará un 2% mensual. El costo de la mano de obra será de \$3.550.000 mensuales y, además, se requerirá de una inversión inicial de \$25.000.000 para la adecuación del restaurante. Suponiendo un interés mensual del 3% mensual, ¿cuál será el valor de la ganancia (o pérdida a): a. En pesos de co mien zo de año; b. En pesos a final de año?

7. Una fábrica debe importar 80 toneladas mensuales de materia prima pagándola al principio de cada mes en dólares a razón de US\$200 la tonelada. Según la experiencia, se estima que el peso se devalúa a razón del 1,1% mensual con relación al dólar. Si el cambio del dólar al comienzo del año es 1U\$=\$2.980, hallar el valor total de las importaciones de la fábrica en el transcurso de un año, en pesos de principio del año y en pesos de final de año. Suponga que la fábrica trabaja con una tasa del 2,5% *EM*.

8. Resuelva el problema anterior suponiendo que el fabricante se compromete a cancelar el valor de cada dos importaciones de forma bimestral anticipada.

9. Una entidad financiera presta a un cliente 49 millones, con un interés del 34,8% *NMV*. El deudor tiene un plazo de 15 años para amortizar la deuda mediante pagos mensuales. Suponiendo que la primera cuota es de \$920.408 y debe pagarse al final del primer mes de plazo, ¿cuál debe ser el porcentaje de reajuste mensual de la cuota para cancelar la deuda?

10. Una persona quiere comprar un automóvil que actualmente cuesta \$25.000.000. Para tal fin, decide establecer un fondo mediante depósitos mensuales crecientes en un 4%. Si el primer depósito de \$800.000 se hace al final de 1 mes, ¿en cuánto tiempo reunirá el dinero necesario para comprar el automóvil si su precio aumenta cada mes un 1%? Suponga una tasa de 2% *EM*.

11. El señor gerente tiene sobre el escritorio alternativas de los proveedores A y B que están en capacidad de entregar exactamente el equipo que la empresa necesita para el día 1 de mayo de 2016. Atendiendo solamente el factor costo, diga cuál alternativa escoge, justificando plenamente su respuesta, según las siguientes condiciones:

a. 60 cuotas mensuales vencidas de $950.000 cada una, pagando la primera el 1 de junio de 2017, y además cuotas extraordinarias de $5.000.000 simultáneas con las cuotas ordinarias 13, 25, 37 y 49, con un interés del 31% *EA*.

b. 20 cuotas trimestrales, que se incrementan en 1% cada trimestre, pagando la primera por valor de $3.300.000 el día 1 de abril de 2017, con una tasa de interés del 27% *AMV*.

12. Una bodega se adquiere pagando una cuota inicial del 50% de su costo total. El saldo se debe cancelar en 12 años mediante cuotas trimestrales, que se increm entan en 2% cada trimestre. La primera cuota de $1.200.000 se paga un trimestre des pués de adquirir la bodega. Se acuerda además pagar cuotas extras de 5 y 8 mi llo nes respectivamente, simultáneamente con las cuotas 17 y 29. Suponiendo un interés de 31% *EA*, determine el valor de la bodega.

13. Con el objeto de hacer reposición de activos en el futuro, su empresa creó un plan de ahorros efectuando un primer depósito el día 1 de marzo de 2012 en una entidad que ofrecía un interés del 19,5% *EA* y acuerda seguir consignando $750.000 cada tres meses hasta el día 1 de junio de 2015, día en que se retirarán $5.500.000 para comprar un computador. A partir del trimestre siguiente el valor de la consignación se incrementó en un 8% hasta el día 1 de junio de 2017, día en que se efectuará la última consignación. El fondo se mantendrá sin retiros ni depósitos hasta el día primero (1) de octubre de 2020, cuando se efectuará una compra de nuevos equipos de cómputo cuyo valor agota exactamente el total del fondo hasta ese momento, que asciende a la suma de $200.000.000. Determine el valor del primer depósito.

14. Usted tiene la posibilidad de elegir entre dos contratos de trabajo. El primer con trato es por 5 años, le pagarán $1.000.000 mensuales fijos y una prima anual de $5.000.000, pagadera año vencido, durante el mismo período del con trato. El segundo contrato le ofrece 20 pagos trimestrales vencidos, que se incrementan en 1% cada trimestre, siendo el primer pago por valor de $4.500.000. Considerando solamente el aspecto económico, y suponiendo que su tasa de interés de oportunidad es del 31% *EA* y que los dos contratos permiten comenzar a laborar en el mismo día, diga cuál sería su elección, justificando plenamente su respuesta.

15. Su empresa compra equipos por valor de *X* pesos para pagarlos mediante cuotas trimestrales, que se incrementan en 2,5% cada trimestre durante 10 años. La primera cuota es de $2.450.000 y se paga 8 trimestres después de adquirir los equipos. Suponiendo una tasa de interés del 41% *EA*, determine el valor de los equipos.

16. Una compañía muy organizada adquiere equipos por valor de $90.000.000, e inmediatamente el gerente ordena la creación de un fondo de reposición con miras a reunir el dinero necesario para comprar equipos nuevos al final de su vida útil, que se estima en 5 años. Se acuerda que al fondo se consignen cuotas trimestrales que se incrementan $400.000 cada trimestre, en una entidad que ofrece un rendimiento del 11% *NMV*, comenzando exactamente a los 3 meses de comprados los equipos. Se estima que el valor de los equipos se incrementa el 20% anual y que al final de su vida útil los equipos viejos podrán venderse por el 40% de su costo, valor que se abonará como cuota inicial de los nuevos equipos. Determine el valor de las cuotas que deben consignarse en el fondo.

Ejercicios resueltos

Para desarrollar los ejercicios propuestos de gradientes en el presente texto utiliza- remos las siguientes fórmulas de matemáticas financieras con su correspondiente no menclatura. Es importante resaltar que para usar las fórmulas es necesario ex- pre sar el tiempo y la tasa de interés efectivo en el mismo período del gradiente:

P = Valor presente de la serie de un gradiente.

F = Valor futuro de la serie de un gradiente.

R = Valor de la primera cuota de la serie del gradiente.

G = Constante en que aumenta cada cuota en la serie.

i = Tasa de interés efectiva de la operación.

n = Número de períodos, pagos o ingresos del gradiente.

- Fórmulas de gradiente lineal o aritmético

$$P = \left[R + \frac{G}{i}\left(1 - \frac{ni}{(1+i)^n - 1}\right)\right]\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$F = \left[R + \frac{G}{i}\left(1 - \frac{ni}{(1+i)^n - 1}\right)\right]\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

- Fórmulas de gradiente geométrico o exponencial

$$P = R\left[\frac{(1+G)^n (1+i)^{-n} - 1}{G - i}\right]$$

$$P = R\left[\frac{(1+G)^n - (1+i)^n}{(G-i)(1+i)^n}\right]$$

$$P = R\left[\frac{(1+G)^n - (1+i)^n}{G - i}\right]$$

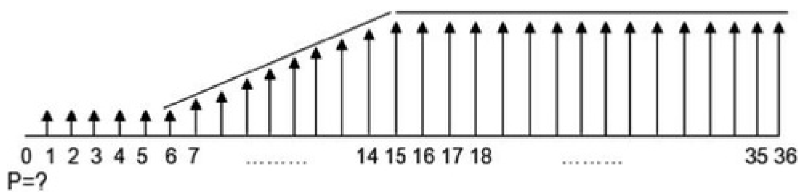
1. Desde que inicia su proceso de instalación, una fábrica tiene costos fijos de $6.000.000 mensuales. Los costos variables son $150 por unidad. En el mes 7 se iniciará la producción con 1.000 unidades mensuales y cada mes aumentará en 500 unidades hasta llegar al tope de 5.000 unidades al mes. Calcular el costo total (fijos y variables) de la fábrica durante los primeros 3 años en pesos de hoy. Suponga una tasa del 30% *EA*.

Producción inicial	1.000
Incremento producción	500
Costo variable por unidad	$150

Nº	Costos fijos	Costo variable	Unidad producto
0			
1	$ 6.000.000		
2	$ 6.000.000		
3	$ 6.000.000		
4	$ 6.000.000		
5	$ 6.000.000		
6	$ 6.000.000		

Continúa

Nº	Costos fijos	Costo variable	Unidad producto
7	$ 6.000.000	$ 150.000	$ 1.000
8	$ 6.000.000	$ 225.000	$ 1.500
9	$ 6.000.000	$ 300.000	$ 2.000
10	$ 6.000.000	$ 375.000	$ 2.500
11	$ 6.000.000	$ 450.000	$ 3.000
12	$ 6.000.000	$ 525.000	$ 3.500
13	$ 6.000.000	$ 600.000	$ 4.000
14	$ 6.000.000	$ 675.000	$ 4.500
15	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
16	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
17	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
18	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
19	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
20	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
21	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
22	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
23	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
24	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
25	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
26	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
27	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
28	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
29	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
30	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
31	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
32	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
33	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
34	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
35	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000
36	$ 6.000.000	$ 750.000	$ 5.000



La gráfica nos muestra las proyecciones financieras en un período específico de cos tos fijos y variables de una fábrica desde su proceso de instalación has ta tiem- pos de producción, donde se observa una anualidad anticipada, un gradiente li neal creciente diferido y una anualidad diferida. Se solicita calcular el costo total de la fábrica a precios de hoy. Para resolver el ejercicio, hay que traer a valor presen te todos los valores a la tasa de interés con las correspondientes fórmulas de anua - lidades y gradientes. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés en las mis- mas referencias del tiempo y del período de la anualidad y el gradiente. En ton ces:

$$i = 30\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}30)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 = 0{,}0221044\ EM$$

Calculamos el valor presente de la anualidad anticipada:

$$P = 6.000.000\left[\frac{1-(1+0{,}0221044)^{-36}}{0{,}0221044}\right] = \$147.888.913{,}70$$

Calculamos el valor presente del gradiente lineal creciente diferido:

$$P = \left[\left(150.000 + \frac{75.000}{0{,}0221044}\right)\left[\frac{1-(1+0{,}0221044)^{-8}}{0{,}0221044}\right] - \frac{75.000}{0{,}0221044}\left(\frac{8}{(1+0{,}0221044)^{8}}\right)\right](1+0{,}0221044)^{-6}$$

$P = \$2.571.600{,}61$

Calculamos el valor presente de la anualidad vencida diferida:

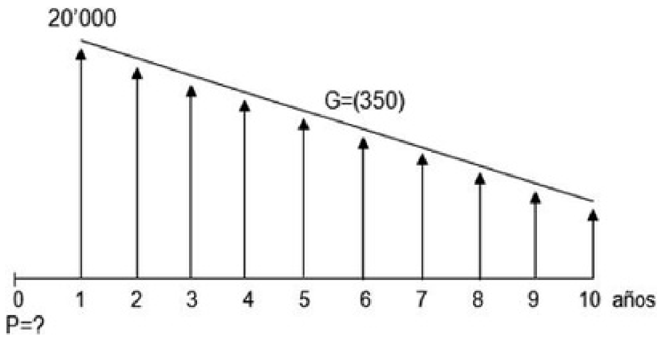
$$P = 750.000\left[\frac{1-(1+0{,}0221044)^{-22}}{0{,}0221044}\right](1+0{,}0221044)^{-14} = \$9.539.470{,}41$$

Calculamos los costos totales a precios de hoy, sumando cada uno de los valores presentes:

$CT = \$147.888.913{,}70 + \$2.571.600{,}61 + \$9.539.470{,}41$

$CT = \$160.000.000$

2. Una fábrica produce una utilidad de 20 millones de pesos durante el primer año, pero en el segundo año la utilidad disminuye en \$350.000 y sigue disminuyendo la misma cantidad anual debido al desgaste de los equipos. Si la fábrica no cambia equipos durante los próximos 10 años, suponiendo una tasa del 30% *EA*, calcule: a. El total de las ganancias de la fábrica, en pesos de comienzo del primer año y de final del décimo año; b. La utilidad del año 10.



La gráfica nos muestra las utilidades producidas en una fábrica, donde se observa un gradiente lineal decreciente, y se solicita calcular el total de las ganancias en pesos de hoy, a pesos futuros y la utilidad al final del ejercicio financiero. Para resolver el ejercicio, basta utilizar las fórmulas de valor presente y valor futuro de gradientes lineales teniendo en cuenta que el gradiente es negativo y la diferencia de estos dos resultados va a ser la utilidad obtenida al final de la línea del tiempo. Entonces:

Calculamos el valor presente del gradiente lineal decreciente:

$$P = \left[20.000 - \frac{(350)}{0,30}\left(1 - \frac{10*0,30}{(1+0,30)^{10}-1}\right)\right]\left[\frac{1-(1+0,30)^{-10}}{0,30}\right]$$

P = \$59.070.272,32

Calculamos el valor futuro del gradiente lineal decreciente:

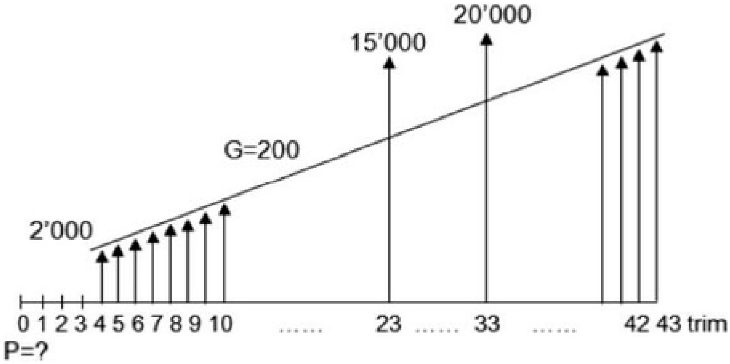
$$F = 20.000\left[\frac{(1+0,30)^{10}-1}{0,30}\right] - \frac{(350)}{0,30}\left[\frac{(1+0,30)^{10}-1}{0,30} - 10\right]$$

F = \$814.333.865,50

Calculamos la utilidad en el año 10:

U = \$814.333.865,50 – \$59.070.272,32 = \$755.263.593,18

3. Para un proyecto de inversión se adquiere un crédito para pagarlo mediante 40 cuotas trimestrales que se incrementan en \$200.000 cada trimestre. La primera cuota es de \$2.000.000 y debe pagarse exactamente un año después de firmado el pagaré; además, deben pagarse cuotas extraordinarias de 15 y 20 millones simul táneas con las cuotas ordinarias 20 y 30, respectivamente. Suponiendo una tasa de interés del 26% *ATV*, determine el valor del crédito.



La gráfica nos muestra la forma de financiación de un proyecto de inversión, el cual debe ser cancelado mediante cuotas bajo la modalidad de gradiente lineal creciente diferido y, adicional, dos cuotas extraordinarias simultáneas a las cuo- tas ordinarias de esos períodos. Se solicita determinar el valor del crédito. Para resolver el ejercicio, hay que traer a valor presente todos los valores a la tasa de interés de financiación con las correspondientes fórmulas de gradiente y valores pun tuales. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés a las mismas referencias del tiempo y del período del gradiente y los valores puntuales. Enton ces:

$$j = 26\%\ ATV \Rightarrow \frac{0,26}{4} = 0,065\ ET$$

Calculamos el valor presente del gradiente lineal creciente diferido:

$$P = \left[2.000.000 + \frac{200.000}{0,065}\left(1 - \frac{40(0,065)}{(1+0,065)^{40} - 1}\right)\right]\left[\frac{1-(1+0,065)^{-40}}{0,065}\right](1+0,065)^{-3}$$

P = \$51.246.378,47

Calculamos el valor presente de la cuota extraordinaria:

$$P = 15.000.000(1 + 0,065)^{-23} = \$3.524.116,69$$

Calculamos el valor presente de la otra cuota extraordinaria:

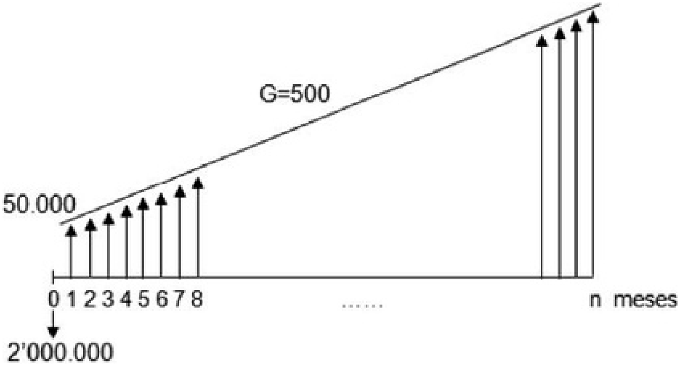
$$P = 20.000.000(1 + 0,065)^{-33} = \$2.503.184,95$$

Sumamos los valores presentes para determinar el valor del crédito:

P = \$51.246.378,47 + \$3.524.116,69 + \$2.503.184,95

P = \$57.273.680,11

4. ¿Cuántos pagos mensuales deben hacerse para cancelar una deuda de 2 millones, con intereses del 36% *NMV*, suponiendo que la primera cuota es de \$50.000 y que la cuota crece en \$500 mensualmente?



La gráfica nos muestra la forma de pago de una deuda mediante la modalidad de gradiente lineal creciente, y se pide determinar el número de pagos para sal- dar la obligación. Para resolver el ejercicio debemos primero plantear una ecua- ción de valor con el valor presente del gradiente menos el valor del crédito e igua lar a cero. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación a efectiva mensual vencida. Entonces:

$$j = 36\%\ AMV \Rightarrow \frac{0,36}{12} = 0,03\ EM$$

$$\left[50.000 + \frac{500}{0,03}\left(1 - \frac{n(0,03)}{(1+0,03)^{n} - 1}\right)\right]\left[\frac{1-(1+0,03)^{-n}}{0,03}\right] - 2.000.000 = 0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combinado con una interpolación. El método consiste en escoger un período de tiempo $n1$ y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otro pe- río do de tiempo $n2$ y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con $n1 = 96$ m; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$$\left[50.000 + \frac{500}{0,03}\left(1 - \frac{96(0,03)}{(1+0,03)^{96} - 1}\right)\right]\left[\frac{1-(1+0,03)^{-96}}{0,03}\right] - 2.000.000 = -1.620,18$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con $n2 = 98$ m, y la ecuación con su resultado será:

$$\left[50.000 + \frac{500}{0,03}\left(1 - \frac{98(0,03)}{(1+0,03)^{98} - 1}\right)\right]\left[\frac{1-(1+0,03)^{-98}}{0,03}\right] - 2.000.000 = 9.389,23$$

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

N.º Cuota	**V/r función**
96 →	21.620,18
n →	0
98 →	9.389,23

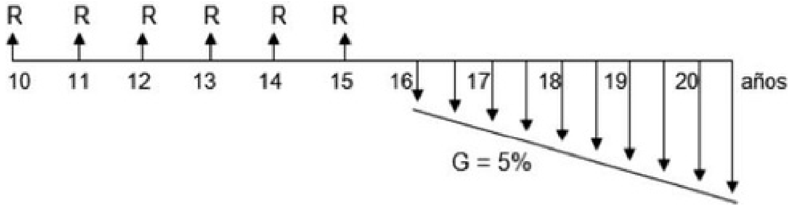
Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{n\ 96}{98\ 96} \qquad \frac{0\ (\ 1.620{,}18)}{9.389{,}23\ (\ 1.620{,}18)}$$

Al despejar n en la ecuación anterior tenemos el número de cuotas del crédito:

n = 96,2943 meses ù 97 meses

5. El 12 de febrero del año 2001 un niño cumple 10 años y el papá, muy precavido, ha decidido que ese día hará el primero de una serie de 6 depósitos anuales uniformes para completar los recursos suficientes para pagar la matrícula de su hijo en la universidad durante los 10 semestres que durará la carrera, asumiendo que el primer pago de matrícula lo deberá hacer el día que el hijo cumpla 16 años. Los depósitos serán consignados en un fondo que paga el 25% *EA*. En la fecha en que el niño cumple 10 años, la matrícula semestral cuesta $8.000.000 y se estima que aumentará un 5% semestral, que es el período de pago de la matrícula. Calcular el valor de cada depósito anual.



La gráfica nos muestra los depósitos uniformes que debe hacer un padre de familia para garantizar la educación superíor de su hijo una vez cumpla la edad para ello, y se solicita el cálculo de las cuotas fijas; se observa una anualidad anticipada y un gradiente geométrico creciente diferido. Para resolver el ejercicio, primero hay que establecer el valor de la matrícula universitaria en la fecha en que empieza a estudiar, luego traer a precios de hoy el gradiente geomé trico y tomar ese dato para finalmente establecer el valor de la anualidad con las correspondientes fórmulas de gradientes y anualidades. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés en las mismas referencias del tiempo y del período del gradiente. Entonces:

Calculamos el valor futuro de la matrícula universitaria a la edad de 16 años:

$$F = 8.000.000(1 + 0,05)^{12} = \$14.366.850,61$$

Calculamos el valor presente del gradiente geométrico diferido:

$$i = 25\%\ EA \Rightarrow \left[(1+0,25)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = 0,118034\ ES$$

$$P = 14.366.850,61\left[\frac{(1+0,05)^{10}(1+0,118034)^{-10} - 1}{0,05 - 0,118034}\right](1+0,118034)^{-11}$$

$P = 28.856.499,59$

Calculamos la anualidad anticipada:

$$R = 28.856.499,59\left[\frac{0,25}{1-(1+0,25)^{-6}}\right]\left[\frac{1}{(1+0,25)}\right]$$

$R = \$7.821.715,78$ semestrales anticipados

6. Una persona toma en arriendo un restaurante durante 1 año y asume que podrá vender exactamente 6.000 almuerzos mensuales a razón de $4.600 cada al muerzo. Calcula que el costo de los insumos será $1.800 por almuerzo, los cuales deberán ser adquiridos y pagados al principio de cada mes, y su valor aumentará un 2% mensual. El costo de la mano de obra será de $3.550.000 mensua les y, además, se requerirá de una inversión inicial de $25.000.000 para la adecuación del restaurante. Suponiendo un interés mensual del 3% mensual, ¿cuál será el valor de la ganancia (o pérdida a): a. En pesos de comienzo de año; b. En pesos a final de año?

Calculamos los ingresos:

6.000 almuerzos mensuales * $4.600 = $27.600.000

Calculamos los egresos:

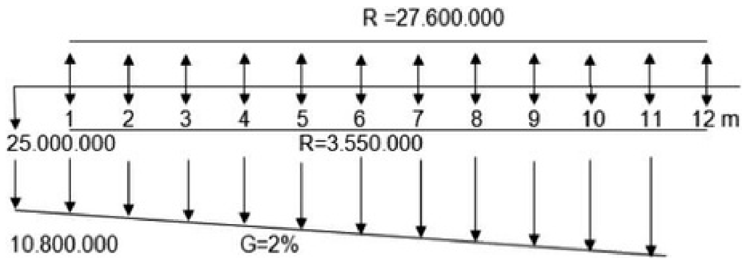
Insumos: 6.000 almuerzos mensuales * $1.800 c/u = $10.800.000 mes anticipado con incremento del 2% mensual.

Costo mano de obra: 3.550.000 mensuales

Inversión inicial: 25.000.000

Plasmamos la anterior información en una línea de tiempo:

Mes	Inversión	Insumos	Mano de obra	Ingresos	Totales
0	25.000.000	10.800.000			(35.800.000)
1		11.016.000	3.550.000	27.600.000	13.034.000
2		11.236.320	3.550.000	27.600.000	12.813.680
3		11.461.046	3.550.000	27.600.000	12.588.954
4		11.690.267	3.550.000	27.600.000	12.359.733
5		11.924.073	3.550.000	27.600.000	12.125.927
6		12.162.554	3.550.000	27.600.000	11.887.446
7		12.405.805	3.550.000	27.600.000	11.644.195
8		12.653.921	3.550.000	27.600.000	11.396.079
9		12.907.000	3.550.000	27.600.000	11.143.000
10		13.165.140	3.550.000	27.600.000	10.884.860
11		13.428.443	3.550.000	27.600.000	10.621.557
12			3.550.000	27.600.000	24.050.000



La gráfica nos muestra las proyecciones financieras (ingresos y egresos) de un restaurante en un tiempo determinado, y se pide calcular a precios de hoy y precios futuros las ganancias o pérdidas de la inversión a una tasa de oportunidad determinada. Para resolver la primera incógnita, debemos traer a valor presente los valores totales de cada período a la tasa de oportunidad y, para la segunda incógnita, debemos llevar a valor futuro los valores totales de cada período a la tasa de oportunidad. Para los cálculos tomamos en los ingresos la anualidad vencida y, en los egresos, la inversión inicial, la anualidad vencida y el gradiente geométrico creciente anticipado, restando los ingresos de los egresos para calcular ya sea a precios de hoy o futuros. Entonces:

Calculamos a precios de hoy el valor presente de los ingresos y de los egresos, restándolos para obtener la ganancia o pérdida de la inversión:

$$VPI = 27.600.000\left[\frac{1-(1+0,03)^{-12}}{0,03}\right] = \$274.730.510,22$$

$$VPE = 25.000.000 + 3.550.000\left[\frac{1-(1+0,03)^{-12}}{0,03}\right]$$

$$+\ 10.800.000\left[\frac{(1+0,02)^{12}(1+0,03)^{-12}}{0,02-0,03}\right](1+0,03) = \$183.235.469,40$$

$X = VPI - VPE = \$274.730.510,22 - 183.235.469,40 = \$91.495.040,81$

Calculamos a precios futuros el valor futuro de los ingresos y de los egresos, restándolos para obtener la ganancia o pérdida de la inversión:

$$VFI = 27.600.000\left[\frac{(1+0,03)^{12}-1}{0,03}\right] = \$391.700.015,90$$

$$VFE = 25.000.000(1+0,03)^{12} + 3.550.000\left[\frac{(1+0,03)^{12}-1}{0,03}\right]$$

$$+\ 10.800.000\left[\frac{(1+0,02)^{12}-(1+0,03)^{12}}{0,02-0,03}\right](1+0,03) = \$261.249.965,40$$

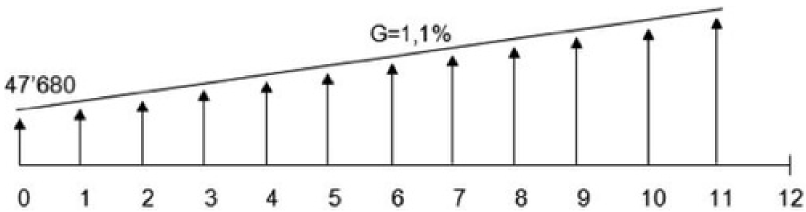
$X = VFI - VFE = \$ - \$ = \$130.450.050,53$

7. Una fábrica debe importar 80 toneladas mensuales de materia prima pagándola al principio de cada mes en dólares a razón de US\$200 la tonelada. Según la expe riencia, se estima que el peso se devalúa a razón del 1,1% mensual con relación al dólar. Si el cambio del dólar al comienzo del año es 1U\$=\$2.980, hallar el valor total de las importaciones de la fábrica en el transcurso de un año, en pe sos de principio del año y en pesos de final de año. Suponga que la fábrica tra baja con una tasa del 2,5% *EM*.

Calculamos el valor total en pesos del primer mes de importaciones:

Importaciones mensuales	=	80 toneladas
Precio en dólares por tonelada	=	U\$200
Cambio del dólar a comienzo año	=	\$2.980
VT = 80 3 200 3 2.980	=	\$47.680.000

Mes	Importaciones mes
0	$ 47.680.000
1	$ 48.204.480
2	$ 48.734.729
3	$49.270.811
4	$ 49.812.790
5	$ 50.360.731
6	$ 50.914.699
7	$ 51.474.761
8	$52.040.983
9	$ 52.613.434
10	$ 53.192.182
11	$ 53.777.296
12	$ 0



La gráfica nos muestra el valor en pesos de las importaciones mensuales proyectadas de una fábrica estimando la devaluación porcentual del peso colombiano con relación al dólar, y se solicita hallar a precios presentes y futuros el valor total de las importaciones en un tiempo determinado. Para resolver el ejercicio debemos calcular el valor presente y futuro con las fórmulas de gradiente geométrico creciente anticipado. Entonces:

Calculamos a pesos de hoy el valor total de las importaciones:

$$P = 47.680.000\left[\frac{(1+0,011)^{12}(1+0,025)^{-12}-1}{0,011-0,025}\right](1+0,025) = \$531.076.273,10$$

Calculamos a pesos futuros el valor total de las importaciones:

$$F = 47.680.000\left[\frac{(1+0,011)^{12}-(1+0,025)^{12}}{0,011-0,025}\right](1+0,025) = \$714.238.544,52$$

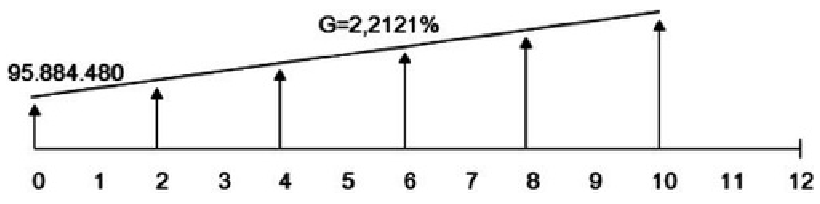
8. Resuelva el problema anterior suponiendo que el fabricante se compromete a cancelar el valor de cada dos importaciones de forma bimestral anticipada.

Mes	Importaciones mes	Importaciones bimestre
0	$ 47.680.000	$ 95.884.480
1	$ 48.204.480	
2	$ 48.734.729	$ 98.005.541
3	$49.270.811	
4	$ 49.812.790	$ 100.173.521
5	$ 50.360.731	
6	$ 50.914.699	$ 102.389.460
7	$ 51.474.761	
8	$52.040.983	$ 104.654.417
9	$ 52.613.434	
10	$ 53.192.182	$ 106.969.477
11	$ 53.777.296	
12		

Realizamos conversiones del porcentaje del gradiente geométrico y de la tasa de interés en las mismas referencias de los pagos:

$G = (1 + 0{,}011)2 = 2{,}2121\%$ incremento bimestral

$i = 2{,}5\%\ EM \Rightarrow (1 \quad 0{,}025)^{\frac{12}{6}} - 1 = 0{,}050625\ EB$



La gráfica nos muestra el pago en pesos de las importaciones bimestrales pro- yec tadas de una fábrica estimando la devaluación porcentual del peso co lom- bia no con relación al dólar, y se solicita hallar a precios presentes y futuros el va lor total de las importaciones en un tiempo determinado.

Para resolver el ejercicio debemos calcular el valor presente y futuro utili-

zando las fórmulas de gradiente geométrico creciente anticipado, teniendo en cuenta las conversiones del gradiente y la tasa de interés a períodos de los pagos. En ton ces:

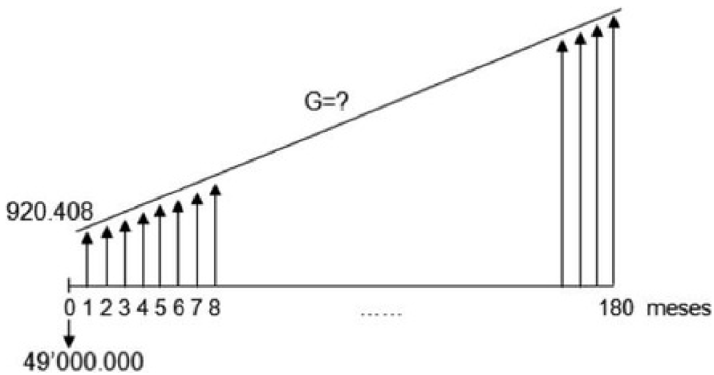
Calculamos a pesos de hoy el valor total de las importaciones:

$$P = 95.884.480\left[\frac{(1+0,022121)^{6}(1+0,050625)^{-6}-1}{0,022121-0,050625}\right](1+0,050625)=\$537.669.079$$

Calculamos a pesos futuros el valor total de las importaciones:

$$F = 95.884.480\left[\frac{(1+0,022121)^{6}-(1+0,050625)^{6}}{0,022121-0,050625}\right](1+0,050625)=\$723.105.135,48$$

9. Una entidad financiera presta a un cliente 49 millones, con un interés del 34,8% *NMV*. El deudor tiene un plazo de 15 años para amortizar la deuda mediante pagos mensuales. Suponiendo que la primera cuota es de $920.408 y debe pagar se al final del primer mes de plazo, ¿cuál debe ser el porcentaje de reajuste men sual de la cuota, para cancelar la deuda? Sugerencia: buscar el porcentaje de reajuste por interpolación.



La gráfica nos muestra la forma de pago de una deuda mediante la modalidad de gradiente geométrico creciente, y se pide determinar el porcentaje del reajus te para saldar la obligación en el tiempo determinado. Para resolver el ejerci cio debemos primero plantear una ecuación de valor con el valor presente del gradiente geométrico creciente menos el valor del crédito e igualar a cero. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de financiación a efectiva men- sual vencida. Entonces:

$$j = 34,8\%\ NMV \Rightarrow \frac{0,348}{12} = 0,029\ EM$$

$$920.408\left[\frac{(1+G)^{180}(1+0,029)^{-180}-1}{(G-0,029)}\right]-49.000.000=0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combinado con una interpolación. El método consiste en escoger un porcentaje de reajuste

$G1$ y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otro porcentaje de reajuste $G2$ y calculamos el valor que toma la función. Lo im portan te es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con $G1$ = 1,0 %; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$$920.408\left[\frac{(1+0,010)^{180}(1+0,029)^{-180}-1}{(0,010-0,029)}\right]-49.000.000=-2.249.108,47$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con $G2$ = 1,2 %, y la ecuación con su resultado será:

920.408 – 49.000.000 = 2.442.315,35

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lcl} \textbf{Gradiente} & & \textbf{V/r función} \\ 0{,}010 & \rightarrow & 22.249.108{,}47 \\ G & \rightarrow & 0 \\ 0{,}012 & \rightarrow & 2.442.315{,}35 \end{array}$$

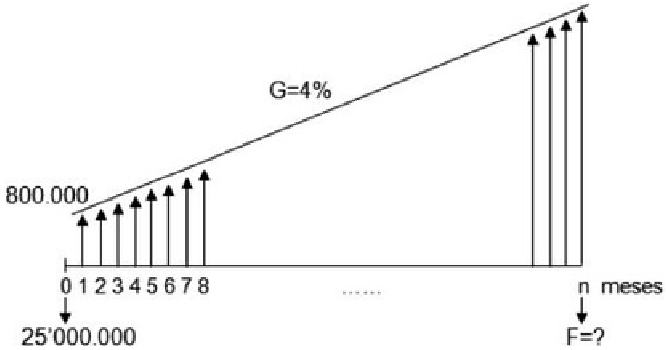
Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{G-0{,}010}{0{,}012-0{,}010}=\frac{0-(-2.249.108{,}47)}{2.442.315{,}35-(-2.249.108{,}47)}$$

Al despejar G en la ecuación anterior tenemos el porcentaje de reajuste:

$$G = 1{,}1\%$$

10. Una persona quiere comprar un automóvil que actualmente cuesta 25.000.000. Para tal fin, decide establecer un fondo mediante depósitos mensuales crecientes en un 4%. Si el primer depósito de $800.000 se hace al final de 1 mes, ¿en cuánto tiempo reunirá el dinero necesario para comprar el automóvil si su precio aumen ta cada mes un 1%? Suponga una tasa de 2% *EM*.



La gráfica nos muestra la forma de ahorrar para la adquisición de un vehículo en un tiempo determinado mediante la modalidad de gradiente geométrico creciente, y se pide determinar el número de pagos para reunir el dinero necesa rio para comprarlo. Para resolver el ejercicio debemos plantear una ecuación de valor con el valor futuro del gradiente menos el valor futuro del vehículo e igualar a cero. Entonces:

$$800.000\left[\frac{(1+0{,}04)^{n}-(1+0{,}02)^{n}}{(0{,}04-0{,}02)}\right]-25.000.000(1+0{,}01)^{n}=0$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combinado con una interpolación. El método consiste en escoger un período de tiempo $n1$ y calcular el valor que toma la función. Luego hacemos lo mismo con otro período de tiempo $n2$ y calculamos el valor que toma la función. Lo importante es que los resultados de las dos funciones sean de signo diferente.

De acuerdo a lo anterior, hacemos un primer ensayo con $n1 = 21$ m; entonces, al remplazar en la ecuación, esta ya no va ser igual a 0 y su resultado será:

$$800.000\left[\frac{(1+0{,}04)^{21}-(1+0{,}02)^{21}}{(0{,}04-0{,}02)}\right]-25.000.000(1+0{,}01)^{21}=-285.729{,}51$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con $n2 = 22$ m, y la ecuación con su resultado será:

$$800.000\left[\frac{(1+0{,}04)^{22}-(1+0{,}02)^{22}}{(0{,}04-0{,}02)}\right]-25.000.000(1+0{,}01)^{22}=1.839.668{,}33$$

Tomamos los resultados ya que representan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

N° Cuota	**V/r función**
21 →	2285.729,51
n →	0
22 →	1.839.668,33

Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden; por ejemplo: la dife rencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo como la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado derecho.

$$\frac{n\ 21}{22\ 21} \qquad \frac{0\ (\ 285.729{,}51)}{1.839.668{,}33\ (285.729{,}51)}$$

Al despejar n en la ecuación anterior tenemos el número de cuotas del crédito:

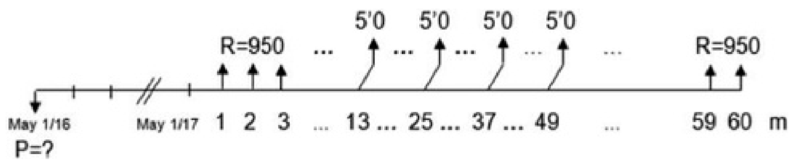
n = 21,13 meses ù 22 meses

11. El señor gerente tiene sobre el escritorio alternativas de los proveedores A y B que están en capacidad de entregar exactamente el equipo que la empresa necesita para el día 1 de mayo de 2016. Atendiendo solamente el factor costo, diga cuál alternativa escoge, justificando plenamente su respuesta, según las siguientes condiciones:

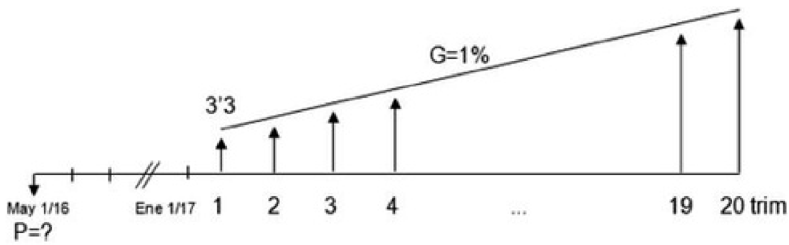
a. 60 cuotas mensuales vencidas de $950.000 cada una, pagando la primera el 1 de junio de 2017, y además cuotas extraordinarias de $5.000.000 simultáneas con las cuotas ordinarias 13, 25, 37 y 49, con una tasa de interés del 31% *EA*.

b. 20 cuotas trimestrales, que se incrementan en 1% cada trimestre, pagando la primera por valor de $3.300.000 el día 1 de abril de 2017, con una tasa de interés del 27% *AMV*.

a.



b.



Las gráficas nos muestran dos alternativas de pago de una empresa a proveedores para la compra de una máquina. Atendiendo solamente el factor costo, se pide escoger la más viable económicamente. Para resolver el ejercicio, debe- mos traer a valor presente cada uno de los valores de las dos alternativas, y lógi camente será la mejor la que obtenga menor valor presente. La primera al ter nativa se muestra como una anualidad vencida diferida con pagos ex tras simultáneos en períodos distintos de tiempo, para lo cual se usarán las fór mu - las de valor presente de anualidades y de valores puntuales. La segunda al ter- nativa se toma como un gradiente geométrico creciente diferido y se de be rá usar la fórmula de valor presente respectivo. No olvidar que hay que con ver tir la tasa de interés de financiación a efectiva vencida de los períodos de las al- ter nativas:

a. $i = 31\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}31)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 = 0{,}0227573\ EM$

$$P = 950.000\left[\frac{1-(1+0{,}0227573)^{-60}}{0{,}0227573}\right](1+0{,}0227573)^{-12}$$

$$+\ 5.000.000(1+0{,}0227573)^{-25} + 5.000.000(1+0{,}0227573)^{-37}$$

$$+\ 5.000.000(1+0{,}0227573)^{-49} + 5.000.000(1+0{,}0227573)^{-61}$$

$P = \$31.556.917{,}64$

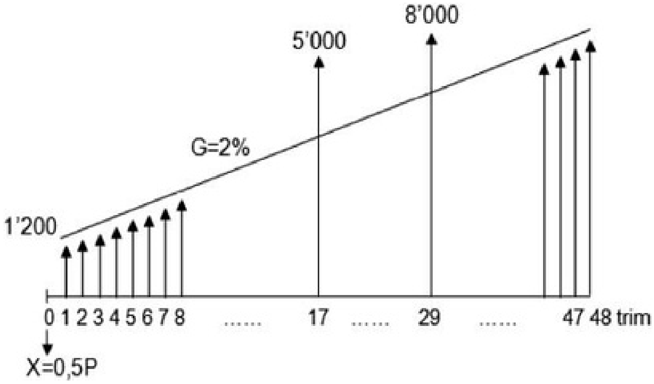
b. $j = 27\%\ NM \Rightarrow \frac{0{,}27}{12} = 0{,}0225\ EM \Rightarrow (1+0{,}0225)^{\left(\frac{12}{4}\right)} - 1 = 0{,}06903\ ET$

$$P = 3.300.000\left[\frac{(1+0{,}01)^{20}(1+0{,}069030)^{-20}-1}{0{,}01-0{,}069030}\right](1+0{,}069030)^{-8}$$

$P = 31.764.717{,}17$

La mejor alternativa es la *a* porque es la que arroja menor valor presente.

12. Una bodega se adquiere pagando una cuota inicial del 50% de su costo total. El saldo se debe cancelar en 12 años mediante cuotas trimestrales, que se in cremen tan en 2% cada trimestre. La primera cuota de \$1.200.000 se paga un trimes tre después de adquirir la bodega. Se acuerda además pagar cuotas extras de 5 y 8 millones respectivamente, simultáneamente con las cuotas 17 y 29. Suponien do un interés de 31% *EA*, determine el valor de la bodega.



La gráfica nos muestra la forma de financiación de una bodega, la cual debe ser cancelada mediante cuotas bajo la modalidad de gradiente geométrico creciente diferido y, adicional, dos cuotas extraordinarias simultáneas a las cuotas ordinarias de esos períodos. Se solicita determinar el valor de la bodega. Para resolver el ejercicio, hay que traer a valor presente todos los valores a la tasa de interés de financiación con las correspondientes fórmulas de gradiente geométrico y valores puntuales. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés a las mismas referencias del tiempo y del período del gradiente y los valores puntuales. Entonces:

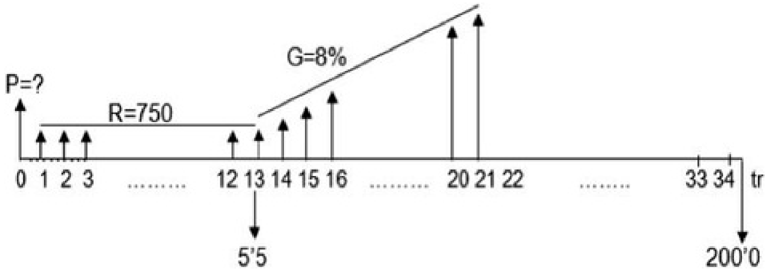
$$i = 31\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}31)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}0698375\ ET$$

$$P = 1.200.000\left[\frac{(1+0{,}02)^{48}(1+0{,}0698375)^{-48} - 1}{0{,}02 - 0{,}0698375}\right]$$

$$+\ 5.000.000(1+0{,}0698375)^{-17} + 8.000.000(1+0{,}0698375)^{-29}$$

$P = \$24.355.867{,}72$

13. Con el objeto de hacer reposición de activos en el futuro, su empresa creó un plan de ahorros efectuando un primer depósito el día 1 de marzo de 2012 en una entidad que ofrecía un interés del 19,5% *EA* y acuerda seguir consignando \$750.000 cada tres meses hasta el día 1 de junio de 2015, día en que se retirarán \$5.500.000, para comprar un computador. A partir del trimestre siguiente el valor de la consignación se incrementó en un 8% hasta el día 1 de junio de 2017, día en que se efectuará la última consignación. El fondo se mantendrá sin retiros ni depósitos hasta el día 1 de octubre de 2020, cuando se efectuará una compra de nuevos equipos de cómputo cuyo valor agota exactamente el total del fondo hasta ese momento, que asciende a la suma de \$200.000.000. Determine el valor del primer depósito.



La gráfica nos muestra un plan de ahorros en una entidad financiera con el áni mo de obtener un tiempo después el monto necesario para la reposición de ac tivos de una compañía, y se solicita determinar el valor del primer depósito. Pa ra resolver el ejercicio, debemos traer todos los valores a precios de hoy plan- tean do una ecuación de valor que arroje como resultado la diferencia entre las con signaciones y los retiros, utilizando las correspondientes fórmulas de va- lor presente para anualidad vencida, gradiente geométrico creciente dife rido y valores puntuales. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés a las mis- mas referencias del tiempo y del período del gradiente y los valores pun tuales. Entonces:

$$i = 19{,}5\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}195)^{\left(\frac{1}{4}\right)} - 1 = 0{,}0455435\ ET$$

$$P = 750.000\left[\frac{1-(1+0{,}0455435)^{-12}}{0{,}0455435}\right] - 5.500.000(1+0{,}0455435)^{-13}$$

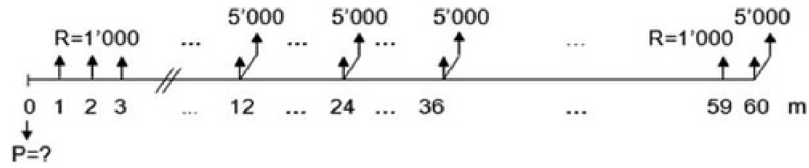
$$+\ 750.000\left[\frac{(1+0{,}08)^{9}(1+0{,}0455435)^{-9}-1}{0{,}08-0{,}0455435}\right](1+0{,}0455435)^{-12}$$

$$-\ 200.000.000(1+0{,}0455435)^{-\left(\frac{103}{3}\right)}$$

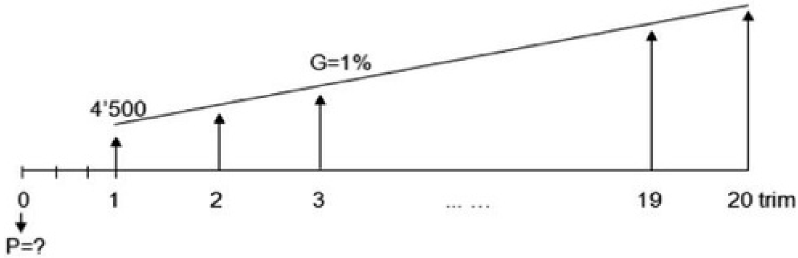
$P = \$35.289.295{,}83$

14. Usted tiene la posibilidad de elegir entre dos contratos de trabajo. El primer con trato es por 5 años, le pagarán \$1.000.000 mensuales fijos y una prima anual de \$5.000.000, pagadera año vencido, durante el mismo período del con trato. El se gundo contrato le ofrece 20 pagos trimestrales vencidos, que se incrementan en 1% cada trimestre, siendo el primer pago por valor de \$4.500.000. Considerando solamente el aspecto económico, y suponiendo que su tasa de interés de opor tuni dad es del 31% *EA* y que los dos contratos per miten comenzar a laborar en el mismo día, diga cuál sería su elección, jus- ti ficando plenamente su respuesta.

a.



b.



Las gráficas nos muestran dos formas de pago de contratos laborales. Conside- ran do solamente el aspecto económico, se pide escoger la mejor elección para el trabajador. Para resolver el ejercicio, debemos traer a valor presente cada uno de los valores de las dos alternativas y, lógicamente, será la mejor la que obtenga ma yor valor presente. La primera alternativa se muestra como dos anualidades ven cidas con diferentes períodos, para lo cual se usarán las fórmulas de valor pre sente de anualidades vencidas. La segunda alternativa se toma como un gra- dien te geométrico creciente vencido y se deberá usar la fórmula de valor presente respectivo. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés de oportunidad en las mismas referencias de los períodos de las alternativas. Entonces:

a. $i = 31\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}31)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 = 0{,}0227573\ EM$

$$P = 1.000.000\left[\frac{1-(1+0{,}0227573)^{-60}}{0{,}0227573}\right] + 5.000.000\left[\frac{1-(1+0{,}31)^{-5}}{0{,}31}\right]$$

$P = \$44.500.206{,}20$

b. $i = 31\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}31)^{\left(\frac{1}{4}\right)} - 1 = 0{,}0698375\ ET$

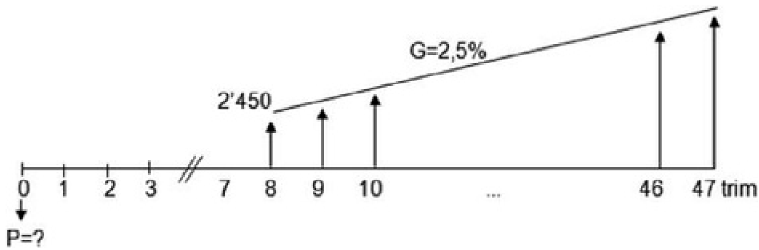
$$P = 4.500.000\left[\frac{(1+0{,}01)^{20}(1+0{,}0698375)^{-20} - 1}{0{,}01 - 0{,}0698375}\right]$$

$P = 51.418.282{,}72$

La mejor alternativa es la b porque es la que arroja mayor valor presente.

15. Su empresa compra equipos por valor de *X* pesos para pagarlos mediante cuotas tri mestrales, que se incrementan en 2,5% cada trimestre durante 10 años. La pri-

mera cuota es de \$2.450.000 y se paga 8 trimestres después de adquirir los equi pos. Suponiendo una tasa de interés del 41% *EA*, determine el valor de los equipos.



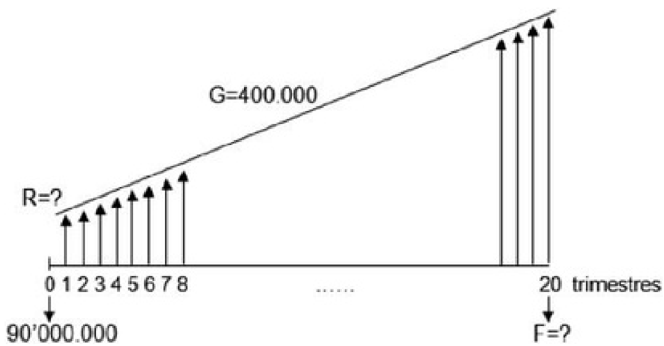
La gráfica nos muestra la forma de financiación para la compra de equipos, los cua les deben ser cancelados mediante cuotas bajo la modalidad de gradiente geo- métrico creciente diferido, y se solicita determinar el valor de contado de los activ os fijos. Para resolver el ejercicio, hay que hacer uso de la fórmula de va lor presente de un gradiente geométrico creciente diferido. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés a las mismas referencias del período del gra diente. Entonces:

$$i = 41\%\ EA \Rightarrow (1+0{,}41)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}089694\ ET$$

$$P = 2.450.000\left[\frac{(1+0{,}025)^{40}(1+0{,}089694)^{-40} - 1}{0{,}025 - 0{,}089694}\right](1+0{,}089694)^{-7}$$

$$P = \$18.962.579{,}59$$

16. Una compañía muy organizada adquiere equipos por valor de \$90.000.000, e inmediatamente el gerente ordena la creación de un fondo de reposición con miras a reunir el dinero necesario para comprar equipos nuevos al final de su vida útil, que se estima en 5 años. Se acuerda que al fondo se consignen cuotas trimestrales que se incrementan \$400.000 cada trimestre, en una entidad que ofrece un rendimiento del 11% *NMV*, comenzando exactamente a los 3 meses de comprados los equipos. Se estima que el valor de los equipos se incrementa el 20% anual y que al final de su vida útil los equipos viejos podrán venderse por el 40% de su costo, valor que se abonará como cuota inicial de los nuevos equipos. Determine el valor de las cuotas que deben consignarse en el fondo.



La gráfica nos muestra los depósitos por realizar en un fondo mediante la modalidad de gradiente lineal creciente con el objeto de reunir un monto para cubrir la compra de unos equipos en un tiempo determinado. Para resolver el ejercicio debemos primero hallar el valor futuro de los equipos al final de su vida útil, restar el valor de salvamento, tomarlo valor como valor futuro del gradiente lineal creciente y hallar el valor del primer depósito. No olvidar que hay que convertir la tasa de interés a las mismas referencias del período del gradiente lineal. Entonces:

Calculamos el valor futuro de los equipos al final de la vida útil:

$F = 90.000.000(1 + 0,20)^5 = \$223.948.800$

Restamos el valor de salvamento:

$F = \$223.948.800 - 90.000.000(0,40) = \$187.948.800$

Tomamos este valor como valor futuro del gradiente lineal creciente y calculamos el valor del primer depósito:

$F = \$187.948.800$

$j = 11\%\ NMV \Rightarrow \frac{0,11}{12} = 0,0091666\ EM \Rightarrow (1 + 0,0091666)^{\left(\frac{12}{4}\right)} - 1 = 0,027753\ ET$

$n = 20$ trimestres

$G = \$400.000$

$$R = \frac{F - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

$$R = \frac{187.948.800 - \frac{400.000}{0,027753}\left[\frac{(1+0,027753)^{20} - 1}{0,027753} - 20\right]}{\left[\frac{(1+0,027753)^{20} - 1}{0,027753}\right]} = \$3.718.266$$

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, A. (2005). *Matemáticas financieras.* McGraw-Hill. Baca, G. (2000). *Matemáticas financieras*. Editorial Politécnico Grancolombiano. Baca Currea, G. (2002). *Ingeniería económica*. Fondo Educativo Panamericano. Baca Urbina, G. (2000). *Fundamentos de ingeniería económica*. McGraw-Hill. Meza Orozco, J. (2011). *Matemáticas financieras aplicadas*. Ecoe Ediciones. Rueda Ramírez, H. (2002). *Lecciones de matemáticas financieras*. Editorial Universidad Surcolombiana.

SISTEMA DE INFORMACIÓN EN LÍNEA

www.ecoeediciones.com

Sistema de Información en Línea

SIL

Actualización permanente

Bienvenido

Estimado lector, en esta página se encuentra el serial de registro al **Sistema de Información en Línea (SIL)** de Ecoe Ediciones.

Si ingresa al sistema usted podrá:

- Obtener información adicional sobre los libros adquiridos de nuestro fondo.
- Consultar y descargar actualizaciones permanentes de los textos.

Instrucciones para registrarse en el Sistema de Información en Línea - SIL - de Ecoe Ediciones.

1. Ingrese a www.ecoeediciones.com y haga clic en - SIL-
2. Regístrese en el SIL completando la información solicitada.
3. El sistema le enviará un correo electrónico para que confirme su registro.
4. Una vez registrado, el usuario siempre será su e-mail y tenga en cuenta la clave de acceso para futuras consultas. Solo puede registrarse una vez.

Serial de registro:

EJERCICIOS RESUELTOS DE
MATEMÁTICAS FINANCIERAS

La ingeniería económica comprende una gran variedad de temas, entre estos las matemáticas nancieras, cuyas aplicaciones en los negocios, las organizaciones y el mercado nanciero son presentadas en este libro a través de ejercicios prácticos desarrollados, teniendo en cuenta las interpretaciones nan- cieras de cada uno.

El libro contiene 103 ejercicios organizados de manera que el lector pueda aprender, compren- der y aplicar los principios y técnicas para tomar decisiones nancieras; solucionar sus dudas, complementando sus conocimientos matemá- ticos y nancieros. Los problemas están resuel- tos de la forma más fácil, según el autor, pero sin negar las diferentes formas de solucionarlos. Por ello, el lector puede intentar resolverlos a su manera, de modo que adquiera habilidades de pensamiento lógico y nancieras.

El libro está dirigido a estudiantes y docentes de programas de Economía, Administración, Ingenierías y lectores en general interesados en las matemáticas nancieras.

Colección: Ciencias empresariales
Área: Contabilidad y nanzas

Incluye

- Aplicación del mayor número de secuencias con el n de facilitar los procesos de enseñanza aprendizaje.
- Planteamientos rigurosos y claros.
- La oportunidad de interpretar, analizar y asociar sus conocimientos a problemas nancieros que solamente están propuestos y no tienen procedimiento en otros libros.

Julio César Andrade López

Administrador Financiero de la U. Surcolombiana de Neiva, Especialista en Dirección nanciera y desarrollo organizacional de la U. Central de Bogotá, Magister en Administración pública de la ESAP de Bogotá. Se ha desempeñado como docente de pregrado y posgrado por más de 15 años en las diferentes universidades del Surcolombiano, en asignaturas como matemáticas nancieras, Excell nanciero, ingeniería económica, entre otras. Actualmente es docente tiempo completo de su alma mater.

ECOE EDICIONES

www.ecoeediciones.com

ISBN 978-958-771-523-1

9 789587 715231

e-ISBN 978-958-771-524-8