GOBIERNO de GUATEMALA
DR. ALEJANDRO GIAMMATTEI

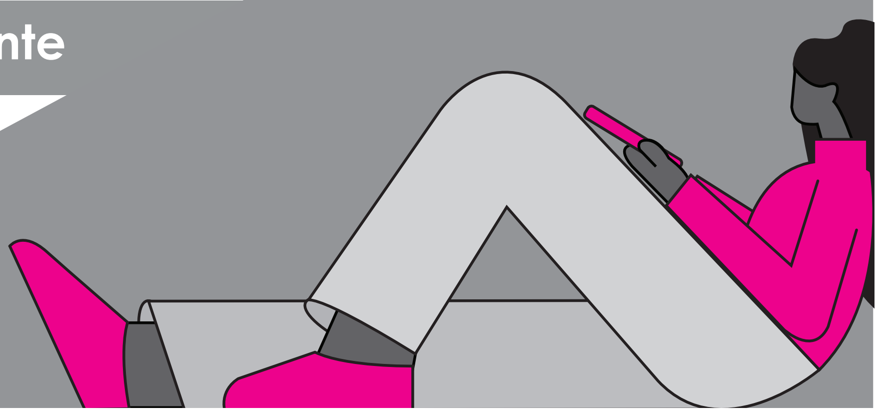
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Matemática 2

Nivel de Educación Media

Ciclo Básico

Texto para el estudiante



GOBIERNO de GUATEMALA
DR. ALEJANDRO GIAMMATTEI
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Claudia Patricia Ruíz Casasola de Estrada
Ministra de Educación

Edna Portales de Núñez
Viceministra Técnica de Educación

María del Rosario Balcarcel Minchez
Viceministra Administrativa de Educación

Carmelina Espantzay Serech de Rodríguez
Viceministra de Educación Bilingüe e Intercultural

Vilma Lorena León Oliva de Hernández
Viceministra de Educación Extraescolar y Alternativa

Autores

Cayetano Salvador Salvador	Digecade/Mineduc- Coordinador del equipo de expertos matemáticos.
Alejandro Asijtuj Simón	Digecade/Mineduc
Andrea Marisol Morales Rabanales	Digecade/Mineduc
Agustín Pelicó Pérez	Digebi/Mineduc
José Alfredo Marroquín Azurdia	Digebi/Mineduc

Diseño de portada
Lucía Alejandra Morales González

Con el apoyo de autoría y edición del Equipo de Expertos Matemáticos de la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media -EFPEM-.

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)

6ª calle 1-87 zona 10.
Teléfono: (502) 24119595
www.mineduc.gob.gt

Cuarta edición
Impresión 2023

Documento de apoyo para estudiantes de Liceo Pierre de Fermat

GOBIERNO de GUATEMALA
DR. ALEJANDRO GIAMMATTEI
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Queridos estudiantes:

El presente texto fue elaborado por el Ministerio de Educación en coordinación con la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media (EFPEM) de la Universidad de San Carlos de Guatemala y el apoyo técnico de la Agencia de Cooperación Internacional de Japón (JICA), por medio del ¨proyecto de mejoramiento de la calidad de la educación matemática en el ciclo básico¨.

Es un recurso educativo que favorecerá el desarrollo del pensamiento analítico y reflexivo, a través de las diferentes actividades de aprendizaje. Está diseñado para que puedan trabajar de manera autónoma.

Los invito a continuar estudiando con responsabilidad y dedicación para lograr sus metas y construir un futuro mejor. ¡Juntos saldremos adelante!

Atentamente,

Claudia R. de Estrada

M.Sc. Claudia Ruíz Casasola de Estrada
Ministra de Educación

Presentación del Texto

En cada página del Texto se desarrolla una clase que tiene diferentes momentos y se identifican con las siguientes letras:

P La letra P representa el problema inicial. En este momento tiene que leer, comprender el problema y buscar soluciones, tomando en cuenta lo aprendido en clases anteriores. En algunas páginas aparece la letra P con un subíndice, lo que indica que hay más de un problema.

S La letra S representa la solución del problema inicial. En algunas páginas aparece la letra S con un subíndice, lo que indica que la solución corresponde al problema con el mismo subíndice.

C La letra C representa la conclusión. En la conclusión se le presenta la idea principal de la clase, tales como una definición o un procedimiento. En algunas páginas aparece la letra C con un subíndice que la relaciona con los subíndices del problema y la solución.

E La letra E representa los ejercicios. Es para reforzar lo aprendido. Se presentan ejercicios con diferentes niveles de dificultad. En algunas páginas aparece la letra E con un subíndice, lo que indica que hay más de un grupo de ejercicios.

Información complementaria

En el Texto se utilizan íconos que indican lo siguiente.

El Quetzal le indica conceptos nuevos e importantes para comprender el tema de la clase.

La mano le recuerda los conceptos aprendidos en clases anteriores.

Puede hacer uso de la calculadora para resolver las operaciones de manera rápida.

Índice

Unidad 1
Álgebra .... 5 - 53

Unidad 2
Función .... 54 - 79

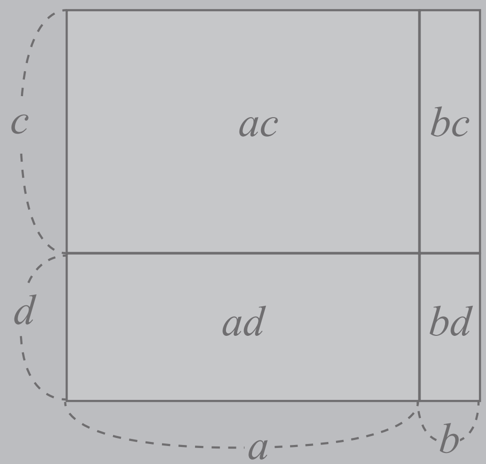
Unidad 3
Etnomatemática .... 80 - 94

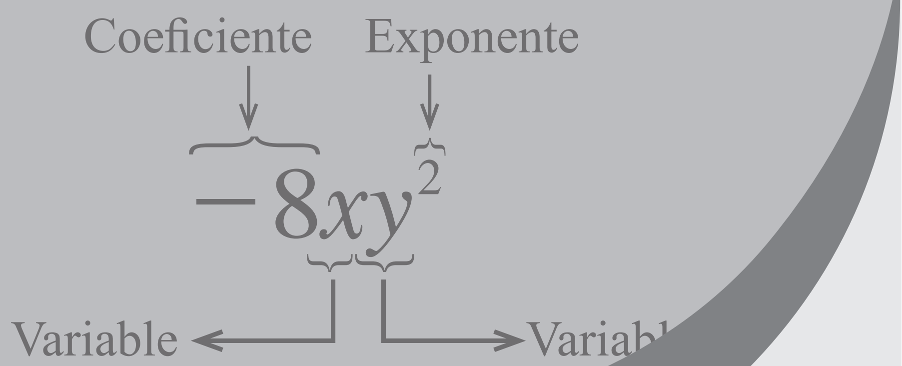
Unidad 4
Aritmética .... 95 - 117

Unidad 5
Geometría .... 118 - 168

Unidad 6
Estadística .... 169 - 183

Unidad 7
Lógica .... 184 - 200





Unidad 1 •

Álgebra

Sección 1 Expresiones algebraicas

Clase 1 Repaso del valor numérico de una expresión algebraica

P

Encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas.

a. $10x+2$, cuando $x=6$

b. $3y-4$, cuando $y=-3$

c. $8a+15$, cuando $a=5$

S

a. $10x+2 = 10\times 6+2$ — Se sustituye la variable x por 6.
$= 60+2$
$= 62$

b. $3y-4 = 3\times(-3)-4$ — Se sustituye la variable y por -3.
$=-9-4$
$=-13$

c. $8a+15 = 8\times 5+15$ — Se sustituye la variable a por 5.
$= 40+15$
$= 55$

C

Al sustituir una variable por un número entero en una expresión algebraica, se obtiene el valor numérico de la expresión. Durante la sustitución es recomendable colocar el número negativo entre paréntesis para evitar errores de cálculo.

E

Encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas.

a. $5x+1$, cuando $x=4$

b. $8x-3$, cuando $x=-2$

c. $-9x+1$, cuando $x=2$

d. $15x-4$, cuando $x=2$

e. $4y+7$, cuando $y=-5$

f. $6y-10$, cuando $y=1$

g. $-6z+3$, cuando $z=-3$

h. $-7z-2$, cuando $z=-4$

Sección 1 Expresiones algebraicas

Clase 2 Repaso de multiplicación y división de expresiones algebraicas

P

Calcule las siguientes expresiones.

a. $-3(4x-2)$

b. $(-16+24x)\div 8$

S

a. $-3(4x-2)=(-3)\times 4x+(-3)\times(-2)$
$=-12x+6$

Se multiplica -3 por cada término de la expresión.

b. Forma 1.

$$(-16+24x)\div 8=(-16+24x)\times\frac{1}{8}$$
$$=-\frac{16}{8}+\frac{24x}{8}$$
$$=-2+3x$$

Se multiplica cada término de la expresión por $\frac{1}{8}$ (recíproco de 8).

Forma 2.

$$(-16+24x)\div 8=\frac{-16+24x}{8}$$
$$=-\frac{16}{8}+\frac{24x}{8}$$
$$=-2+3x$$

Se divide cada término de la expresión entre 8.

C

Para multiplicar un número por cada término del polinomio, se aplica la propiedad distributiva:

$$a(x+y)=a\times x+a\times y$$
$$=ax+ay$$

Para dividir un polinomio entre un número, se aplica una de las siguientes formas:

Forma 1. $(x+y)\div a=(x+y)\times\frac{1}{a}$
$=\frac{x}{a}+\frac{y}{a}$

Forma 2. $(x+y)\div a=\frac{x+y}{a}$
$=\frac{x}{a}+\frac{y}{a}$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $-2(6x+1)$

b. $(5+35a)\div 5$

c. $-6(-4x+2)$

d. $(-12-6a)\div(-3)$

e. $(5x-4)\times 7$

f. $(8-40a)\div 4$

g. $-2(-9x-10)$

h. $(-40+16a)\div(-8)$

Sección 1 Expresiones algebraicas

Clase 3 Coeficiente, variable, exponente y grado de una expresión algebraica

P

Con base en las siguientes expresiones algebraicas: $3x^2$, $-8xy^2$.

a. Identifique las partes de cada expresión algebraica.
b. Encuentre el grado de cada expresión algebraica.

S

a.

$$\underbrace{3}_{\text{Coeficiente}}\underbrace{x}_{\text{Variable}}{}^{\overbrace{2}^{\text{Exponente}}}$$

$$\overbrace{-8}^{\text{Coeficiente}}\underbrace{x}_{\text{Variable}}\underbrace{y}_{\text{Variable}}{}^{\overbrace{2}^{\text{Exponente}}}$$

En la expresión algebraica $3x^2$: el 3 representa el coeficiente, x la variable y 2 el exponente de la variable.

En la expresión $-8xy^2$: el -8 representa el coeficiente, x y y representan las variables, y 2 el exponente de la variable y.

b. Sume los exponentes de las variables de una expresión algebraica para encontrar el grado de la expresión.

El grado de la expresión $3x^2$ es 2.

El grado de la expresión $-8xy^2$ es 3, porque $1 + 2 = 3$.

$-x = -1x$

$x = x^1$

C

Las partes que conforman un término son: coeficiente, variables y exponentes.
El grado de una expresión algebraica se encuentra sumando todos los exponentes de las variables.

E

Complete la siguiente tabla.

	Expresión algebraica	Coeficiente	Variable	Grado
a.	$2x^3$			
b.	$-xyz$			
c.	$6xy^4$			
d.	$-4a^2b$			

Sección 1 Expresiones algebraicas

Clase 4 Concepto de polinomio (binomio y trinomio)

P

Clasifique las siguientes expresiones algebraicas, según el número de sus términos.

a. $9x + 5y$
b. $18a^4 + 7a^3b + b^2$
c. $3z^4$
d. $12b - 11$
e. $3x^2y^4 - 2x^3y^3 + 4x^4y^2$
f. xyz

A cada parte de una expresión algebraica que se conecta por los signos de suma, se le llama término.

S

a. $9x + 5y$ tiene dos términos: $9x$, $5y$.
b. $18a^4 + 7a^3b + b^2$ tiene tres términos: $18a^4$, $7a^3b$, b^2.
c. $3z^4$ tiene un término: $3z^4$.
d. $12b - 11$ tiene dos términos: $12b$, -11.
e. $3x^2y^4 - 2x^3y^3 + 4x^4y^2$ tiene tres términos: $3x^2y^4$, $-2x^3y^3$, $4x^4y^2$.
f. xyz tiene un término: xyz.

c y f están formadas por un término.
a y d están formadas por dos términos.
b y e están formadas por tres términos.

La expresión $12b - 11$, se expresa también $12b + (-11)$. Entonces, los términos de $12b - 11$ son $12b$ y -11.

C

Una expresión algebraica se clasifica según el número de sus términos.

Clasificación		Característica
Monomio		Una expresión algebraica formada por un solo término.
Polinomio		Una expresión algebraica formada por dos o más términos.
	Binomio	Una expresión algebraica formada por dos términos.
	Trinomio	Una expresión algebraica formada por tres términos.

E

Complete la siguiente tabla.

	Expresión algebraica	No. de términos	Nombre de la expresión algebraica
Ej.	$9x + 5$	dos	binomio
a.	$x + 2y$		
b.	$7x^2$		
c.	$a + b + 5$		
d.	$3x^2 + 1$		
e.	$6abc$		
f.	$2x^2 - 6y - z$		
g.	$30y^4z^2 - 5y^3z + 4y^2$		
h.	$8a + 7b$		

Sección 1 Expresiones algebraicas

Clase 5 Reducción de términos semejantes en un polinomio

P

Reduzca los términos semejantes de las siguientes expresiones algebraicas.

a. $10x - 8a - 7x + 12a$
b. $-10x^2 - 20x - 16x + 18x^2$

En un polinomio los términos semejantes poseen las mismas variables y los mismos exponentes.

Ejemplo: $4ax + a^2 - 2ax$

Términos semejantes

S

a. $10x - 8a - 7x + 12a = 12a - 8a + 10x - 7x$ Se agrupan los términos semejantes.
$= (12 - 8)a + (10 - 7)x$ Se reducen los términos semejantes.
$= 4a + 3x$

b. $-10x^2 - 20x - 16x + 18x^2 = 18x^2 - 10x^2 - 20x - 16x$ Se agrupan los términos semejantes.
$= (18 - 10)x^2 + (-20 - 16)x$ Se reducen los términos semejantes.
$= 8x^2 + (-36)x$
$= 8x^2 - 36x$

C

Para reducir términos semejantes en un polinomio:

Paso 1. Se agrupan los términos semejantes.
Paso 2. Se reducen los términos semejantes.

E

Reduzca los términos semejantes de las siguientes expresiones algebraicas.

a. $3a - 7b - 2a + 5b$
b. $-4x - 2y - 5x + 7y$
c. $2a + 3b - a + 5b$
d. $-5y + x + 6y - 8x$
e. $8a + 9b + 2b - 5a$
f. $b + 7ab - 4ab - b$
g. $-x^2 + 9y + x^2 - 8y$
h. $8x^2 - x + 3x - 4x^2$
i. $4x - 7y - 5y - 8x$
j. $-7ab + 3b - 5ab - 7b$
k. $5a^2 + a - 11a + 8a^2$
l. $-ab + a + 9ab - 9a$

Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 1 Suma de polinomios

P

Calcule las siguientes expresiones.

a. $(9x+8y)+(6x-y)$
b. $(-10x-2y)+(-8x-7y)$

S

a. $(9x+8y)+(6x-y)$

$= 9x+8y+6x-y$ Se reescriben los polinomios sin paréntesis, conservando el mismo signo para cada término.

$= 9x+6x+8y-y$ Se agrupan los términos semejantes.

$= 15x+7y$ Se reducen los términos semejantes.

Sumar verticalmente $(9x+8y)+(6x-y)$:

Se colocan los términos semejantes en columna.

$$\begin{array}{rr} & 9x+8y \\ (+) & 6x-y \\ \hline & 15x+7y \end{array}$$

Se reducen los términos semejantes.

b. $(-10x-2y)+(-8x-7y)$

$=-10x-2y-8x-7y$ Se reescriben los polinomios sin paréntesis, conservando el mismo signo para cada término.

$=-10x-8x-2y-7y$ Se agrupan los términos semejantes.

$=-18x-9y$ Se reducen los términos semejantes.

Sumar verticalmente $(-10x-2y)+(-8x-7y)$:

Se colocan los términos semejantes en columna.

$$\begin{array}{rr} & -10x-2y \\ (+) & -8x-7y \\ \hline & -18x-9y \end{array}$$

Se reducen los términos semejantes.

C

Para sumar polinomios:

Paso 1. Se reescriben los polinomios sin paréntesis, conservando el mismo signo para cada uno de los términos.
Paso 2. Se agrupan los términos semejantes.
Paso 3. Se reducen los términos semejantes.

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $(2a-8)+(3a+11)$
b. $(4b+4)+(6-b)$
c. $(-x-3)+(-8x-7)$
d. $(9x+3y)+(4y-x)$
e. $(7y-6x)+(-5y+2x)$
f. $(-9ab-11a)+(-9a-3ab)$
g. $(8x-10y)+(-15y+12x)$
h. $(14a+16b)+(7a-6b)$
i. $(22a-9x)+(12a-15x)$

Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 2 Resta de polinomios

P

Calcule las siguientes expresiones.

a. $(14x+7y)-(4x-2y)$
b. $(-3a+5b)-(-6a-8b)$

S

a. $(14x+7y)-(4x-2y)$

$= 14x+7y-4x+2y$ Se reescriben los polinomios sin paréntesis, cambiando el signo de cada término del segundo polinomio.

$= 14x-4x+7y+2y$ Se agrupan los términos semejantes.

$= 10x+9y$ Se reducen los términos semejantes.

Restar verticalmente $(14x+7y)-(4x-2y)$:

$$\begin{array}{rr} & 14x+7y \\ (+) & -4x+2y \\ \hline & 10x+9y \end{array}$$

Se colocan los términos semejantes en columna.
Se cambia el signo de los términos del segundo polinomio.
Se reducen los términos semejantes.
Se cambia la operación a una suma.

b. $(-3a+5b)-(-6a-8b)$

$=-3a+5b+6a+8b$ Se reescriben los polinomios sin paréntesis, cambiando el signo de cada término del segundo polinomio.

$= 6a-3a+5b+8b$ Se agrupan los términos semejantes.

$= 3a+13b$ Se reducen los términos semejantes.

Restar verticalmente $(-3a+5b)-(-6a-8b)$:

$$\begin{array}{rr} & -3a+\ \ 5b \\ (+) & +6a+\ \ 8b \\ \hline & 3a+13b \end{array}$$

Se colocan los términos semejantes en columna.
Se cambia el signo de los términos del segundo polinomio.
Se reducen los términos semejantes.
Se cambia la operación a una suma.

C

Para restar polinomios:

Paso 1. Se reescriben los polinomios sin paréntesis, cambiando el signo de cada término del segundo polinomio.
Paso 2. Se agrupan los términos semejantes.
Paso 3. Se reducen los términos semejantes.

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $(4a-2)-(6a+3)$

b. $(8b+9)-(7b-5)$

c. $(-10-3x)-(-4x-8)$

d. $(3x+2y)-(-5y+x)$

e. $(4x+4y)-(-4x-y)$

f. $(-3ab-8a)-(-5a-6ab)$

g. $(10x-5y)-(15y+12x)$

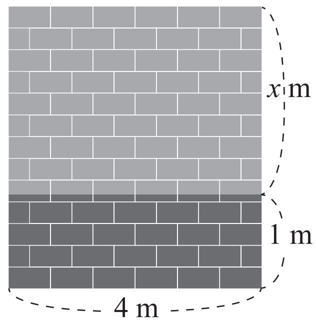
h. $(18a+30x)-(14a-20x)$

i. $(-12x-16y)-(-10x+14y)$

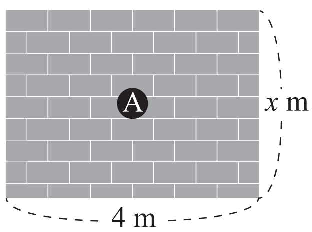
Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

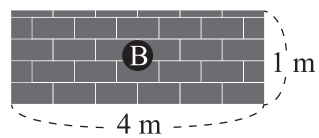
Clase 3 Multiplicación de un número y un polinomio

Ana y Luis pintaron una pared de su casa con dos colores diferentes, tal como lo muestra la figura que está abajo. Encuentre el área total pintada.



El área total pintada se puede encontrar de la siguiente manera:





(Área de la pared A) $= 4 \times x$
$= 4x$

(Área de la pared B) $= 4 \times 1$
$= 4$

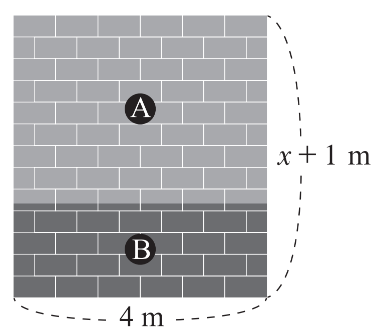
(Área total) = (área de la pared A) + (área de la pared B)
$= 4x + 4$

Respuesta: el área total pintada es $4x + 4$ m^2.

La pared tiene 4 m de ancho por $x + 1$ m de altura.

Por tanto, el área total pintada también se puede encontrar:

$4 \times (x + 1) = 4x + 4$



Respuesta: el área total pintada es $4x + 4$ m^2.

Para multiplicar un número por un polinomio, se calcula el número por cada término del polinomio, utilizando la propiedad distributiva.

$$a(x + y) = ax + ay$$

Calcule las siguientes expresiones.

a. $4(2x + 7y)$
b. $-5(x + 6y)$
c. $6(4x - y)$
d. $-8(-5a - 3b)$
e. $10(-9a + 2b)$
f. $-3(8a + 7b)$
g. $7(10x - 5y)$
h. $-2(7x - 20y)$
i. $9(2x + 5y)$

Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 4 División de un polinomio entre un número

P

Calcule la siguiente expresión.
$(12x - 9a) \div 3$

S

Forma 1.

$$\begin{aligned}(12x - 9a) \div 3 &= (12x - 9a) \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{12x}{3} - \frac{9a}{3}\\ &= 4x - 3a\end{aligned}$$

Se multiplica cada término del polinomio por $\frac{1}{3}$ (recíproco de 3).

Forma 2.

$$\begin{aligned}(12x - 9a) \div 3 &= \frac{12x - 9a}{3}\\ &= \frac{12x}{3} - \frac{9a}{3}\\ &= 4x - 3a\end{aligned}$$

Se divide cada término del polinomio entre 3.

C

Para dividir un polinomio entre un número:

Forma 1. Se multiplica cada término del polinomio por el recíproco del divisor:

$$(x + y) \div a = (x + y) \times \frac{1}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a}, \text{ donde } a \neq 0$$

Forma 2. Se divide cada término del polinomio entre el divisor:

$$(x + y) \div a = \frac{x + y}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a}, \text{ donde } a \neq 0$$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $(14x - 6y) \div 2$

b. $(8x + 64y) \div (-4)$

c. $(15x - 20y) \div 5$

d. $(18a + 30b) \div (-6)$

e. $(14a - 35b) \div 7$

f. $(16a + 24b) \div (-8)$

g. $(15a - 30x) \div 3$

h. $(20x + 32y) \div (-4)$

i. $(18a - 81b) \div 9$

Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 5 Operaciones combinadas de polinomios con división entre un número

P

Calcule la siguiente expresión.

$$\frac{5x+9y}{2}-\frac{3y-x}{4}$$

S

Forma 1.

$\frac{5x+9y}{2}-\frac{3y-x}{4}=\frac{2(5x+9y)}{4}-\frac{3y-x}{4}$	Se buscan fracciones equivalentes con igual denominador.
$=\frac{2(5x+9y)-(3y-x)}{4}$	Se expresa como una sola fracción.
$=\frac{10x+18y-3y+x}{4}$	Se multiplica.
$=\frac{10x+x+18y-3y}{4}$	Se agrupan los términos semejantes.
$=\frac{11x+15y}{4}$	Se reducen los términos semejantes.

Forma 2.

$\frac{5x+9y}{2}-\frac{3y-x}{4}=\frac{1}{2}(5x+9y)-\frac{1}{4}(3y-x)$	Se expresa como la multiplicación de un número y un polinomio.
$=\frac{5x}{2}+\frac{9y}{2}-\frac{3y}{4}+\frac{x}{4}$	Se multiplica.
$=\frac{5x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{9y}{2}-\frac{3y}{4}$	Se agrupan los términos semejantes.
$=\frac{2\times 5x+x}{4}+\frac{2\times 9y-3y}{4}$	Se buscan fracciones equivalentes con igual denominador.
$=\frac{10x+x}{4}+\frac{18y-3y}{4}$	
$=\frac{11x}{4}+\frac{15y}{4}$	Se reducen los términos semejantes.

C

Para calcular una expresión combinada de polinomios con división entre un número:

Forma 1:	Forma 2:
Paso 1. Se buscan fracciones equivalentes con igual denominador.	Paso 1. Se expresa como la multiplicación de un número y un polinomio.
Paso 2. Se expresa como una sola fracción.	Paso 2. Se multiplica.
Paso 3. Se multiplica.	Paso 3. Se agrupan los términos semejantes.
Paso 4. Se agrupan los términos semejantes.	Paso 4. Se buscan fracciones equivalentes con igual denominador.
Paso 5. Se reducen los términos semejantes.	Paso 5. Se reducen los términos semejantes.

E

Calcule las siguientes expresiones.

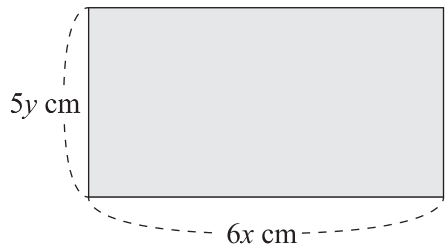
a. $\frac{5x+4y}{6}+\frac{3x-y}{2}$ b. $\frac{2a-3b}{8}-\frac{3a-b}{4}$ c. $\frac{6x-10y}{2}+\frac{x+6y}{5}$

d. $\frac{5a-6b}{2}-\frac{2a+4b}{3}$ e. $\frac{a+2b}{4}+\frac{b-2a}{3}$ f. $\frac{4x+5y}{3}-\frac{5x-6y}{4}$

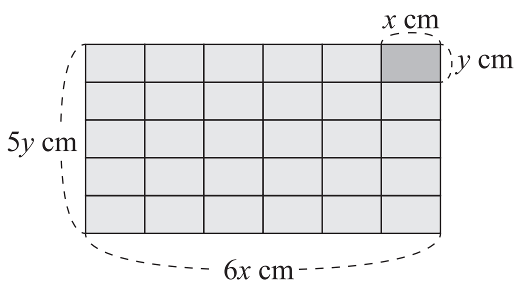
Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 6 Multiplicación de un monomio y otro monomio

P Encuentre el área del rectángulo que tiene $6x$ cm de base y $5y$ cm de altura.



S Para encontrar el área del rectángulo, divida el rectángulo en x cm de base y y cm de altura.



Luego, multiplique $6x \times 5y$. El resultado es el área del rectángulo original.

$$\begin{aligned} 6x \times 5y &= 6 \times x \times 5 \times y \\ &= 6 \times 5 \times x \times y \\ &= 30xy \end{aligned}$$

Respuesta: $30xy$ cm^2

C Para multiplicar un monomio por un monomio, se multiplican todos los coeficientes y las variables de ambos monomios.

Ejemplo:

a. $4a \times (-x)$
$= 4 \times a \times (-1) \times x$
$= 4 \times (-1) \times a \times x$
$= -4ax$

b. $(3b)^2$
$= 3b \times 3b$
$= 3 \times b \times 3 \times b$
$= 3 \times 3 \times b \times b$
$= 9b^2$

c. $2a^3 \times 8b$
$= 2 \times a \times a \times a \times 8 \times b$
$= 2 \times 8 \times a \times a \times a \times b$
$= 16a^3b$

E Calcule las siguientes expresiones.

a. $6a \times 2b$
b. $4ab \times (-3a)$
c. $-7a \times 5b$
d. $-9x \times (-10y)$
e. $-8y \times 6x$
f. $11a \times (-4x)$
g. $(10y)^2$
h. $-y^3 \times (4x)^2$
i. $(2a)^3 \times 6b$

Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 7 División de monomio entre monomio

P

Calcule las siguientes expresiones.

a. $20xy \div (-5y)$
b. $24a^3b \div 4ab$

S

a. $20xy \div (-5y) = \dfrac{20xy}{-5y}$ Se expresa como fracción.

$= -\dfrac{20 \times x \times y}{5 \times y}$

$= -\dfrac{{}^{4}\cancel{20} \times x \times \cancel{y}^{1}}{\cancel{5}_{1} \times \cancel{y}_{1}}$ Se simplifica.

$= -4x$

b. $24a^3b \div 4ab = \dfrac{24a^3b}{4ab}$ Se expresa como fracción.

$= \dfrac{24 \times a \times a \times a \times b}{4 \times a \times b}$

$= \dfrac{{}^{6}\cancel{24} \times \cancel{a}^{1} \times a \times a \times \cancel{b}^{1}}{\cancel{4}_{1} \times \cancel{a}_{1} \times \cancel{b}_{1}}$ Se simplifica.

$= 6a^2$

C

Para dividir un monomio entre un monomio, se expresa como una fracción y se simplifica.

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $12a \div 6a$
b. $14ab \div (-2a)$
c. $-15ab \div 3b$
d. $-18x \div (-9x)$
e. $24a^2x \div (-8x)$
f. $-30xy^3 \div 6xy$
g. $-49x^3 \div (-7x)$
h. $-50xyz^2 \div 5x$
i. $64x^2y \div (-8xy)$

Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 8 Multiplicación y división combinadas con monomios

P

Calcule las siguientes expresiones.

a. $3a^2 \times 4b \div (-2ab)$

b. $-15x^4y^3 \div 5xy^2 \times (-8y)$

S

a.
$$
\begin{aligned}
& 3a^2 \times 4b \div (-2ab) \\
&= 3a^2 \times 4b \times \left(-\frac{1}{2ab}\right) \\
&= -\frac{3a^2 \times 4b}{2ab} \\
&= -\frac{3 \times 4 \times a \times a \times b}{2 \times a \times b} \\
&= -\frac{3 \times \cancel{4}^{2} \times \cancel{a}^{1} \times a \times \cancel{b}^{1}}{\cancel{2}_{1} \times \cancel{a}_{1} \times \cancel{b}_{1}} \\
&= -(3 \times 2 \times a) \\
&= -6a
\end{aligned}
$$

Se expresa la división como multiplicación utilizando recíproco.

Se simplifica.

b.
$$
\begin{aligned}
& -15x^4y^3 \div 5xy^2 \times (-8y) \\
&= -15x^4y^3 \times \frac{1}{5xy^2} \times (-8y) \\
&= \frac{-15x^4y^3 \times (-8y)}{5xy^2} \\
&= \frac{(-15) \times (-8) \times x \times x \times x \times x \times y \times y \times y \times y}{5 \times x \times y \times y} \\
&= \frac{(-\cancel{15}^{3}) \times (-8) \times \cancel{x}^{1} \times x \times x \times x \times \cancel{y}^{1} \times \cancel{y}^{1} \times y \times y}{\cancel{5}_{1} \times \cancel{x}_{1} \times \cancel{y}_{1} \times \cancel{y}_{1}} \\
&= (-3) \times (-8) \times x \times x \times x \times y \times y \\
&= 24x^3y^2
\end{aligned}
$$

Se expresa la división como multiplicación utilizando recíproco.

Se expresa como fracción.

Se simplifica.

C

Para calcular una expresión combinada de monomios con multiplicaciones y divisiones:

Paso 1. Se expresa la división como una multiplicación utilizando recíproco.
Paso 2. Se expresa la operación como una fracción.
Paso 3. Se determina el signo de la fracción mediante la regla de los signos.
Paso 4. Se expresa a la forma más simple.

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $3a^2 \times 6ab \div 9ab$

b. $16xy^2z \div (-4y) \times 2z$

c. $5a^2b \times (-8b) \div (-10b^2)$

d. $-12x^4y^3 \div (-x) \times 4xy$

e. $-6a^3b \times 3b^2 \div (-6ab^2)$

f. $(-2xy)^2 \times (-2y) \div (-4y^2)$

Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 9 Valor numérico de polinomios

P Encuentre el valor numérico del polinomio $7x-8y$, si $x=3$, $y=2$.

S Para encontrar el valor numérico del polinomio, se sustituyen las variables x por 3 y y por 2.

$$\begin{aligned} 7x-8y &= 7\times \mathbf{3}-8\times \mathbf{2} \\ &= 21-16 \\ &= 5 \end{aligned}$$

C El valor numérico de un polinomio se obtiene al sustituir las variables de la expresión por números.

Ejemplo:

a. $5a^2+6a-10$, si $a=4$

$$\begin{aligned} 5a^2+6a-10 &= 5\times \mathbf{4}^2+6\times \mathbf{4}-10 \\ &= 5\times 16+6\times 4-10 \\ &= 80+24-10 \\ &= 94 \end{aligned}$$

b. $2c+3c^2-5$, si $c=-6$

$$\begin{aligned} 2c+3c^2-5 &= 2\times(\mathbf{-6})+3\times(\mathbf{-6})^2-5 \\ &= 2\times(-6)+3\times 36-5 \\ &= -12+108-5 \\ &= 91 \end{aligned}$$

E Encuentre el valor numérico de los siguientes polinomios.

a. $8x+4y$, si $x=4$, $y=2$

b. $6a-2b$, si $a=2$, $b=5$

c. $4x^2+5x-6$, si $x=2$

d. $2y+3y^2-7$, si $y=3$

e. $3a-4b-12$, si $a=6$, $b=-3$

f. $x+8y-10$, si $x=-6$, $y=-1$

g. $3a-5b+8$, si $a=-5$, $b=2$

h. $5a^2+6a-7$, si $a=-2$

i. $-7a-6a^2+11$, si $a=-3$

Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 10 Multiplicación de un monomio y un binomio

P

Calcule las siguientes expresiones.

a. $x(x+4)$
b. $-x(x+3)$

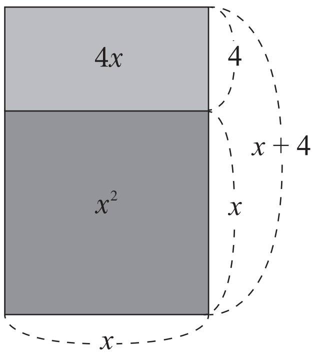
S

a. Considere el área del rectángulo cuya base es x y altura es $x+4$.

$x(x+4) = x \times x + x \times 4$

$= x^2 + 4x$

Se multiplica el monomio por cada término del binomio.



b. $-x(x+3) = (-x) \times x + (-x) \times 3$ Se multiplica el monomio por cada término del binomio.

$= -x^2 - 3x$

C

Para multiplicar un monomio por un binomio, se calcula el monomio por cada término del binomio, aplicando la propiedad distributiva.

$$a(b+c) = ab + ac$$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $x(x+6)$ b. $-x(x+7)$ c. $b(b-5)$ d. $-a(a-8)$

e. $x(x+5)$ f. $y(y-6)$ g. $-y(y-3)$ h. $-x(x+9)$

i. $2a(a+9)$ j. $3a(a-2)$ k. $-5y(2y+3)$ l. $4x(x-5)$

m. $-6x(x+3)$ n. $3b(7b+9)$ o. $-7y(6y+8)$ p. $8a(8a+4)$

Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 11 Multiplicación de un binomio y un binomio (1)

P

Calcule la siguiente expresión.
$(x+2)(y+5)$

S

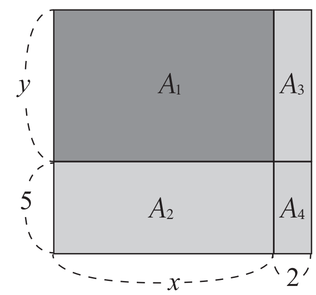
Forma 1.
Sustituya $(y+5)$ por W, y calcule como una multiplicación de binomio y monomio.

$$\begin{aligned}(x+2)(y+5) &= (x+2)\times W\\ &= x\times W + 2\times W\\ &= x(y+5)+2(y+5) \qquad \text{Se sustituye } W \text{ por } (y+5).\\ &= xy+5x+2y+10\end{aligned}$$

Forma 2.
Considere el área del rectángulo cuya base es $x+2$ y altura es $y+5$.
Por lo que el área $(A)=(x+2)(y+5)$.
Se puede obtener el área total sumando cada una de las áreas que forman el rectángulo.

$$(x+2)(y+5)=(A_1)+(A_2)+(A_3)+(A_4)$$

$(A_1)=x\times y = xy$
$(A_2)=x\times 5 = 5x$
$(A_3)=2\times y = 2y$
$(A_4)=2\times 5 = 10$

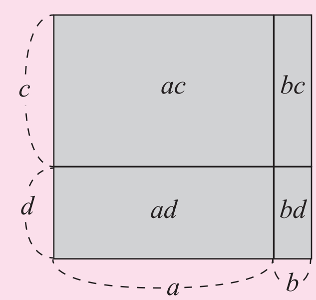


Por tanto, $(x+2)(y+5)=xy+5x+2y+10$.

C

Para multiplicar un binomio por un binomio, se calcula cada término del primer binomio por cada término del segundo binomio.

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= a\overset{1}{\times} c + a\overset{2}{\times} d + b\overset{3}{\times} c + b\overset{4}{\times} d\\ &= ac+ad+bc+bd\end{aligned}$$



Ejemplo:

$$\begin{aligned}(3x+6)(y+2) &= 3x\times y + 3x\times 2 + 6\times y + 6\times 2\\ &= 3xy+6x+6y+12\end{aligned}$$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $(x+3)(y+6)$ b. $(x+4)(y+2)$ c. $(a+8)(b+10)$ d. $(a+7)(b+3)$

e. $(2x+1)(y+4)$ f. $(3x+4)(y+6)$ g. $(5a+3)(b+1)$ h. $(6a+2)(b+5)$

Sección 2 Operaciones básicas con polinomios

Clase 12 Multiplicación de un binomio y un binomio (2)

P

Calcule la siguiente expresión.
$(2x-1)(y+4)$

S

Forma 1.
Sustituya $(y+4)$ por W, y calcule como una multiplicación de binomio y monomio.

$$\begin{aligned}(2x-1)(y+4) &= (2x-1)\times W\\ &= 2x\times W-1\times W\\ &= 2x\times(y+4)-1\times(y+4) \qquad \text{Se sustituye } W \text{ por } (y+4).\\ &= 2xy+8x-y-4\end{aligned}$$

Forma 2.
Escriba el primer binomio $2x-1$ como una suma de la siguiente manera $2x+(-1)$.
Multiplique los binomios, como lo aprendido en la clase anterior.

$$\begin{aligned}(2x-1)(y+4) &= [2x+(-1)]\times(y+4)\\ &= 2x\times y+2x\times 4+(-1)\times y+(-1)\times 4\\ &= 2xy+8x+(-y)+(-4)\\ &= 2xy+8x-y-4\end{aligned}$$

La resta de $a-b$ puede escribirse como:
$a-b=a+(-b)$

C

Para multiplicar un binomio por un binomio, se calcula cada término del primer binomio por cada término del segundo binomio.

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(-5a-4b)(2c-3) &= (-5a)\times 2c+(-5a)\times(-3)+(-4b)\times 2c+(-4b)\times(-3)\\ &= -10ac+15a-8bc+12b\end{aligned}$$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $(x-3)(y+4)$

b. $(-6a-5)(8b-4)$

c. $(2x-3y)(6a-1)$

d. $(7y+4)(2z-5)$

e. $(-5a-3)(-4b+2)$

f. $(8+2x)(3a-4y)$

g. $(2+9a)(-6b-2)$

h. $(-4a-3x)(8y-5)$

Sección 3 Productos notables

Clase 1 Producto de la forma $(x+a)(x+b)$

P

Desarrolle la siguiente expresión.
$(x+2)(x+3)$

S

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3) &= x\times x + x\times 3 + 2\times x + 2\times 3\\ &= x^2+3x+2x+6\\ &= x^2+(3+2)x+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

Se multiplica utilizando la propiedad distributiva.

C

Un producto de la forma $(x+a)(x+b)$ se desarrolla:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + \overbrace{(a+b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3) &= x^2 + \overbrace{(2+3)}^{\text{Suma de 2 y 3}}x + \underbrace{2\times 3}_{\text{Producto de 2 y 3}}\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

Ejemplo:

a. $(x+6)(x+4) = x^2+(6+4)x+6\times 4$
$= x^2+10x+24$

b. $(x-2)(x+5) = x^2+(-2+5)x+(-2)\times 5$
$= x^2+3x-10$

$(x-2)(x+5) = [x+(-2)](x+5)$

c. $(x-7)(x-3) = x^2+(-7-3)x+(-7)\times(-3)$
$= x^2-10x+21$

$(x-7)(x-3) = [x+(-7)][x+(-3)]$

E

Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x+4)(x+2)$

b. $(x+3)(x-5)$

c. $(y-4)(y+1)$

d. $(y-6)(y-8)$

e. $(x+8)(x+9)$

f. $(y+6)(y-2)$

g. $(y-7)(y+1)$

h. $(x-5)(x-6)$

Sección 3 Productos notables

Clase 2 Cuadrado de un binomio (1)

P Desarrolle la siguiente expresión.
$(x+3)^2$

S
$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= (x+3)(x+3)\\ &= x^2+(3+3)x+3\times 3\\ &= x^2+6x+9\end{aligned}$$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

C Un producto de la forma $(x+a)^2$ se desarrolla:

$$(x+a)^2 = x^2+\overbrace{2a}^{\text{Dos veces } a}x+\underbrace{a^2}_{\text{Cuadrado de } a}$$

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2+\overbrace{2\times 3}^{\text{Dos veces } 3}\times x+\underbrace{3^2}_{\text{Cuadrado de } 3}\\ &= x^2+6x+9\end{aligned}$$

Al resultado del desarrollo del cuadrado de la suma de un binomio se le llama **trinomio cuadrado perfecto**.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(x+8)^2 &= x^2+2\times 8\times x+8^2\\ &= x^2+16x+64\end{aligned}$$

E Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x+2)^2$

b. $(y+4)^2$

c. $(x+5)^2$

d. $(x+6)^2$

e. $(x+7)^2$

f. $(y+9)^2$

Sección 3 Productos notables
Clase 3 Cuadrado de un binomio (2)

P

Desarrolle la siguiente expresión.

$(x-5)^2$

S

$$\begin{aligned}(x-5)^2 &= (x-5)(x-5)\\ &= x^2 + (-5-5)x + (-5)\times(-5)\\ &= x^2 - 10x + 25\end{aligned}$$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

C

Un producto de la forma $(x-a)^2$ se desarrolla:

$$(x-a)^2 = x^2 - \overbrace{2a}^{\text{Dos veces } a}x + \underbrace{a^2}_{\text{Cuadrado de } a}$$

$$(x-5)^2 = x^2 - \overbrace{2\times 5}^{\text{Dos veces } 5}\times x + \underbrace{5^2}_{\text{Cuadrado de } 5}$$

Al resultado del desarrollo del cuadrado de la diferencia de un binomio se le llama **trinomio cuadrado perfecto**.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(x-9)^2 &= x^2 - 2\times 9\times x + 9^2\\ &= x^2 - 18x + 81\end{aligned}$$

E

Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x-3)^2$

b. $(y-4)^2$

c. $(x-6)^2$

d. $(y-1)^2$

e. $(x-7)^2$

f. $(y-8)^2$

Sección 3 Productos notables

Clase 4 Producto de la forma $(x+a)(x-a)$

P

Desarrolle la siguiente expresión.
$(x+3)(x-3)$

S

$$(x+3)(x-3) = x^2 + (3-3)x + 3\times(-3)$$
$$= x^2 + 0x - 9$$
$$= x^2 - 9$$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

C

Un producto de la forma $(x+a)(x-a)$ se desarrolla:

$$(x+a)(x-a) = x^2 - \overbrace{a^2}^{\text{Cuadrado de } a}$$

$$(x+3)(x-3) = x^2 - \overbrace{3^2}^{\text{Cuadrado de 3}}$$
$$= x^2 - 9$$

Al resultado del desarrollo del producto de la suma y la diferencia de binomios se le llama **diferencia de cuadrados**.

Ejemplo:

$$(x-5)(x+5) = x^2 - 5^2$$
$$= x^2 - 25$$

E

Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x+2)(x-2)$

b. $(y+4)(y-4)$

c. $(x-6)(x+6)$

d. $(y-1)(y+1)$

e. $(x+7)(x-7)$

f. $(x-8)(x+8)$

g. $(x-9)(x+9)$

h. $(y+10)(y-10)$

Sección 3 Productos notables

Clase 5 Producto de la forma $(ax+b)(ax+c)$

P

Desarrolle la siguiente expresión.
$(2x+2)(2x+3)$

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

S

Desarrolle utilizando sustitución.

$$
\begin{aligned}
& (2x+2)(2x+3) & \\
&= (W+2)(W+3) && \text{Se sustituye } 2x \text{ por } W \text{ en la expresión inicial.}\\
&= W^2+(2+3)W+2\times 3 && \text{Se aplica la forma: } (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.\\
&= W^2+5W+6 & \\
&= (2x)^2+5\times 2x+6 && \text{Se sustituye } W \text{ por } 2x.\\
&= 4x^2+10x+6 &
\end{aligned}
$$

C

Un producto de la forma $(ax+b)(ax+c)$ se desarrolla:

$$
\begin{aligned}
(ax+b)(ax+c) &= (ax)^2+(b+c)(ax)+bc\\
&= a^2x^2+(ab+ac)x+bc
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

a. $$
\begin{aligned}
(3y+1)(3y+4) &= (3y)^2+(1+4)\times 3y+1\times 4\\
&= 3^2y^2+5\times 3y+4\\
&= 9y^2+15y+4
\end{aligned}
$$

b. $$
\begin{aligned}
(2y-4)(2y+6) &= (2y)^2+(-4+6)\times 2y+(-4)\times 6\\
&= 2^2y^2+2\times 2y+(-24)\\
&= 4y^2+4y-24
\end{aligned}
$$

E

Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(2x+4)(2x+2)$

b. $(4a+3)(4a-5)$

c. $(5y-4)(5y+1)$

d. $(3b-7)(3b-3)$

e. $(2a+2)(2a-3)$

f. $(3x+1)(3x+6)$

g. $(4x-5)(4x+3)$

h. $(6y-5)(6y-8)$

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 1 Repaso de ecuaciones de primer grado

P Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x + 3 = 5$
b. $x - 2 = 6$
c. $4x = 12$
d. $\frac{x}{2} = 5$

S

Forma 1.

a.
$$x + 3 = 5$$
$$x + 3 - 3 = 5 - 3$$
$$x = 2$$

b.
$$x - 2 = 6$$
$$x - 2 + 2 = 6 + 2$$
$$x = 8$$

c.
$$4x = 12$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$$
$$x = \frac{12}{4}$$
$$x = 3$$

d.
$$\frac{x}{2} = 5$$
$$\frac{x}{2} \times 2 = 5 \times 2$$
$$x = 5 \times 2$$
$$x = 10$$

Forma 2.

$$x + 3 = 5$$
$$x = 5 - 3$$
$$x = 2$$

Se traslada el 3 del miembro izquierdo al miembro derecho realizando la operación inversa.

$$x - 2 = 6$$
$$x = 6 + 2$$
$$x = 8$$

Se traslada el 2 del miembro izquierdo al miembro derecho realizando la operación inversa.

$$4x = 12$$
$$4 \times x = 12$$
$$x \times 4 = 12$$
$$x = 12 \div 4$$
$$x = 3$$

Se traslada el 4 del miembro izquierdo al miembro derecho dividiendo el miembro derecho entre 4.

$$\frac{x}{2} = 5$$
$$x \div 2 = 5$$
$$x = 5 \times 2$$
$$x = 10$$

Se traslada el 2 del miembro izquierdo al miembro derecho multiplicando el miembro derecho por 2.

C

Cuando a se traslada de un miembro al otro miembro de la ecuación:

$x + a = b$	$\longrightarrow$	$x = b - a$	La suma cambia a resta.
$x - a = b$	$\longrightarrow$	$x = b + a$	La resta cambia a suma.
$ax = b$ $(x \times a = b)$	$\longrightarrow$	$x = \frac{b}{a}$ $(x = b \div a)$	La multiplicación cambia a división.
$\frac{x}{a} = b$ $(x \div a = b)$	$\longrightarrow$	$x = ab$ $(x = b \times a)$	La división cambia a multiplicación.

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x + 4 = 7$
b. $x - 5 = 3$
c. $5x = 25$
d. $\frac{x}{3} = 4$
e. $x + 6 = 5$
f. $x - 7 = 7$
g. $4x = -24$
h. $\frac{x}{5} = -3$

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 2 Significado del sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

P

Juan vende mandarinas y manzanas. Ayer vendió 7 frutas y obtuvo 9 quetzales en total. El precio era 1 quetzal por cada mandarina y 2 quetzales por cada manzana. Considere x como el número de mandarinas y y como el número de manzanas.

a. Escriba una ecuación que represente la condición "vendió 7 frutas".

b. Escriba una ecuación que represente la condición "obtuvo 9 quetzales".

S

a. La ecuación que representa la condición "vendió 7 frutas" es $x + y = 7$.

b. La ecuación que representa la condición "obtuvo 9 quetzales" es $x + 2y = 9$.

Las ecuaciones como $x + y = 7$ y $x + 2y = 9$ son ecuaciones con dos variables.

C

A un conjunto de dos o más ecuaciones, tal como se muestra abajo, se le llama **sistema de ecuaciones**.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

E

María compró 8 postres y pagó 20 quetzales en total. Los 8 postres consistieron en galletitas y pastelitos. Cada galletita le costó 2 quetzales y 1 pastelito costó 3 quetzales. Considere x como el número de galletitas y y como el número de pastelitos.

a. Escriba una ecuación que represente la condición "compró 8 unidades de postre en total".

b. Escriba una ecuación que represente la condición "pagó 20 quetzales en total".

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 3 Resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

P

Recuerde el planteamiento de la clase anterior: Juan vende mandarinas y manzanas. Ayer vendió 7 frutas y obtuvo 9 quetzales en total. El precio era 1 quetzal por cada mandarina y 2 quetzales por cada manzana.

Considerando a x como el número de mandarinas y a y como el número de manzanas, las siguientes ecuaciones representan las condiciones:
"vendió 7 frutas" $\rightarrow x + y = 7$
"obtuvo 9 quetzales" $\rightarrow x + 2y = 9$

A fin de encontrar los valores de x y y que satisfacen las dos condiciones al mismo tiempo, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 7 & ① \\ x + 2y = 9 & ② \end{cases}$

a. Complete la siguiente tabla.
Ejemplo: si $x = 0$ y $y = 7$, entonces $x + y = 7$ y $x + 2y = 14$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
$x+y$	7	7	7	7	7			
$x+2y$	14							

b. ¿Cuáles son los valores de x y y que satisfacen las condiciones del sistema de ecuaciones?

S

a.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
$x+y$	7	7	7	7	7	7	7	7
$x+2y$	14	13	12	11	10	9	8	7

b. La tabla muestra que $x = 5$ y $y = 2$ satisfacen al mismo tiempo las condiciones de las ecuaciones ① y ②.

$$\begin{cases} x + y = 5 + 2 = 7 & ① \\ x + 2y = 5 + 4 = 9 & ② \end{cases}$$

Por tanto, la solución es $x = 5$ y $y = 2$. Es decir, el número de mandarinas que Juan vendió ayer es 5 y el número de manzanas es 2.

C

Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar el conjunto de valores que satisfacen las ecuaciones del sistema al mismo tiempo. A este conjunto de valores se le llama **solución del sistema de ecuaciones**.

E

1. Recuerde el ejercicio de la clase anterior: María compró 8 postres y pagó 20 quetzales en total. Los 8 postres consistieron en galletitas y pastelitos. Si 1 galletita costó 2 quetzales y 1 pastelito costó 3 quetzales, ¿cuántas galletitas y pastelitos compró?

   Considere x como el número de galletitas y y como el número de pastelitos que María compró. Entonces, una ecuación que representa la condición "compró 8 piezas de postres en total" es $x + y = 8$, y otra ecuación que representa la condición "pagó 20 quetzales en total" es $2x + 3y = 20$.

   a. Complete la siguiente tabla.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$x + y$	8	8	8	8					
$2x + 3y$	24								

   b. Encuentre la cantidad de galletitas y pastelitos, determinando el valor de x y y que satisface las dos ecuaciones en la tabla.

2. ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$$

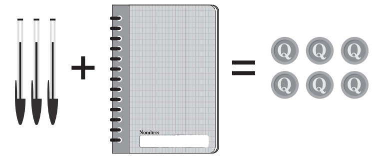
a. $x = 6$ y $y = 2$ b. $x = 6$ y $y = 4$ c. $x = 4$ y $y = 4$

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 4 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante el método de reducción (1)

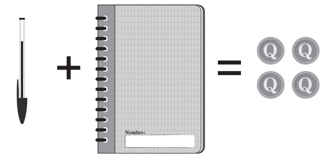
P

Verónica compró 3 lapiceros y 1 cuaderno y pagó 6 quetzales en total. Su hermana compró 1 lapicero y 1 cuaderno y pagó 4 quetzales en total.



¿Cuál es el precio de cada lapicero y de cada cuaderno?

Considerando x como precio del lapicero y y como precio del cuaderno, las siguientes ecuaciones representan las condiciones:



$$\begin{cases} 3x + y = 6 & ① \\ x + y = 4 & ② \end{cases}$$

S

Para resolver un sistema de ecuaciones en el que los coeficientes de una de las incógnitas tienen igual signo e igual valor absoluto, se restan las ecuaciones dadas.

$$\begin{array}{rl} & 3x + y = 6 \\ (-) & x + y = 4 \\ \hline & 2x \quad\; = 2 \end{array}$$

Paso 1.
Reste el miembro izquierdo de ② del izquierdo de ① y el miembro derecho de ② del derecho de ① como en la resta de polinomios.

$$\begin{array}{rc} & A = B \\ (-) & C = D \\ \hline & A - C = B - D \end{array}$$

Los resultados de la resta de valores equivalentes son iguales.

$$2x = 2$$
$$x = \frac{2}{2}$$
$$x = 1$$

Paso 2.
Resuelva la ecuación obtenida.

$$x + y = 4$$
$$1 + y = 4$$
$$y = 4 - 1$$
$$= 3$$

Paso 3.
Sustituya el valor obtenido en el paso 2, $x = 1$, en la ecuación ②, $x + y = 4$.
Luego, despeje y.

No olvide encontrar el valor de y.

La solución del sistema es $x = 1$ y $y = 3$, donde x es el precio de un lapicero y y es el precio de un cuaderno.
Por tanto, el precio de un lapicero es 1 quetzal y el de un cuaderno es 3 quetzales.

Para verificar si $x = 1$ y $y = 3$ son la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$, se sustituyen los valores de x y y encontrados en las ecuaciones. Entonces, se sustituyen x por 1 y y por 3 en las ecuaciones ① y ②.
En la ecuación ①, (miembro izquierdo) $= 3 \times 1 + 3 = 6$, (miembro derecho) $= 6$
En la ecuación ②, (miembro izquierdo) $= 1 + 3 = 4$, (miembro derecho) $= 4$
En las ecuaciones ① y ②, los resultados de ambos miembros son iguales.
Es decir, $x = 1$ y $y = 3$ son la solución del sistema de ecuaciones.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones cuando los coeficientes de una de las incógnitas tengan igual signo e igual valor absoluto, se pueden restar las ecuaciones dadas y obtener una ecuación con una incógnita. A este método se le llama **método de reducción**.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción.

a. $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3y = 20 \\ x + y = 12 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x - 2y = 4 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 5 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante el método de reducción (2)

P

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 & ① \\ 4x - 2y = 6 & ② \end{cases}$$

En $+2y$ y $-2y$, el "$+2$" y "-2" son **coficientes opuestos**.

S

Sume las ecuaciones dadas.

$$\begin{array}{rl} & A = B \\ (+) & C = D \\ \hline & A + C = B + D \end{array}$$

Los resultados de la suma de valores equivalentes son iguales.

$$\begin{array}{rl} & 3x + 2y = 22 \\ (+) & 4x - 2y = 6 \\ \hline & 7x \quad\;\; = 28 \end{array}$$

Paso 1.
Sume el miembro izquierdo de ① y el izquierdo de ②, y el miembro derecho de ① y el derecho de ②.

$$\begin{aligned} 7x &= 28 \\ x &= \frac{28}{7} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Paso 2.
Resuelva la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 22 \\ 3 \times 4 + 2y &= 22 \\ 12 + 2y &= 22 \\ 2y &= 22 - 12 \\ 2y &= 10 \\ y &= \frac{10}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Paso 3.
Sustituya el valor obtenido en el paso 2, $x = 4$, en la ecuación ①, $3x + 2y = 22$. Luego, despeje y.

El uso de la ecuación ① es más conveniente porque el signo del miembro izquierdo $2y$ es positivo. Es más fácil de calcular.

La solución del sistema es $x = 4$ y $y = 5$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones cuando los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos, se puede reducir a una ecuación con una incógnita sumando las ecuaciones dadas.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción.

a. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ 2x + 8y = 24 \end{cases}$

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 6 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante el método de reducción (3)

P Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x + y = 14 & ① \\ 4x + 2y = 22 & ② \end{cases}$$

S

Paso 1.
Identifique la incógnita que conviene reducir. Para este caso, es la y en ①.

Paso 2.
Multiplique la ecuación ① para que una incógnita tenga el mismo coeficiente que en la ecuación ②. En este caso, multiplique ambos miembros de la ecuación ① por 2.

$$\begin{aligned} (3x + y) \times 2 &= 14 \times 2 \\ 6x + 2y &= 28 \quad ③ \end{aligned}$$

Las propiedades de igualdad: si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, la igualdad permanece.

Paso 3.
Reste la ecuación ② de la ecuación ③. Luego, resuelva la ecuación obtenida.

$$\begin{array}{rl} 6x + 2y &= 28 \\ \underline{(-)4x + 2y} & \underline{= 22} \\ 2x \quad\quad &= 6 \\ x &= \frac{6}{2} \\ x &= 3 \end{array}$$

Cuide el signo cuando se restan los polinomios.

Paso 4.
Sustituya el valor obtenido en el paso 3, $x = 3$, en la ecuación ①, $3x + y = 14$. Luego, despeje y.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 14 \\ 9 + y &= 14 \\ y &= 14 - 9 \\ &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 3$ y $y = 5$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones cuando los coeficientes de las incógnitas tienen valores absolutos diferentes, se multiplican ambos miembros de la ecuación para que el valor absoluto de los coeficientes de la incógnita sea el mismo. Luego, se restan o suman las ecuaciones dadas para eliminar la incógnita.

E Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción.

a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 5x + 6y = 8 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 7 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante el método de reducción (4)

P

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 & ① \\ 3x + 4y = 26 & ② \end{cases}$$

S

Para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, se elige la incógnita a eliminar igualando los valores de los coeficientes.

Forma 1. Eliminando x.

①$\times 3$: $6x + 9y = 57$ ③

②$\times 2$: $6x + 8y = 52$ ④

③ − ④:

$$\begin{array}{rl} 6x + 9y &= 57 \\ (-)\,6x + 8y &= 52 \\ \hline y &= 5 \end{array}$$

¡Cuidado con el signo!

Sustituya $y = 5$ en ①,

$$\begin{aligned} 2x + 3 \times 5 &= 19 \\ 2x + 15 &= 19 \\ 2x &= 19 - 15 \\ 2x &= 4 \\ x &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 2$ y $y = 5$.

Forma 2. Eliminando y.

①$\times 4$: $8x + 12y = 76$ ⑤

②$\times 3$: $9x + 12y = 78$ ⑥

⑥ − ⑤:

$$\begin{array}{rl} 9x + 12y &= 78 \\ (-)\,8x + 12y &= 76 \\ \hline x \qquad &= 2 \end{array}$$

¡Cuidado con el signo!

Sustituya $x = 2$ en ①,

$$\begin{aligned} 2 \times 2 + 3y &= 19 \\ 4 + 3y &= 19 \\ 3y &= 19 - 4 \\ 3y &= 15 \\ y &= \frac{15}{3} \\ &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 2$ y $y = 5$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas a través del método de reducción:

Paso 1. Se identifica la incógnita que será eliminada.
Paso 2. Se multiplica una o ambas ecuaciones de tal manera que el valor absoluto de los coeficientes de una de las incógnitas sea el mismo.
Paso 3. Se elimina una incógnita sumando o restando las ecuaciones transformadas en el paso 2.
Paso 4. Se resuelve la ecuación reducida.
Paso 5. Se sustituye el valor obtenido en el paso 4 en una de las ecuaciones del sistema.
Paso 6. Se resuelve la ecuación.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción.

a. $\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ 3x + 5y = 10 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x + 3y = 24 \end{cases}$

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 8 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante el método de sustitución (1)

P

La suma del doble de la edad de Helena y la edad de David es 44. David es dos años mayor que Helena.

¿Cuántos años tienen Helena y David?

Considerando x como la edad de Helena y y como la edad de David, las siguientes ecuaciones representan las condiciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 44 & (1) \\ y = x + 2 & (2) \end{cases}$$

S

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$2x + y = 44$

Paso 1.
Identifique la incógnita que se pueda eliminar fácilmente. En este caso, es la y.

$$\begin{aligned} 2x + (x + 2) &= 44 \\ 3x + 2 &= 44 \end{aligned}$$

Paso 2.
Sustituya y con $x + 2$ en la ecuación (1) para que elimine y en (1).

$$\begin{aligned} 3x &= 44 - 2 \\ 3x &= 42 \\ x &= \frac{42}{3} \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Paso 3.
Resuelva la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} y &= x + 2 \\ &= 14 + 2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Paso 4.
Sustituya el valor obtenido en el paso 3, $x = 14$, en la ecuación (2), $y = x + 2$ para encontrar el valor de y.

Respuesta: Helena tiene 14 años y David tiene 16 años.

C

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incóngitas, se puede convertir el sistema de ecuaciones a una ecuación con una incógnita, sustituyendo el valor de una incógnita en la otra ecuación. A este método se le llama **método de sustitución.**

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de sustitución.

a. $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = y - 2 \\ 2x - 5y = 8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = -x + 8 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 9 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante el método de sustitución (2)

P

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones aplicando el método de sustitución.

$$\begin{cases} -x+y=5 & ① \\ 2x+3y=5 & ② \end{cases}$$

S

Identifique la incógnita que se despeje fácilmente. En este caso, es la y.

Una incógnita se despeja fácilmente cuando su coeficiente es 1 o -1.

$$\begin{aligned} -x+y&=5 \\ y&=x+5 \quad ③ \end{aligned}$$

Paso 1.
Despeje la incógnita y en la ecuación ①.

$$\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ 2x+3(x+5)&=5 \\ 2x+3x+15&=5 \end{aligned}$$

Paso 2.
Sustituya ③ en la ecuación ②.

$$\begin{aligned} 5x+15&=5 \\ 5x&=5-15 \\ 5x&=-10 \\ x&=\frac{-10}{5} \\ x&=-2 \end{aligned}$$

Paso 3.
Resuelva la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned} y&=x+5 \\ &=-2+5 \\ &=3 \end{aligned}$$

Paso 4.
Sustituya el valor obtenido en el paso 3, $x=-2$, en la ecuación ③ para encontrar el valor de y.

La solución del sistema es $x=-2$ y $y=3$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas mediante el método de sustitución:

Paso 1. Se despeja “x” o “y” en una de las ecuaciones.
Paso 2. Se sustituye la solución del paso 1 en la otra ecuación.
Paso 3. Se despeja una incógnita resolviendo la nueva ecuación creada en el paso 2.
Paso 4. Se despeja la otra incógnita.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de sustitución.

a. $\begin{cases} -x+y=2 \\ 3x+y=10 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x+y=9 \\ y-3x=5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=-4x-13 \end{cases}$

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 10 Solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

P

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones aplicando el método de reducción o el método de sustitución.

$$\begin{cases} x - 2y = 9 & (1) \\ 2x + 3y = 4 & (2) \end{cases}$$

S

Forma 1.
Utilización del método de reducción.
Multiplique ambos miembros de la ecuación (1) por 2.

$$2x - 4y = 18 \quad (3)$$

Reste la ecuación (3) de (2). Despeje y.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ (-)\,2x - 4y &= 18 \\ \hline 7y &= -14 \\ y &= \frac{-14}{7} \\ y &= -2 \end{aligned}$$

¡Cuidado con el signo!

Sustituya y por -2 en la ecuación (1). Luego, despeje x.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 9 \\ x - 2 \times (-2) &= 9 \\ x + 4 &= 9 \\ x &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 5$ y $y = -2$.

Forma 2.
Utilización del método de sustitución.
Despeje x de la ecuación (1).

$$\begin{aligned} x - 2y &= 9 \\ x &= 9 + 2y \quad (4) \end{aligned}$$

Sustituya (4) en la ecuación (2).
Despeje y.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 2(9 + 2y) + 3y &= 4 \\ 18 + 4y + 3y &= 4 \\ 18 + 7y &= 4 \\ 7y &= 4 - 18 \\ 7y &= -14 \\ y &= \frac{-14}{7} \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Sustituya y por -2 en la ecuación (4) para encontrar el valor de x.

$$\begin{aligned} x &= 9 + 2y \\ &= 9 + 2 \times (-2) \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 5$ y $y = -2$.

C

Al resolver un sistema de ecuaciones los valores de las incógnitas obtenidas mediante el método de reducción y el método de sustitución son los mismos. El método de sustitución es más conveniente cuando en una de las ecuaciones ya se ha despejado una de las incógnitas, o bien, cuando una de las incógnitas tiene coeficiente 1.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método que considere más adecuado.

a. $\begin{cases} 2x + y = 30 \\ x = 5y + 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2y = x - 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = 4x - 11 \\ 3x + 8y = -18 \end{cases}$

Sección 4 Sistemas de ecuaciones

Clase 11 Solución de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas

P Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} -x + y - 3z = 10 & ① \\ 2x + 3y + z = 5 & ② \\ x - 2y - 2z = 3 & ③ \end{cases}$$

S

$$\begin{array}{rl} -x + y - 3z = 10 & \\ (+)\quad x - 2y - 2z = 3 & \\ \hline -y - 5z = 13 & ④ \end{array}$$

Paso 1.
Elimine la incógnita x de las ecuaciones ① y ③, sumando las dos ecuaciones.

$$③ \times 2: \quad 2x - 4y - 4z = 6 \quad ⑤$$

$$\begin{array}{rl} 2x + 3y + z = 5 & \\ (-)\quad 2x - 4y - 4z = 6 & \\ \hline 7y + 5z = -1 & ⑥ \end{array}$$

Paso 2.
Elimine la incógnita x de las ecuaciones ② y ③. Primero multiplique ③ por 2. Luego, reste el resultado ⑤ de ②.

¡Cuidado con el signo!

$$\begin{array}{rl} -y - 5z = 13 & \\ (+)\ 7y + 5z = -1 & \\ \hline 6y \qquad = 12 & \\ y = \frac{12}{6} & \\ y = 2 & ⑦ \end{array}$$

Paso 3.
Elimine la incógnita z de las ecuaciones ④ y ⑥, sumando las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} -y - 5z &= 13 \\ -2 - 5z &= 13 \\ -5z &= 13 + 2 \\ -5z &= 15 \\ z &= \frac{15}{-5} \\ &= -3 \quad ⑧ \end{aligned}$$

Paso 4.
Sustituya ⑦, $y = 2$, en ④.

$$\begin{aligned} x - 2y - 2z &= 3 \\ x - 2 \times 2 - 2 \times (-3) &= 3 \\ x - 4 + 6 &= 3 \\ x + 2 &= 3 \\ x &= 3 - 2 \\ &= 1 \quad ⑨ \end{aligned}$$

Paso 5.
Sustituya ⑦, $y = 2$, y ⑧, $z = -3$, en ③.

De ⑦, ⑧ y ⑨, la solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$ y $z = -3$.

C

Para resolver un sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

Paso 1. Se seleccionan dos ecuaciones y se elimina una de las incógnitas.
Paso 2. Se seleccionan dos ecuaciones, combinando la ecuación no seleccionada anteriormente con una de las ecuaciones utilizadas en el paso 1. Se elimina la misma incógnita en ambos incisos.
Paso 3. Se resuelve el sistema de ecuaciones con dos incógnitas.
Paso 4. Se sustituyen las dos incógnitas por sus valores en una de las ecuaciones y se despeja la última incógnita.

E

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción.

a. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 16 \\ -x + 7y - z = -22 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4x + 2y + z = 15 \\ x + y - 2z = 11 \\ 4y + 7z = -17 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 4y - z = 6 \\ 2x + 5y - 7z = -9 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

Sección 5 Inecuaciones

Clase 1 Representación de la relación de desigualdad de expresiones numéricas o algebraicas

P

a. Ana ahorra 5 quetzales semanales durante "x" semanas. Reúne cierta cantidad de dinero pero no le alcanza para comprar una cartera de 75 quetzales. Represente con un símbolo de desigualdad la relación que hay entre la cantidad de dinero ahorrado con el precio de la cartera.

b. Un centro de diversiones permite abordar un juego mecánico a las personas que tengan 130 cm o más de estatura. La estatura de Juanita es "y" centímetros. Represente con un símbolo de desigualdad la condición de estatura que debe tener Juanita para poder abordar el juego mecánico mencionado.

S

a. Cantidad de dinero por semana: 5 quetzales
Cantidad de semanas: x
Total de dinero reunido: $5x$ quetzales

Total de dinero $<$ precio de la cartera
$5x < 75$

Respuesta: $5x < 75$

b. Estatura de Juanita: y cm
Estatura que permite el abordaje: 130 cm o más

Estatura de Juanita $\geq$ estatura que permite el abordaje
$y \geq 130$

Respuesta: $y \geq 130$

C

Los símbolos "$<$" o "$>$" se utilizan para representar una relación de cantidades distintas. El símbolo "$<$" se lee "menor que". El símbolo "$>$" se lee "mayor que".
Los símbolos "$\leq$" o "$\geq$" también se utilizan para representar una relación de cantidades. El símbolo "$\leq$" se lee **"menor o igual que"**. El símbolo "$\geq$" se lee **"mayor o igual que"**.
A las relaciones de dos expresiones matemáticas que representan cantidades distintas se les llama **desigualdades**.

Desigualdad	Lectura
a. $x < 8$	x "es menor que" 8.
b. $x \leq 10$	x "es menor o igual que" 10.
c. $x > 4$	x "es mayor que" 4.
d. $x \geq 7$	x "es mayor o igual que" 7.

E

Represente las siguientes situaciones con un símbolo de desigualdad.

a. Cinco estudiantes tienen "x" canicas cada uno. Cuando reúnen todas sus canicas, la cantidad reunida es menor que 45.
b. Francisco introduce en la maleta "x" objetos que pesan 5 libras cada uno, cuyo peso final es mayor que 40 libras.
c. En un mercado se vende un canasto de manzanas a 40 quetzales y un canasto de papas a 25 quetzales. Si se compran "x" canastos de manzanas y "y" canastos de papas, el costo total de la compra es mayor o igual que 200 quetzales.
d. Una familia viaja en automóvil de Petén a Guatemala a 75 kilómetros por hora. Cuando han pasado "x" horas, recorren una distancia menor o igual que 300 kilómetros.

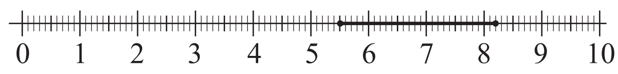
Sección 5 Inecuaciones
Clase 2 Intervalos en la recta numérica

a. En un hospital se midió el peso de los bebés recién nacidos. El bebé más pequeño pesaba 5.5 libras, y el bebé más grande pesaba 8.2 libras. Trace en la recta numérica el segmento que represente el peso de los bebés nacidos en el hospital.

b. En el IRTRA Petapa todos los niños que tienen una estatura mayor que 1 m y menor o igual que 1.4 m pagan 50 quetzales de ingreso al parque de diversiones. Trace en la recta numérica el segmento que represente la estatura de los niños que pagan 50 quetzales de ingreso al parque de diversiones.

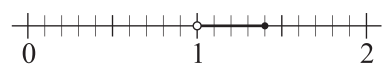
a. Peso del bebé más pequeño: 5.5 lb
Peso del bebé más grande: 8.2 lb

Valores desde 5.5 hasta 8.2 $[5.5, 8.2]$



b. Estatura mayor a: 1 m
Estatura menor o igual a: 1.4 m

Valor mayor que 1 y menor o igual que 1.4: $(1, 1.4]$



El intervalo cerrado significa "incluir" los extremos y se expresa con [o].

El intervalo abierto significa "no incluir" los extremos y se expresa con (o).

$a \leq x \leq b$
Un intervalo que es mayor o igual que a y menor o igual que b.

$[a, b]$

$a < x \leq b$
Un intervalo que es mayor que a y menor o igual que b.

$(a, b]$

$a \leq x < b$
Un intervalo que es mayor o igual que a y menor que b.

$[a, b)$

$a < x < b$
Un intervalo que es mayor que a y menor que b.

(a, b)

Cuando un intervalo es cerrado se expresa con ●.
Cuando un intervalo es abierto se expresa con ○.

Represente cada uno de los siguientes intervalos en la recta numérica.

a. $(-2, 3]$ b. $[0, 3]$ c. $(1, 3)$ d. $[1, 3]$

Sección 5 Inecuaciones

Clase 3 Propiedades de las desigualdades (suma y resta)

P

a. Juan tiene 18 años de edad y Pedro tiene 10 años. Después de 9 años, ¿será que Juan sigue siendo mayor que Pedro?

b. Alicia tiene 7 años y Sonia tiene 12 años, ¿hace 5 años era Alicia menor que Sonia?

S

a. Juan tiene 18 años y Pedro tiene 10 años: $18 > 10$

Después de 9 años: $18 + 9 = 27$ $\quad 10 + 9 = 19$

$$18 + 9 > 10 + 9$$

Por tanto, después de 9 años Juan seguirá siendo el mayor.

b. Alicia tiene 7 años y Sonia tiene 12 años: $7 < 12$

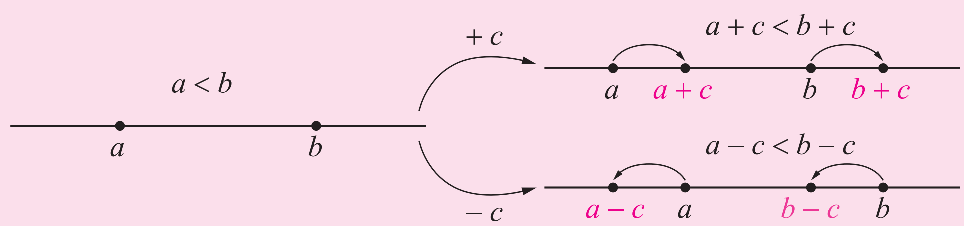
Hace 5 años: $7 - 5 = 2$ $\quad 12 - 5 = 7$

$$7 - 5 < 12 - 5$$

Por tanto, hace 5 años Alicia era menor que Sonia.

C

Si se suma o se resta una misma cantidad de ambos miembros de una desigualdad, la relación de la desigualdad se mantiene como se muestra en la siguiente gráfica:



Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.

E

1. Si $a > b$, escriba "<"o ">" en el espacio indicado, según sea el caso.

   a. $a + 2 \boxed{} b + 2$ $\qquad$ b. $a - 4 \boxed{} b - 4$

2. Si $a < b$, escriba "<"o ">" en el espacio indicado, según sea el caso.

   a. $a + 5 \boxed{} b + 5$ $\qquad$ b. $a - 3 \boxed{} b - 3$

Sección 5 Inecuaciones

Clase 4 Propiedades de las desigualdades (multiplicación y división)

P

¿Se mantiene la dirección del signo de desigualdad entre los dos miembros de una inecuación si se multiplican por un mismo valor?

a. Se multiplican ambos miembros de la inecuación $3 < 5$ por 2.
b. Se multiplican ambos miembros de la inecuación $3 < 5$ por -2.
c. Se dividen ambos miembros de la inecuación $12 > 9$ entre 3.
d. Se dividen ambos miembros de la inecuación $12 > 9$ entre -3.

S

a. $3 < 5$ — Se multiplican ambos miembros por 2.

$3 \times 2 = 6$ $\quad$ $5 \times 2 = 10$

Por tanto, $3 \times 2 < 5 \times 2$.
La dirección del signo de desiguadad se mantiene igual.

b. $3 < 5$ — Se multiplican ambos miembros por -2.

$3 \times (-2) = -6$ $\quad$ $5 \times (-2) = -10$

Por tanto, $3 \times (-2) > 5 \times (-2)$.
La dirección del signo de la desigualdad se invierte.

c. $12 > 9$ — Se divide ambos miembros entre 3.

$\frac{12}{3} = 4$ $\quad$ $\frac{9}{3} = 3$

Por tanto, $\frac{12}{3} > \frac{9}{3}$.
La dirección del signo de desiguadad se mantiene igual.

d. $12 > 9$ — Se divide ambos miembros entre -3.

$\frac{12}{-3} = -4$ $\quad$ $\frac{9}{-3} = -3$

Por tanto, $-\frac{12}{3} < -\frac{9}{3}$.
La dirección del signo de la desigualdad se invierte.

C

Si ambos miembros de una desigualdad son multiplicados o divididos por un mismo número positivo, la relación de la desigualdad se mantiene igual. Entonces, la dirección del signo de desigualdad se mantiene. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Si ambos miembros de una desigualdad son multiplicados o divididos por un mismo número negativo, la relación de la desigualdad se invierte. Entonces, la dirección del signo de desigualdad se invierte. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

E

1. Si $a > b$, escriba "$<$" o "$>$" en el espacio indicado, según sea el caso.

a. $3a \square 3b$ $\qquad$ b. $-4a \square -4b$

2. Si $a < b$, escriba "$<$" o "$>$" en el espacio indicado, según sea el caso.

a. $\frac{a}{5} \square \frac{b}{5}$ $\qquad$ b. $-\frac{a}{4} \square -\frac{b}{4}$

Sección 5 Inecuaciones

Clase 5 Resolución de inecuaciones

P

Resuelva las siguientes inecuaciones y represente la solución en la recta numérica.

a. $3x + 4 > 10$

b. $-2x - 3 \leq 9$

S

a.

$$3x + 4 > 10$$

$$3x + 4 - 4 > 10 - 4$$

Se aplica la propiedad de la desigualdad, restando 4 de ambos miembros.

$$3x > 6$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{6}{3}$$

$$x > 2$$

Se aplica la propiedad de la desigualdad, dividiendo ambos miembros entre 3.

b.

$$-2x - 3 \leq 9$$

$$-2x - 3 + 3 \leq 9 + 3$$

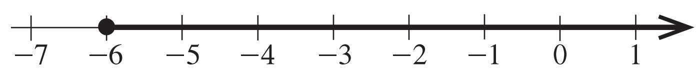
Se aplica la propiedad de la desigualdad, sumando 3 en ambos miembros.

$$-2x \leq 12$$

$$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{12}{-2}$$

$$x \geq -6$$

Se aplica la propiedad de la desigualdad, dividiendo ambos miembros entre -2.



¡Cuidado con la división entre números negativos!
Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

C

A una desigualdad de dos expresiones algebraicas que incluyen una incógnita, se le llama **inecuación**.

La solución de una inecuación es el conjunto de valores que satisfacen la inecuación.

Para resolver una inecuación se aplican las propiedades de las desigualdades.

E

Resuelva las siguientes inecuaciones y represente la solución en una recta numérica.

a. $2x < 14$

b. $4x + 1 \leq -3$

c. $-3x + 8 > 2$

d. $-5x - 7 \geq 8$

e. $4x - 6 < 10$

f. $3x - 3 \geq 9$

g. $6x + 3 \leq -3$

h. $-4x - 7 < 5$

Sección 6 Sucesiones

Clase 1 Sucesiones

El calendario muestra que los domingos corresponden a los días 3, 10, 17 y 24.

¿En qué secuencia están organizados los números?

Septiembre

D	L	M	M	J	V	S
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

La secuencia de números empieza por 3 y se agregan 7 unidades cada vez.

$$3 \xrightarrow{+7} 10 \xrightarrow{+7} 17 \xrightarrow{+7} 24$$

A una lista de números colocados en un cierto orden se le llama **sucesión**. A cada uno de los números que lo conforman se les llama **términos**.

Se expresa una lista de términos, empleando una letra y subíndices para especificar su orden.

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

Los subíndices señalan el lugar que ocupa cada término de la sucesión. Es decir, el primer término es a_1, el segundo término es a_2, y así sucesivamente. Al n-ésimo término se le llama **término general de la sucesión** y se expresa como a_n.

La secuencia, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ se expresa como $\{a_n\}$.

Ejemplo:

Primer término	Segundo término	Tercer término	Cuarto término
2	7	12	17

$$2 \xrightarrow{+5} 7 \xrightarrow{+5} 12 \xrightarrow{+5} 17$$

Son los primeros cuatro términos de una sucesión que empieza por 2 y cada término se obtiene sumando 5 al anterior.

1. Encuentre los primeros cuatro términos de cada sucesión.

   a. 3 es el primer término de la sucesión y cada término se obtiene sumando 8 al anterior.
   b. 5 es el primer término y cada término se obtiene multiplicando por 2 al anterior.

2. Encuentre los primeros cinco términos de las siguientes sucesiones.

   a. 30 es el primer término de la sucesión y cada término se obtiene restando 4 del anterior.
   b. 240 es el primer término de la sucesión y cada término se obtiene dividiendo entre 2 al anterior.

Sección 6 Sucesiones

Clase 2 Sucesiones aritméticas (1)

P

Encuentre la regla que sigue la siguiente sucesión.

1, 3, 5, 7, 9, 11, ···

S

Es una sucesión cuyo primer término es 1 y los otros términos se obtienen sumando 2 al anterior.

$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+2} 9 \xrightarrow{+2} 11 \quad \ldots$

C

A una sucesión cuyo término se obtiene sumando un número constante al término anterior se le llama **sucesión aritmética**. A la constante se le llama **diferencia** y se denota *d*.

Ejemplo:

a. $3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{+5} 13 \xrightarrow{+5} 18 \xrightarrow{+5} 23 \xrightarrow{+5} 28 \quad \ldots$

Es una sucesión aritmética cuyo primer término es 3 y su diferencia es 5.

b. $10 \xrightarrow{-2} 8 \xrightarrow{-2} 6 \xrightarrow{-2} 4 \xrightarrow{-2} 2 \xrightarrow{-2} 0 \quad \ldots$

Es una sucesión aritmética cuyo primer término es 10 y su diferencia es -2.

E

1. Encuentre la regla que siguen las siguientes sucesiones aritméticas.

   a. 5, 9, 13, 17, 21, 25, ...
   b. 21, 18, 15, 12, 9, 6, ...
   c. -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...

2. Encuentre los primeros cinco términos de las siguientes sucesiones aritméticas.

   a. El primer término es 1 y la diferencia es 5.
   b. El primer término es 10 y la diferencia es -2.

Sección 6 Sucesiones

Clase 3 Sucesiones aritméticas (2)

P Encuentre el término general de la sucesión aritmética $\{a_n\}$, cuyo primer término es a_1 y su diferencia es d.

S

a_1

$a_2 = a_1 + d = a_1 + \boxed{1}\,d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + \boxed{2}\,d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + \boxed{3}\,d$

$\vdots$

Así que el n-ésimo término será $a_n = a_1 + (\boxed{n-1})\,d$.

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad a_n$$
$$\underbrace{+d \quad +d \quad +d \cdots +d \quad +d}_{(n-1)}$$

C Un término general de una sucesión aritmética, cuyo primer término es a_1 y su diferencia es d, es $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Ejemplo:
En la sucesión aritmética cuyo primer término es 2 y su diferencia es 4:

a. El término general

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \times 4 \\ &= 2 + 4n - 4 \\ &= 4n - 2 \end{aligned}$$

b. El décimo término

$$\begin{aligned} a_{10} &= 4 \times 10 - 2 \\ &= 40 - 2 \\ &= 38 \end{aligned}$$

E Encuentre el término general y el vigésimo término de las siguientes sucesiones aritméticas.

a. El primer término es 3 y la diferencia es 6.

b. El primer término es 10 y la diferencia es 2.

c. El primer término es -2 y la diferencia es 3.

d. El primer término es 8 y la diferencia es -4.

Sección 6 Sucesiones

Clase 4 Sucesiones geométricas (1)

P

Encuentre la regla que sigue la siguiente sucesión.

1, 2, 4, 8, 16, 32, ···

S

Es una sucesión cuyo primer término es 1 y los otros términos se obtienen multiplicando el anterior por 2.

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \quad \ldots$$

C

A una sucesión cuyo término se obtiene multiplicando el anterior por una constante se le llama **sucesión geométrica**. A la constante se le llama **razón** y se denota *r*.

Ejemplo:

a. $$2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 3} 18 \xrightarrow{\times 3} 54 \xrightarrow{\times 3} 162 \quad \ldots$$

Es una sucesión geométrica cuyo primer término es 2 y su razón es 3.

b. $$10 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 5 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{5}{2} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{5}{4} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{5}{8} \quad \ldots$$

Es una sucesión geométrica cuyo primer término es 10 y su razón es $\frac{1}{2}$.

E

1. Encuentre la regla de las siguientes sucesiones geométricas.
   a. $-3,\ -9,\ -27,\ -81,\ -243, \ldots$
   b. $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81}, \ldots$

2. Encuentre los primeros cinco términos de las siguientes sucesiones geométricas.
   a. El primer término es 2 y la razón es 4.
   b. El primer término es 80 y la razón es $\frac{1}{2}$.

Sección 6 Sucesiones

Clase 5 Sucesiones geométricas (2)

P Encuentre el término general de la sucesión geométrica $\{a_n\}$, cuyo primer término es a_1 y su razón es r.

S

a_1

$a_2 = a_1 \times r = a_1 r^{\boxed{1}}$

$a_3 = a_2 \times r = a_1 r \times r = a_1 r^{\boxed{2}}$

$a_4 = a_3 \times r = a_1 r^2 \times r = a_1 r^{\boxed{3}}$

$\vdots$

Así que el n-ésimo término será $a_n = a_1 r^{\boxed{n-1}}$

$$\underbrace{a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} \cdots \xrightarrow{\times r} a_{n-1} \xrightarrow{\times r} a_n}_{(n-1)}$$

C Un término general de una sucesión geométrica, cuyo primer término es a_1 y su razón es r, es $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Ejemplo:
En la sucesión geométrica cuyo primer término es 2 y su razón es 3:

a. El término general
$a_n = 2 \times 3^{n-1}$

b. El quinto término
$a_5 = 2 \times 3^{5-1}$
$= 2 \times 3^4$
$= 2 \times 81$
$= 162$

E Encuentre el término general y el cuarto término de las siguientes sucesiones geométricas.

a. El primer término es 1 y la razón es 4.

b. El primer término es 5 y la razón es 2.

c. El primer término es -5 y la razón es 3.

d. El primer término es 3 y la razón es -2.

¡Cuidado!
$a_4 = 3 \times \underline{(-2)}^3$

Ejercitación A

1. Dadas las expresiones algebraicas de ① a ④, resuelva.

   ① $2x+3$ ② $5x^2$ ③ $-4x$ ④ $3xy+5y$

   a. Identifique los monomios.
   b. Identifique las expresiones algebraicas de primer grado.

2. Reduzca los términos semejantes de las siguientes expresiones.

   a. $2a+5b+4a-3b$
   b. $-3x-2y+5x-7y$
   c. $4a^2-3a-6a^2+2a$
   d. $-5x^2-3x-6x^2+4x$

3. Calcule las siguientes expresiones.

   a. $(3a+b)+(a-6b)$ b. $(2x-4y)+(5x+6y)$ c. $(4a+2b)-(3a-b)$
   d. $(5x-6y)-(2x+4y)$ e. $(-2x-3y)+(6x-4y)$ f. $(-a+4b)-(-3a+7b)$

4. Calcule las siguientes expresiones.

   a. $4(2x+7y)$ b. $5(3x-2y)$ c. $-3(6a+b)$ d. $-6(2x-3y)$
   e. $(8x+4y)\div 2$ f. $(24a-30b)\div 3$ g. $(15x+10y)\div(-5)$ h. $(14a-49b)\div(-7)$

5. Calcule las siguientes expresiones, reduciendo los términos semejantes.

   a. $\dfrac{3x+2y}{4}+\dfrac{x-4y}{2}$ b. $\dfrac{2a-4b}{3}-\dfrac{5a+3b}{6}$ c. $\dfrac{3x-3y}{2}+\dfrac{2x-4y}{3}$

6. Calcule las siguientes expresiones.

   a. $3a\times 5b$ b. $-2x\times x$ c. $-7a\times(-3ab)$
   d. $20x\div 5x$ e. $15ab\div(-3a)$ f. $-21x^2y\div(-7xy)$
   g. $2ab\times 6a^2\div 4a^2b$ h. $18xyz\div 9yz\times(-5yz)$ i. $-xy\times(-14xy^2)\div 7x^2$

7. Encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones.

   a. $5x+4y$, si $x=4$, $y=2$ b. $2x-y$, si $x=3$, $y=-6$

8. Desarrolle las siguientes expresiones.

   a. $x(x+4)$ b. $a(a-3)$ c. $5x(x-2)$ d. $-3a(a+6)$
   e. $(x+2)(y+3)$ f. $(a-3)(b+4)$ g. $(x-5)(y-2)$ h. $(2x+1)(4y-3)$
   i. $(3a-2)(b-5)$ j. $(x+3)(x+5)$ k. $(a+4)(a-2)$ l. $(b-3)(b-6)$
   m. $(x+3)^2$ n. $(x-2)^2$ o. $(x+1)(x-1)$ p. $(2a+3)(2a+1)$

9. Resuelva las siguientes ecuaciones.

   a. $x+5=6$ b. $x-2=4$ c. $4x=20$ d. $\dfrac{x}{2}=8$

10. Identifique el sistema de ecuaciones que tienen como respuesta $x=2$, $y=4$.

    a. $\begin{cases} y=2x \\ x-y=2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+y=6 \\ x+2y=10 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x+2y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$

11. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de reducción.

    a. $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x+y=6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x-y=6 \\ 2x+y=14 \end{cases}$

12. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de sustitución.

    a. $\begin{cases} y=2x+3 \\ x+y=18 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x=3y-1 \\ x+2y=19 \end{cases}$

13. Si $a>b$, escriba “$<$”o “$>$” en el espacio indicado, según sea el caso.

    a. $a+3$ ___ $b+3$ b. $a-2$ ___ $b-2$ c. $2a$ ___ $2b$ d. $\dfrac{a}{3}$ ___ $\dfrac{b}{3}$

14. Encuentre la regla que siguen las siguientes sucesiones aritméticas.

    a. $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$ b. $14, 12, 10, 8, 6, \ldots$

15. Encuentre la regla que siguen las siguientes sucesiones geométricas.

    a. $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$ b. $240, 120, 60, 30, 15, \ldots$

Ejercitación B

1. Calcule las siguientes expresiones.
   a. $-2x^2-4x+6x+x^2$ b. $3x^2+2x+1-(3x+5x^2)$
   c. $4a-3b+(-6a+b)$ d. $5x-2y-(2x-4y)$
   e. $2(x+3y)+(x-2y)$ f. $(5a-3b)-4(a-2b)$
   g. $3(2x+y)+5(3x-4y)$ h. $6(2x-3y)-2(5x-7y)$

2. Calcule las siguientes expresiones.
   a. $0.6x+y-(-1.2x+y)$ b. $2(0.5x-y)+(-2x+3y)$
   c. $\frac{5x-2y}{3}+\frac{x+7y}{4}$ d. $\frac{2a-4b}{5}-\frac{6a-3b}{2}$

3. Calcule el resultado de las siguientes expresiones.
   a. $-5x\times(-3y)$ b. $(-x)^2\times 3x$
   c. $(2a)^2\times(-5b)$ d. $6x^2\div(-3x)$
   e. $(3x)^3\div(-9x)$ f. $(-20x^2y)\div(-2x)^2$
   g. $8xy\div\frac{4}{5}x$ h. $16x^3y^2\div(-4x)^2\times 3x$

4. Si $x=3, y=-4,$ encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones.
   a. $5xy^2\div 6y$ b. $(2x+y)-(4x+2y)$

5. Si $x=4, y=-2,$ encuentre el valor numérico de $x^2-xy+\left(\frac{x}{y}\right)^x$.

6. Si $a+2b=5, c=3,$ encuentre el valor numérico de $a+2(b+c)$.

7. Si $3n$ es el número del medio, encuentre la suma de tres números naturales consecutivos.

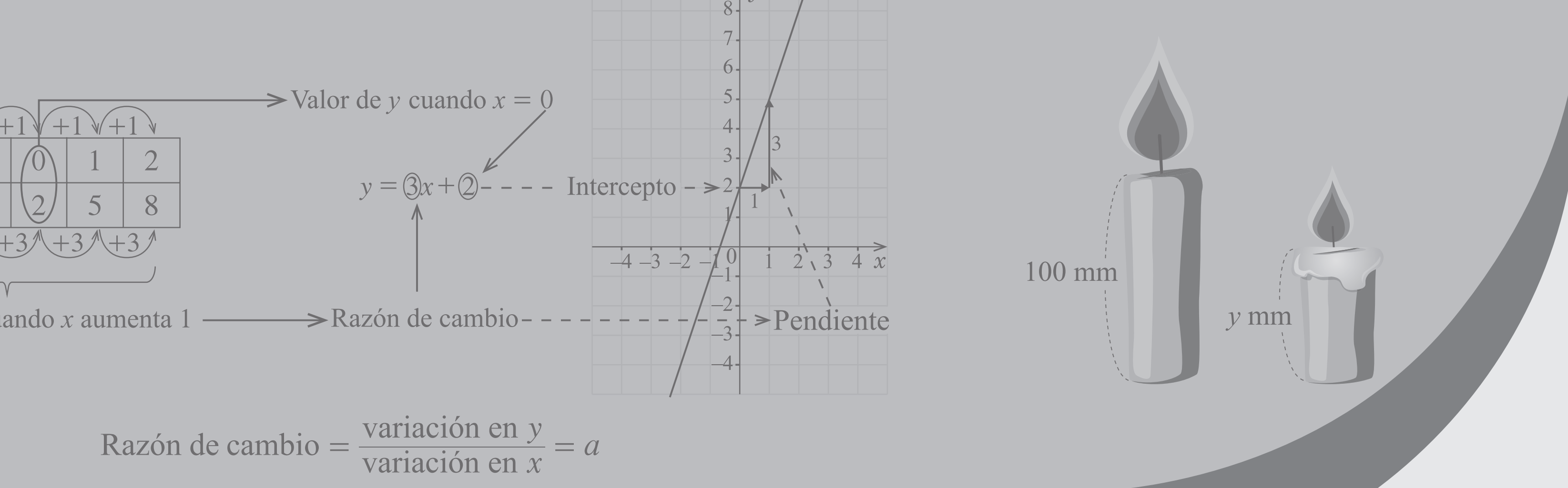
8. Desarrolle las siguientes expresiones.
   a. $(a-1)(b-1)$ b. $(x+2y)(x-2y)$
   c. $(3x-4)(3x+4)$ d. $(3+x)(3-x)$
   e. $\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)$ f. $(a+b)^2$
   g. $(4-y)^2$ h. $(2a-3b)^2$
   i. $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ j. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

9. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.
   a. $\begin{cases}2x+3y=8\\3x-4y=-5\end{cases}$ b. $\begin{cases}x+2y=10\\0.3x+0.2y=1.8\end{cases}$ c. $\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=1\\x+3y=9\end{cases}$ d. $\begin{cases}x+y+z=7\\-x+2y+z=4\\2x-3y-z=-3\end{cases}$

10. Resuelva cada una de las desigualdades y represéntelas en la recta numérica.
   a. $3x<21$ b. $2x+1\geq-5$ c. $5x-2\leq-17$ d. $-3x-5>-11$

11. Encuentre el término general y el décimo término de las siguientes sucesiones.
   a. El primer término de una sucesión aritmética es 3 y su diferencia es 2.
   b. El primer término de una sucesión aritmética es 9 y su diferencia es -3.

12. Encuentre el término general y el cuarto término de las siguientes sucesiones.
   a. El primer término de una sucesión geométrica es 2 y su razón es 4.
   b. El primer término de una sucesión geométrica es -5 y su razón es 3.



Unidad 2 ••

Función

Sección 1 Función lineal

Clase 1 Significado de función lineal (1)

P

María tiene una pila en su casa que contiene 3 litros de agua. Al abrir el chorro, deja fluir a ritmo constante 2 litros de agua por minuto. La tabla muestra la variación de los litros de agua en la pila a medida que transcurre el tiempo.
Si el tiempo es x minutos y la cantidad de agua en la pila es y litros:

a. Complete los espacios en blanco de la tabla.

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5	...
Cantidad de agua (L)	3	5	7				...

b. ¿Qué cantidad de agua contendrá la pila después de x minutos?
c. Exprese y en términos de x.

S

a. En cada minuto el agua aumenta 2 L más que el minuto anterior. Completando la tabla se tiene:

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5	...
Cantidad de agua (L)	3	$3+2=5$	$5+2=7$	$7+2=9$	$9+2=11$	$11+2=13$	...

b. Se puede observar que la cantidad de agua en la pila es igual a la cantidad que tenía al inicio (3 L) más 2 L por cada minuto transcurrido. Como x son los minutos transcurridos, después de x minutos la cantidad de agua será $3 + 2x$, es lo mismo que $2x + 3$.

c. y es la cantidad de agua en determinado momento. Entonces, la situación al inicio (minuto 0) cuando la pila tenía 3 L de agua, se puede expresar de la siguiente forma:
$y = 2 \times 0 + 3 = 3$
Después de cada minuto transcurrido tendrá:
$y = 2 \times 1 + 3 = 5$
$y = 2 \times 2 + 3 = 7$
$\vdots$
Entonces, la cantidad y de agua en la pila después de x minutos será:
$y = 2x + 3$

C

Cuando una relación entre las variables x y y se expresa como $y = ax + b$, se dice que y es una **función lineal** de x. Una función lineal $y = ax + b$ está formada por la suma de ax, que es proporcional a x, y una constante b. Si b toma el valor de cero, la función lineal coincide con la proporcionalidad directa y se expresa como $y = ax$.

E

1. Indique cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a una función lineal.

a. $y = 2x + 1$ b. $y = \frac{1}{x}$ c. $y = x + 3$ d. $y = x$

2. Una pecera contiene agua hasta 1 cm de altura y comienza a llenarse a un ritmo constante de 3 cm por minuto. La tabla muestra la variación de la altura en relación al tiempo que transcurre. Si el tiempo es x minutos y la altura de agua es y cm:

a. Complete los espacios en blanco de la tabla.

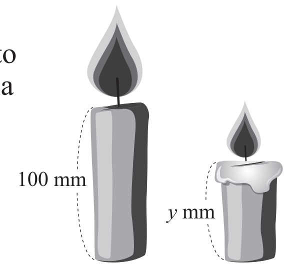
Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5	6	...
Altura del agua (cm)	1	4	7					...

b. ¿Cuál es la altura del agua después de 6 minutos?
c. Determine la altura del agua después de x minutos.
d. Exprese y en términos de x.

Clase 2 Significado de función lineal (2)

P

Se enciende una candela de 100 milímetros (mm) de largo y por cada minuto transcurrido se queman uniformemente 5 mm. Si el tiempo es x minutos y la longitud de la candela es y mm:



a. Complete los espacios en blanco de la tabla.

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	...
Longitud de la candela (mm)	100	95	90			...

b. ¿Qué longitud tendrá la candela después de 4 minutos?
c. ¿Qué longitud tendrá la candela después de x minutos?
d. Exprese y en términos de x.

S

a. Como se queman 5 mm por minuto, al completar la tabla se obtiene:

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	...
Longitud de la candela (mm)	100	$100-5=95$	$95-5=90$	$90-5=85$	$85-5=80$	...

b. Después de 4 minutos, la candela tendrá 80 mm de longitud.

c. Con base en el inciso anterior, después de x minutos se queman $5x$ mm. Entonces, la longitud de la candela después de x minutos serán 100 mm que tenía al inicio menos $5x$ mm.
Es decir, $100-5x$, y es igual a $-5x+100$.

d. La candela tenía 100 mm de longitud al inicio (minuto 0). Entonces, la longitud y cuando x es 0 se puede expresar:
$y=-5\times 0+100=100$
Después de cada minuto transcurrido tendrá:
$y=-5\times 1+100=95$
$y=-5\times 2+100=90$
⋮

Por tanto, la longitud y de la candela después de x minutos será:
$y=-5x+100$

C

En una expresión $y=ax+b$, para $a<0$, a medida que x aumenta, y disminuye. Este es un caso de función lineal.

E

Verónica viajó en un globo aerostático. Cuando estaba en el suelo, la temperatura del aire era de 20°C. Al ascender, la temperatura disminuyó 6°C por cada kilómetro. Si la altura es x km y la temperatura del aire es y °C:

a. Complete los espacios en blanco de la tabla.

Altura (km)	0	1	2	3	4	...
Temperatura del aire (°C)	20	14				...

b. ¿Qué temperatura tendría el aire dentro del globo después de 3 km?
c. ¿Qué temperatura tendría el aire dentro del globo después de x km?
d. Exprese y en términos de x.

Clase 3 Significado de razón de cambio (1)

P Luisa tiene un salón de belleza donde paga una cuota fija de 10 quetzales de luz a diario, más 3 quetzales por cada hora trabajada. La tabla muestra el pago total con relación al tiempo trabajado. Si el tiempo es x horas y el pago es y quetzales:

Tiempo (h)	0	1	2	3	4
Pago (Q)	10	13	16	19	22

a. Exprese y como una función lineal de x de la forma $y = ax + b$.
b. Determine cómo cambian los valores de y a medida que los valores de x cambian.

S a. Luisa tiene que pagar 10 quetzales de cuota fija más 3 quetzales por cada hora trabajada. Entonces, el total a pagar después de x horas trabajadas es $y = 10 + 3x$. Ordenando de otra forma: $y = 3x + 10$

b. Para determinar cómo cambian los valores, se toman dos valores de x y sus respectivos valores de y de la tabla.

$+2$
$+1$ $+1$ $+1$ $+1$

x (h)	0	1	2	3	4
y (Q)	10	13	16	19	22

$+3$ $+3$ $+3$ $+3$
$+6$

Cuando x aumenta 1 unidad, y aumenta 3 unidades.

Si $x = 1$, $y = 13$.

Si $x = 3$, $y = 19$.

$$\begin{aligned}(\text{Variación en } x) &= 3 - 1\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{Variación en } y) &= 19 - 13\\ &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\text{Variación en } y)}{(\text{Variación en } x)} &= \frac{6}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

C A la razón de la cantidad de variación en y a la cantidad de variación en x, se le llama **razón de cambio**.

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{variación en } y}{\text{variación en } x}$$

E Una pila tiene 5 litros de agua. Al abrir la llave, fluyen 2 litros de agua por minuto. La tabla muestra la cantidad de litros de agua en la pila después de ciertos minutos transcurridos. Si el tiempo es x minutos y la cantidad de agua en la pila es y litros, resuelva.

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5
Cantidad de agua (L)	5	7	9	11	13	15

a. Exprese y como función lineal de x.
b. Calcule la razón de cambio de y respecto a x.

Clase 4 Significado de razón de cambio (2)

P La siguiente tabla muestra una función lineal.

x	0	1	2	3
y	15	13	11	9

a. Exprese y como función lineal de x de la forma $y = ax + b$ y encuentre la constante a.
b. Calcule la razón de cambio de y a x.
c. Compare el valor de a obtenido en el inciso a con la razón de cambio obtenida en el inciso b. ¿Qué concluye?

S a. Al observar los datos en la tabla, cada vez que x aumenta 1 unidad, y disminuye 2. Entonces, al expresar y en función de x se tiene: $y = 15 - 2x$, lo cual equivale a $y = -2x + 15$.

Por tanto, $a = -2$.

b. Se toman dos valores y se determina la variación en las dos variables.

x	0	1	2	3
y	15	13	11	9

Si $x = 1$, $y = 13$.
Si $x = 3$, $y = 9$.

(Variación en x) $= 3 - 1 = 2$
(Variación en y) $= 9 - 13 = -4$

(Razón de cambio) $= \frac{-4}{2} = -2$

Razón de cambio $= \dfrac{\text{variación en } y}{\text{variación en } x}$

c. El valor de la constante es -2. La razón de cambio es -2. Por tanto, se puede concluir que el valor de la constante a es igual a la razón de cambio.

C En una función lineal $y = ax + b$, la razón de cambio es constante y es equivalente al valor de a. Es decir:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{variación en } y}{\text{variación en } x} = a$$

E 1. La siguiente tabla muestra una función lineal.

x	0	1	2	3
y	18	14	10	6

a. Exprese y como función lineal de x.
b. Calcule la razón de cambio de y a x.
c. Compare la razón de cambio con el valor de la constante a encontrado en la función lineal $y = ax + b$ que se obtuvo en el inciso a.

2. Identifique la razón de cambio de las siguientes funciones.

a. $y = 2x - 3$ b. $y = x + 4$ c. $y = \frac{1}{2}x + 1$ d. $y = 3x - 5$

Sección 2 Gráfica de la función

Clase 1 Características de una función $y = ax + b$

P Un grupo de estudiantes realiza un experimento en el que se calentó el agua 2°C por cada minuto transcurrido. Inicialmente el agua tenía una temperatura de 5°C. La tabla muestra los datos del experimento. Si el tiempo es x minutos y la temperatura es y °C:

a. Complete los espacios en blanco de la tabla.

Tiempo (min)	0	1	2	3	4
Temperatura (°C)	5	7	9		

b. Exprese y como una función lineal de x de la forma $y = ax + b$.

c. Grafique los pares ordenados (x, y) mostrados en la tabla en el plano cartesiano.

d. Encuentre otros valores para y, tomando como ejemplo $x = 0.5$, $x = 1.5$, $x = 2.5$ y $x = 3.5$. Grafique los pares ordenados de los valores estimados.

S a. Completando la tabla, se obtiene:

Tiempo x	0	1	2	3	4
Temperatura y	5	7	9	11	13

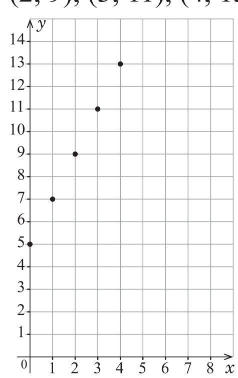
+1 +1 +1 +1

+2 +2 +2 +2

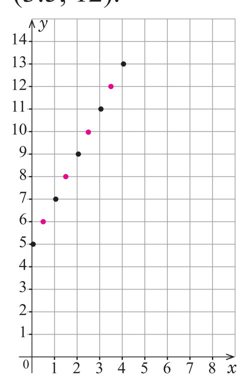
Para graficar los pares ordenados en el plano cartesiano: el valor de x se sitúa sobre la recta horizontal o eje x, y se cuentan las unidades de y desplazándose a partir de ahí hacia arriba si es positivo o hacia abajo si es negativo.

b. Al analizar la variación en y y la variación en x, se observa que cada vez que x aumenta 1, y aumenta 2. Entonces, la razón de cambio es 2, es decir, el valor de a es 2. Cuando x es 0, y es 5. Entonces, el valor de b es 5. Por tanto, $y = 2x + 5$.

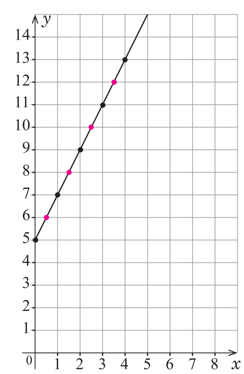
c. Graficando los pares ordenados de la tabla del inciso a (0, 5), (1, 7), (2, 9), (3, 11), (4, 13).



d. Calculando otros pares ordenados y graficándolos: (0.5, 6), (1.5, 8), (2.5, 10), (3.5, 12).



Los puntos van quedando cada vez más juntos hasta formar una línea recta:



C La gráfica de una función $y = ax + b$ es una línea recta.

E Complete los espacios en blanco de la tabla y realice lo que se le indica.

x	0	1	2	3	4	5
y	2	5	8			

a. Grafique los pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano.

b. Encuentre otros valores para y asignándole otros valores a la variable x.

c. Elabore la gráfica de la función.

Clase 2 Intercepto en una función $y = ax + b$

Resuelva.

a. Grafique $y = x$ y $y = x + 2$ en el mismo plano cartesiano.

b. Identifique el punto donde cada gráfica interseca al eje y.

c. ¿Qué diferencia existe entre cada gráfica?

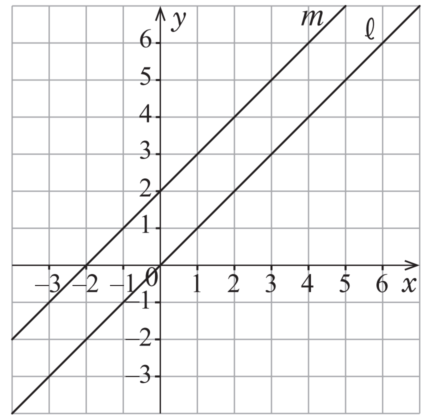
a. Algunos valores de x y y de las funciones lineales se muestran en las siguientes tablas:

ℓ: $y = x$

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	1	2

m: $y = x + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

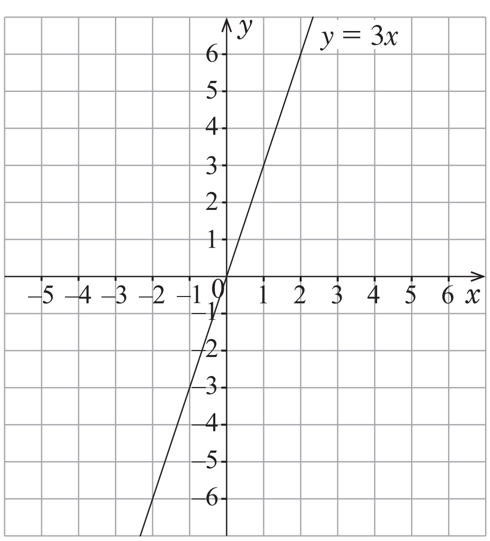


b. La recta ℓ: $y = x$ interseca al eje y en $y = 0$. Las coordenadas del punto son (0, 0).
La recta m: $y = x + 2$ interseca al eje y en $y = 2$. Las coordenadas del punto son (0, 2).

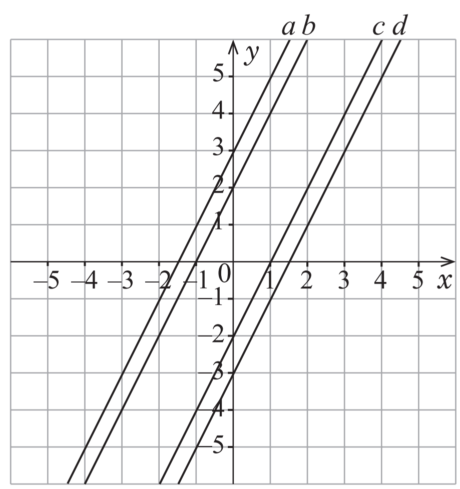
c. La diferencia entre las dos funciones es el punto donde sus rectas intersecan al eje y, tal como se observa en el inciso a.

La gráfica de una función $y = ax + b$ es una recta que es paralela a la recta de $y = ax$, desplazada b unidades sobre el eje y.
La constante b es el valor de y cuando $x = 0$, y se le llama **intercepto** con el eje y de la recta.
En el caso de la recta $y = ax$ donde $b = 0$, el intercepto corresponde al origen del sistema de coordenadas.

1. A partir de la gráfica $y = 3x$, grafique las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano, y realice lo que se indica a continuación.
   $y = 3x + 1$ $\quad$ $y = 3x - 1$
   a. Determine el intercepto con el eje y.
   b. ¿Qué diferencia existe entre las funciones?



2. Determine el intercepto con el eje y de las siguientes gráficas.



Clase 3 Razón de cambio $(a > 0)$

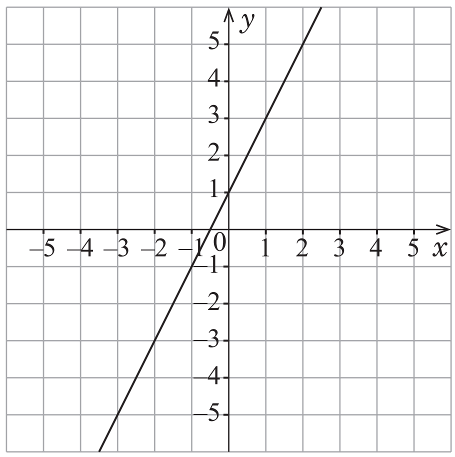
P Con base en las siguientes gráficas:

a. Determine la razón de cambio.

b. ¿Qué diferencias existen en ambas gráficas?

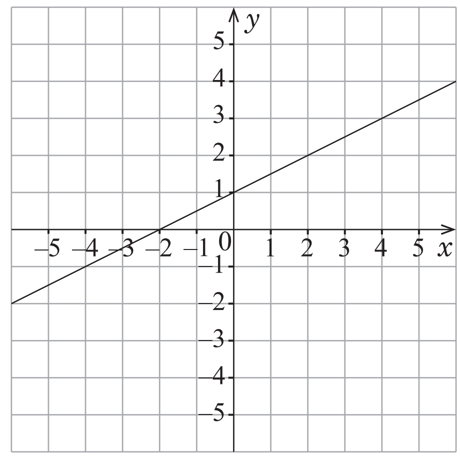
Gráfica ℓ

$y = 2x + 1$



Gráfica m

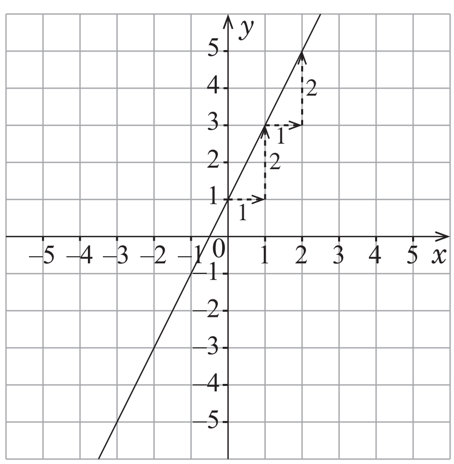
$y = \frac{1}{2}x + 1$



S a.

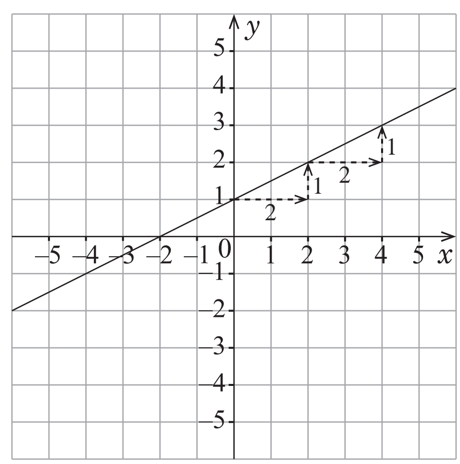
Gráfica ℓ

$y = 2x + 1$



Gráfica m

$y = \frac{1}{2}x + 1$



Cuando x aumenta 1 unidad, y aumenta 2.

Entonces, la razón de cambio de $y = 2x + 1$ es $\frac{2}{1} = 2$.

Cuando x aumenta 2 unidades, y aumenta 1.

Entonces, la razón de cambio de $y = \frac{1}{2}x + 1$ es $\frac{1}{2}$.

b. La gráfica de la función lineal con razón de cambio 2 está más inclinada que la gráfica de la función lineal con razón de cambio $\frac{1}{2}$.

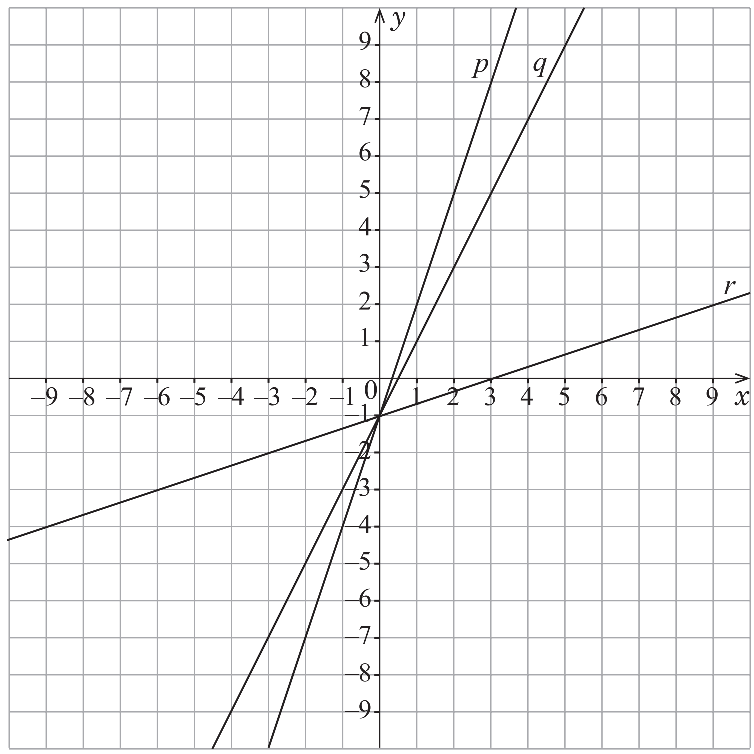
C La inclinación de la gráfica de una función lineal $y = ax + b$ depende del valor de la razón de cambio. Cada vez que a aumenta, también aumenta la inclinación de la recta y viceversa. Al valor a se le llama **pendiente** de la gráfica de la función lineal.

E Identifique la función lineal que corresponde a cada una de las gráficas.

a. $y = 2x - 1$

b. $y = 3x - 1$

c. $y = \frac{1}{3}x - 1$



Sección 2 Gráfica de la función

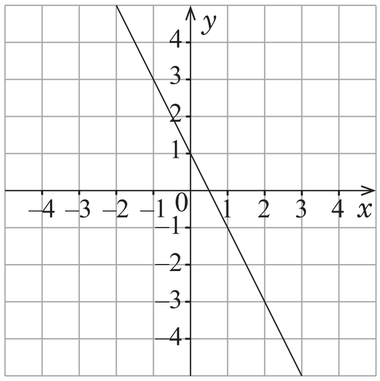
Clase 4 Razón de cambio $(a < 0)$

P Con base en la gráfica de cada función lineal:

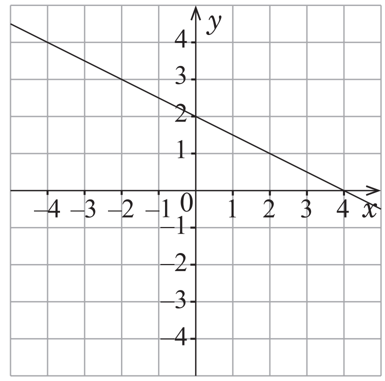
a. ¿Qué sucede con el valor de y cuando el valor de x aumenta 1 unidad?

b. Determine la razón de cambio.

Gráfica ℓ
$y = -2x + 1$

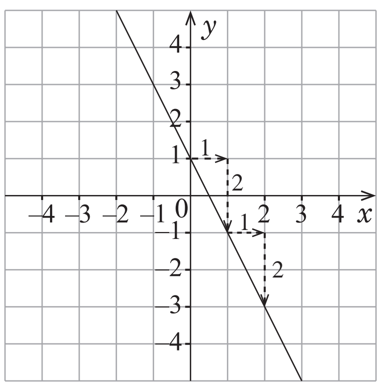


Gráfica m
$y = -\frac{1}{2}x + 2$



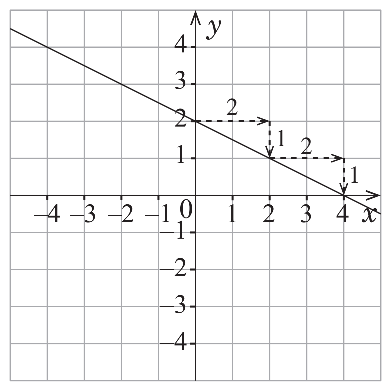
S a. Analizando qué sucede con los valores de y cuando x aumenta 1 unidad.

Gráfica ℓ
$y = -2x + 1$



Cuando x aumenta 1 unidad, y disminuye 2.

Gráfica m
$y = -\frac{1}{2}x + 2$



Cuando x aumenta 2 unidades, y disminuye 1.

b. (Razón de cambio) $= \frac{-2}{1}$
$= -2$

Cuando y disminuye se utilizan números negativos.

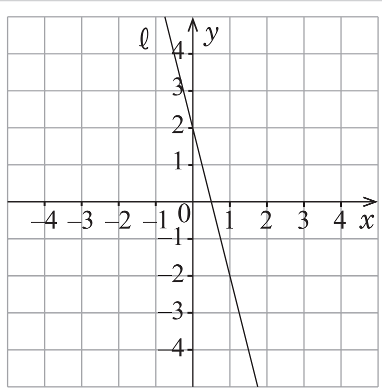
(Razón de cambio) $= \frac{-1}{2}$
$= -\frac{1}{2}$

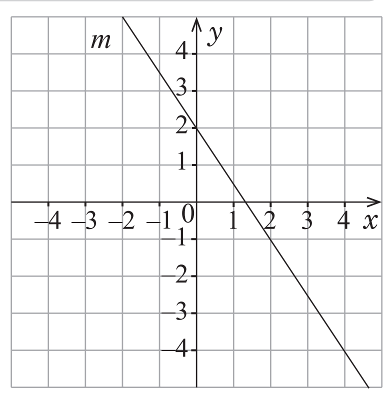
C Cuando la variable x aumenta su valor, la variable y disminuye su valor. Entonces, la razón de cambio es negativa. Para una función $y = ax + b$:
Si $a > 0$, al aumentar 1 unidad en x, se aumentan $|a|$ unidades en y.
Si $a < 0$, al aumentar 1 unidad en x, se disminuyen $|a|$ unidades en y.

E Observe la gráfica de cada función lineal y resuelva.

a. ¿Qué sucede con el valor de y cuando el valor de x aumenta 1 unidad?

b. Determine la razón de cambio de la función.

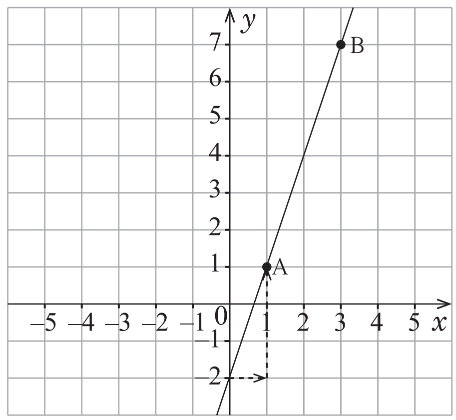




Clase 5 Pendiente de la gráfica de función lineal

P

Con base en la gráfica de la función lineal $y = 3x - 2$:



a. Determine la pendiente de la gráfica de la función.

b. Determine la variación de los valores de x y y usando las coordenadas de los puntos A y B.

c. Determine la razón de cambio de la función.

d. Compare el valor de la pendiente de la recta y la razón de cambio de la función. ¿Qué concluye?

S

a. Como la función lineal es $y = 3x - 2$, la pendiente es 3.

b. Para calcular la variación entre los valores de las coordenadas de A y B, se restan los valores de x y y de los dos puntos.
(Variación en y) = (valor de y en el punto B) − (valor de y en el punto A)= $7 - 1 = 6$
(Variación en x) = (valor de x en el punto B) − (valor de x en el punto A)= $3 - 1 = 2$

c. Para calcular la razón de cambio:
$\dfrac{(\text{Variación en } y)}{(\text{Variación en } x)} = \dfrac{6}{2} = 3$. Es decir, la razón de cambio es 3.

d. La pendiente es 3, y la razón de cambio es 3. Por tanto, el valor de la pendiente y la razón de cambio son iguales.

C

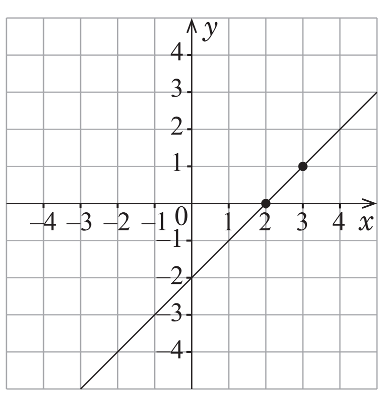
En una función lineal $y = ax + b$, la razón de cambio coincide con la pendiente.

$$\text{Pendiente} = \text{razón de cambio} = \frac{\text{variación en } y}{\text{variacion en } x} = a$$

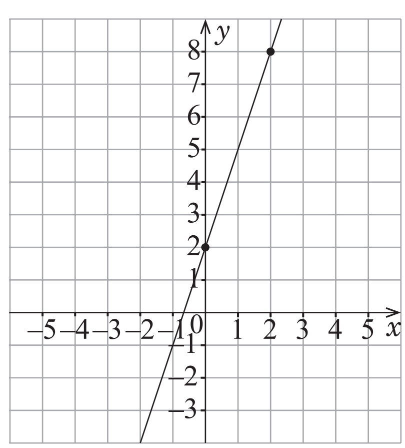
La constante a en una función lineal $y = ax + b$ corresponde a la pendiente de la gráfica.

E

1. Para la gráfica de la función lineal $y = x - 2$, determine la pendiente.



2. Con base en la siguiente gráfica:
   a. Determine cuántas unidades se desplaza y hacia arriba, cuando x se desplaza una unidad hacia la derecha.
   b. Calcule la razón de cambio considerando las coordenadas de los puntos indicados.
   c. Calcule la pendiente de la gráfica de la función lineal.



Clase 6 Pendiente e intercepto con el eje y de la gráfica de función lineal

P

Para cada una de las funciones:

$y = 2x - 2$ $\qquad\qquad$ $y = -x + 1$

a. Determine la pendiente de su gráfica.
b. Determine el intercepto con el eje y de su gráfica.

S

a. El valor de a de la función lineal corresponde a la pendiente de su gráfica.

En la función $y = 2x - 2$, la pendiente de su gráfica es 2.
En la función $y = -x + 1$, la pendiente de su gráfica es -1.

b. El valor de b de la función lineal corresponde al intercepto con el eje y de su gráfica.

En la función $y = 2x - 2$, el intercepto con el eje y de su gráfica es -2.
En la función $y = -x + 1$, el intercepto con el eje y de su gráfica es 1.

C

Dada una función $y = ax + b$, al valor de a se le llama pendiente y al valor de b se le llama intercepto con el eje y de su gráfica.

$$y = \underbrace{a}_{\text{Pendiente}}x + \underbrace{b}_{\text{Intercepto con el eje } y}$$

E

Determine la pendiente y el intercepto con el eje y de la gráfica de las siguientes funciones.

a. $y = 2x + 1$
b. $y = -x + 3$
c. $y = x + 4$
d. $y = -x$
e. $y = x - 1$
f. $y = x - 5$
g. $y = 2x$
h. $y = 4x - 6$

Sección 2 Gráfica de la función

Clase 7 Relación entre tabla, ecuación y gráfica de función lineal

P Se muestra abajo la tabla, la ecuación y la gráfica de la función lineal $y = 3x + 2$. Analice dónde aparece la razón de cambio, la pendiente y el intercepto con el eje y en la tabla, la ecuación y la gráfica.

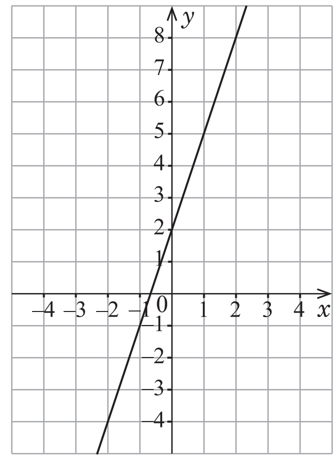
Tabla

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8

Ecuación

$y = 3x + 2$

Gráfica



S Tabla

$+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1$

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8

$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3$

Aumento en y cuando x aumenta 1 → Razón de cambio

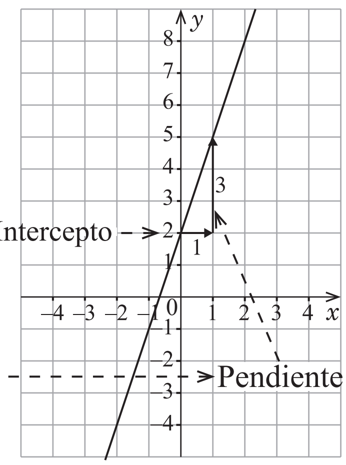
Valor de y cuando $x = 0$

Ecuación

$y = 3x + 2$ - - - Intercepto

Razón de cambio - - - Pendiente

Gráfica



C

Se encuentran las siguientes relaciones entre tabla, ecuación y gráfica de una función lineal.

En la tabla	En la ecuación	En la gráfica
Aumento en y cuando x aumenta 1 unidad	a	Pendiente
Valor de y cuando $x = 0$	b	Intercepto con el eje y

E Complete la siguiente tabla.

Función	Valor de y cuando $x = 0$	Cuando x aumenta, ¿el valor de y aumenta o disminuye?	Pendiente	Intercepto con el eje y
$y = 2x - 1$				
$y = -3x + 4$				
			-2	-4

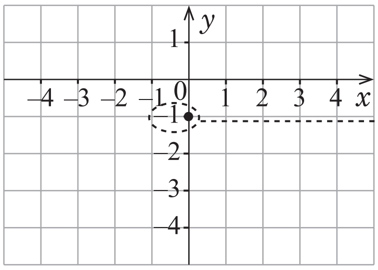
Sección 2 Gráfica de la función

Clase 8 Gráfica de función lineal dada la pendiente y el intercepto

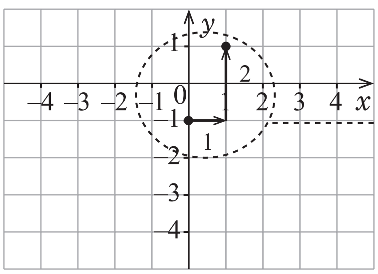
P Grafique $y = 2x - 1$.

¡Se puede graficar con dos puntos!

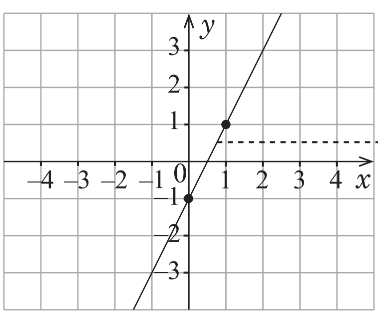
S



El intercepto con el eje y es -1.



La pendiente $a = 2$, es decir, cuando x aumenta 1 unidad, y aumenta 2.



Se traza una recta que pase por el intercepto y por el punto encontrado anteriormente.

C Para graficar una función lineal $y = ax + b$ dado el valor de a y b, se determina el intercepto con el eje y, luego otro punto por donde pasa la gráfica a partir de la pendiente. Para finalizar, se traza una recta que pase por ambos puntos.

E Grafique.

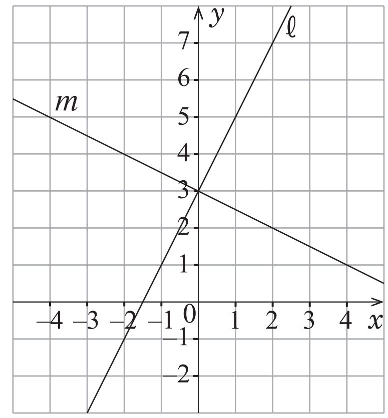
a. $y = 3x - 2$
b. $y = 2x + 1$
c. $y = -x + 3$
d. $y = -2x + 1$

Sección 2 Gráfica de la función

Clase 9 Relación de la gráfica con la ecuación de función dada la pendiente y el intercepto (1)

P

Observe las gráficas ℓ y m de la función lineal.
¿Cuál de ℓ y m corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones de las funciones?
Analice el valor de a y b de cada función lineal $y = ax + b$.



$y = 2x + 3$

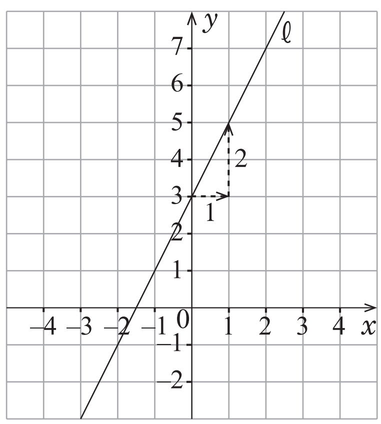
$y = -\frac{1}{2}x + 3$

S

Ambas ecuaciones de las funciones tienen $b = 3$, entonces sus gráficas intersecan al eje y en $y = 3$.

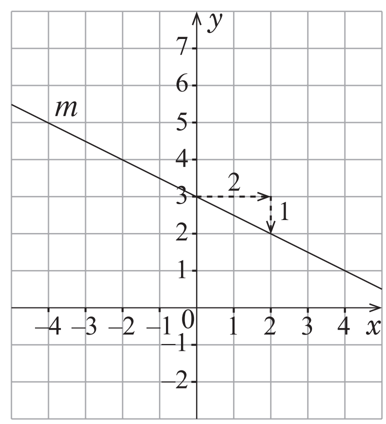
Al analizar el valor de a de cada función:

En la gráfica ℓ, cuando x aumenta 1 unidad, y aumenta 2 unidades. Es decir, $a = 2$. Entonces, ℓ corresponde a $y = 2x + 3$.



En la gráfica m, cuando x aumenta 2 unidades, y disminuye 1 unidad. Es decir, $a = -\frac{1}{2}$.

Entonces, m corresponde a $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

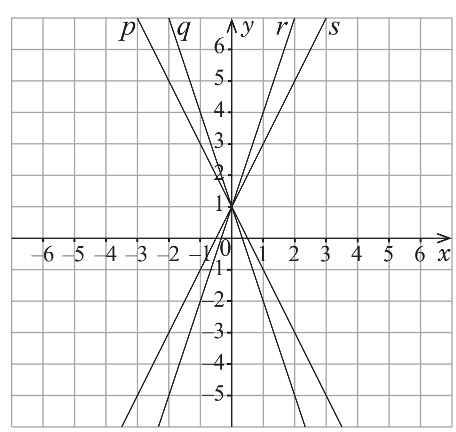


C

Para relacionar la gráfica con la ecuación de una función, se puede tomar en cuenta la pendiente y el intercepto de la gráfica. Cuando el intercepto con el eje y (valor de b) es el mismo en ambas funciones, se puede analizar la pendiente (valor de a) para identificar cada una.

E

Observe las gráficas de las funciones lineales. ¿Cuál de ellas corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones de las funciones?



a. $y = 2x + 1$

b. $y = 3x + 1$

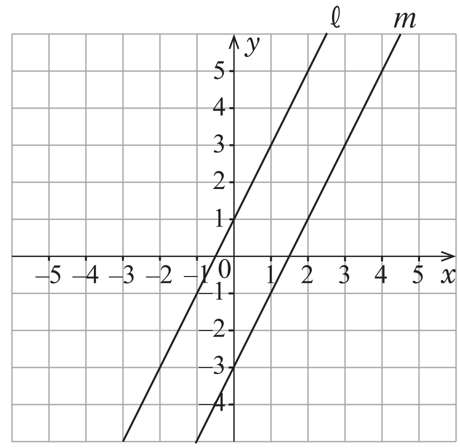
c. $y = -3x + 1$

d. $y = -2x + 1$

Clase 10 Relación de la gráfica con la ecuación de función dada la pendiente y el intercepto (2)

P

Observe las gráficas ℓ y m de la función lineal. ¿Cuál de ℓ y m corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones de las funciones?



Analice el valor de a y b de cada función lineal $y = ax + b$.

$y = 2x + 1$

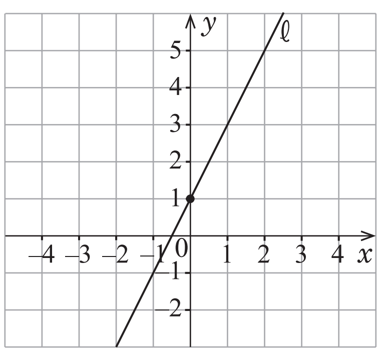
$y = 2x - 3$

S

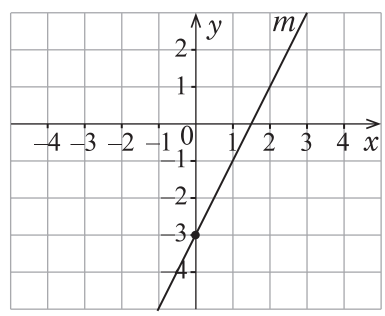
Ambas ecuaciones de las funciones tienen $a = 2$, entonces la pendiente en sus gráficas es 2.

Al analizar el valor de b de cada función:

ℓ interseca al eje y en 1, ya que $b = 1$. Es decir, pasa por el punto (0, 1). Entonces, ℓ corresponde a $y = 2x + 1$.



m interseca al eje y en -3, ya que $b = -3$. Es decir, pasa por el punto (0, -3). Entonces, m corresponde a $y = 2x - 3$.



C

Para relacionar la gráfica con la ecuación de una función, se puede tomar en cuenta la pendiente y el intercepto de la gráfica. Cuando la pendiente (valor de a) es la misma en ambas funciones, se puede analizar el intercepto con el eje y (valor de b) para identificar cada una.

E

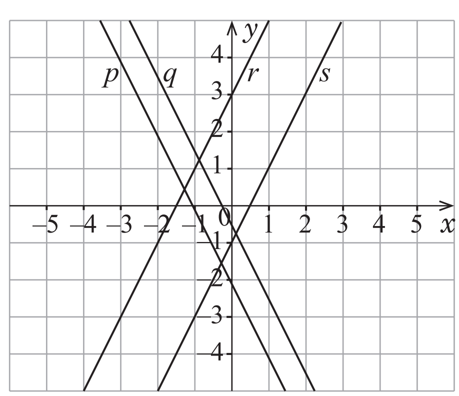
Observe las siguientes gráficas de la función lineal. ¿Cuál de ellas corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones de las funciones?

a. $y = 2x - 1$

b. $y = 2x + 3$

c. $y = -2x - 2$

d. $y = -2x - \frac{1}{2}$



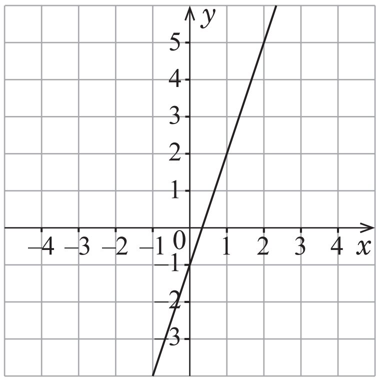
Sección 2 Gráfica de la función

Clase 11 Ecuación de una función de la forma $y = ax + b$ mediante la lectura de la gráfica $(a > 0)$

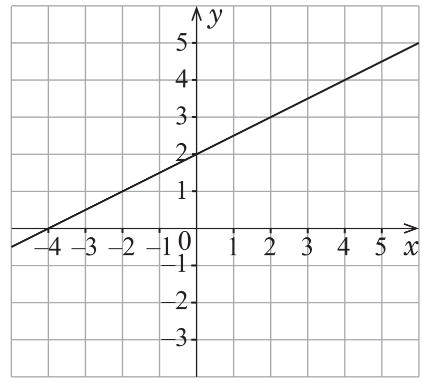
P

Con base en las siguientes gráficas:

Gráfica ℓ



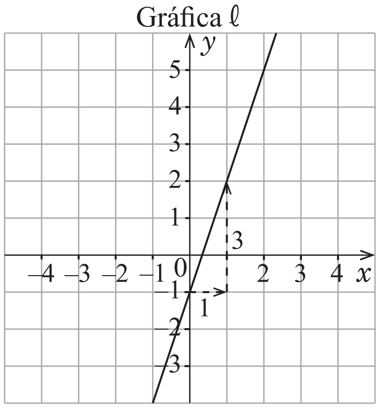
Gráfica m



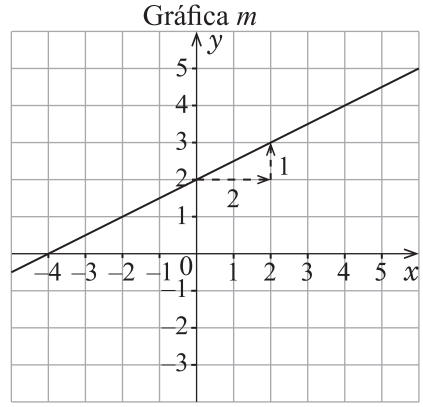
a. Identifique el intercepto con el eje y (valor de b).
b. Identifique la pendiente (valor de a).
c. Escriba la ecuación de las funciones lineales de la forma $y = ax + b$.

S

Gráfica ℓ



Gráfica m



Gráfica ℓ:

a. Intercepto: $b = -1$

b. Pendiente: $a = \frac{3}{1}$
$= 3$

c. Sustituyendo los valores de b y a en la ecuación de la función, se obtiene:
$y = 3x - 1$

Gráfica m:

a. Intercepto: $b = 2$

b. Pendiente: $a = \frac{1}{2}$

c. Sustituyendo los valores de b y a en la ecuación de la función, se obtiene:
$y = \frac{1}{2}x + 2$

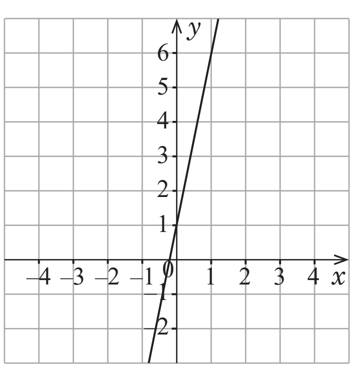
C

Para escribir la ecuación de una función lineal de la forma $y = ax + b$ a partir de la gráfica, es necesario identificar el intercepto con el eje y (valor de b) y la pendiente (valor de a) de la gráfica.

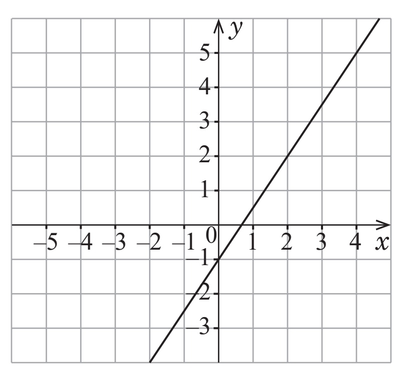
E

Escriba la ecuación de la función lineal de la forma $y = ax + b$ para las siguientes gráficas.

a.



b.

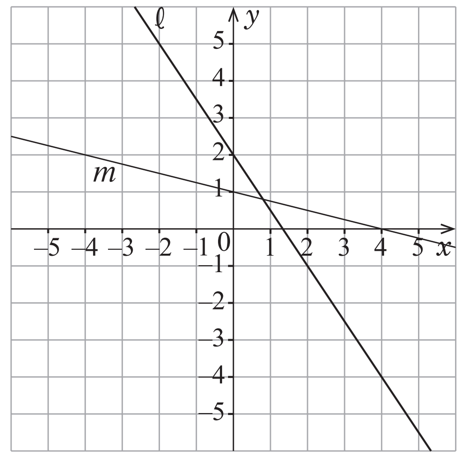


Clase 12 Ecuación de una función de la forma $y = ax + b$ mediante la lectura de la gráfica $(a < 0)$

P

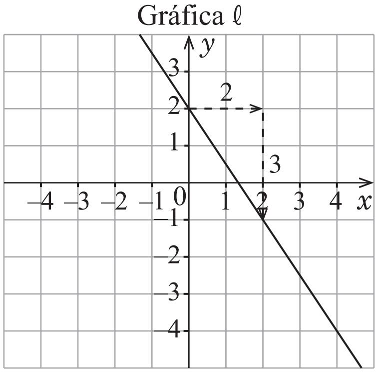
Con base en las gráficas ℓ y m:

a. Identifique el intercepto con el eje y (valor de b).
b. Identifique la pendiente (valor de a).
c. Escriba la ecuación de la función lineal de la forma $y = ax + b$.



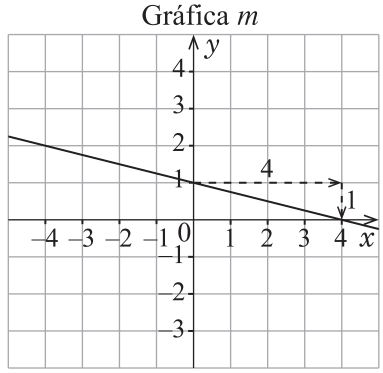
S

Gráfica ℓ



a. Intercepto: $b = 2$
b. Pendiente: $a = -\frac{3}{2}$
c. $y = -\frac{3}{2}x + 2$

Gráfica m



a. Intercepto: $b = 1$
b. Pendiente: $a = -\frac{1}{4}$
c. $y = -\frac{1}{4}x + 1$

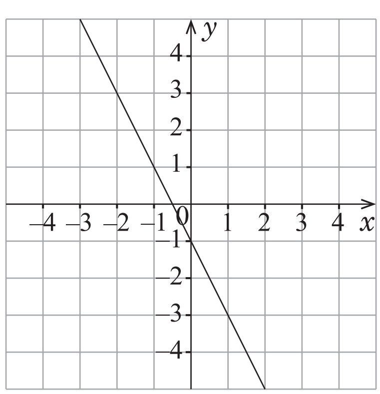
C

Para escribir la ecuación de una función lineal de la forma $y = ax + b$ a partir de la gráfica, es necesario identificar el intercepto con el eje y (valor de b) y la pendiente (valor de a) de la gráfica.

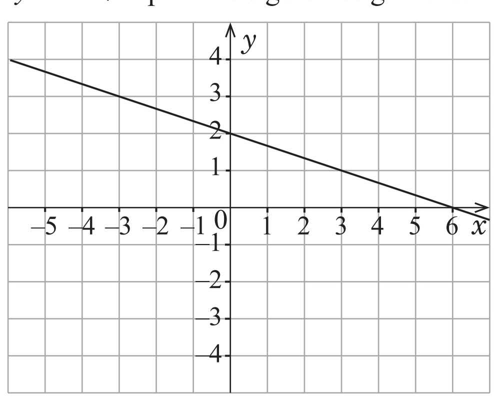
E

Escriba la ecuación de la función lineal de la forma $y = ax + b$ para las siguientes gráficas.

a.



b.



Sección 2 Gráfica de la función

Clase 13 Ecuación de una función de la forma $y = ax + b$ mediante la lectura de la pendiente y coordenadas de un punto en la gráfica

P

a. Encuentre la ecuación de la función lineal cuya gráfica tiene pendiente 3 y pasa por el punto (2, 5).

b. Grafique la función lineal del inciso a.

S

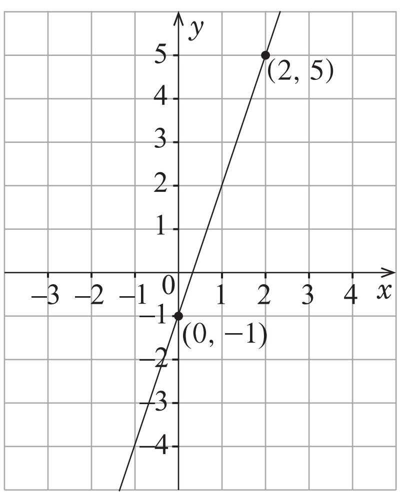
a. Los datos que se conocen son: la pendiente de la gráfica de la función $a = 3$, y las coordenadas (2, 5) de un punto que pertenece a la gráfica, es decir, $x = 2$ y $y = 5$.

Se sustituyen estos valores en la ecuación de la forma general de una función lineal: $y = ax + b$, para encontrar el valor de b.

$$y = ax + b$$
$$5 = 3 \times 2 + b$$
$$5 = 6 + b$$
$$5 - 6 = b$$
$$-1 = b$$
$$b = -1$$

La ecuación de la función lineal cuya gráfica tiene pendiente 3 y pasa por el punto (2, 5) es $y = 3x - 1$.

b. Para graficar la función, se utiliza el punto dado (2, 5) y el intercepto con el eje y $b = -1$.



C

Para determinar la ecuación de una función lineal, dada la pendiente (valor de a) de su gráfica y las coordenadas (x, y) de un punto por donde pasa la gráfica:

Paso 1. Se sustituye la pendiente y las coordenadas del punto dado en la ecuación de la forma $y = ax + b$, para encontrar el valor de b.

Paso 2. Se escribe la ecuación de la función de la forma $y = ax + b$ con los valores de a y b encontrados.

E

a. Determine la ecuación de la función lineal cuya gráfica tiene pendiente 3 y pasa por el punto (4, 3).

b. Determine la ecuación de la función lineal cuya gráfica tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y pasa por el punto (3, 4).

Clase 14 Ecuación de una función de la forma $y = ax + b$ mediante las coordenadas de dos puntos de la gráfica, donde $a > 0$

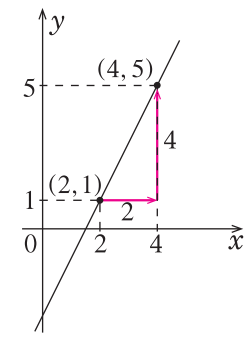
P Dadas las coordenadas de dos puntos: A (2, 1) y B (4, 5), encuentre la ecuación de la función lineal cuya gráfica pasa por los dos puntos.

S Paso 1. Determine la pendiente.

Si la gráfica pasa por los puntos A (2, 1) y B (4, 5), entonces la pendiente se calcula:

$$a = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

Pendiente $= \dfrac{\text{variación en } y}{\text{variación en } x}$



Paso 2. Determine el intercepto con el eje y.

Sustituya la pendiente (valor de a) y un punto A (2, 1) por donde pasa la recta $y = ax + b$.

$$y = ax + b$$
$$1 = 2 \times 2 + b$$
$$1 = 4 + b$$
$$1 - 4 = b$$
$$-3 = b$$
$$b = -3$$

Paso 3. Sustituya los valores de a y b en la forma general de la función lineal $y = ax + b$. Se obtiene la siguiente ecuación:

$$y = 2x - 3$$

C Para encontrar la ecuación de una función lineal cuando se conocen las coordenadas de dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ de su gráfica:

Paso 1. Se determina la pendiente (valor de a) utilizando $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Paso 2. Se determina el intercepto con el eje y (valor de b), sustituyendo el valor de a encontrado en el paso 1 y las coordenadas de uno de los puntos dados en $y = ax + b$.

Paso 3. Se escribe la ecuación de la función lineal de la forma $y = ax + b$, sustituyendo los valores de a y b encontrados.

E Determine la ecuación de la función lineal de la forma $y = ax + b$, cuya gráfica pasa por los puntos:

a. A (1, 2) y B (3, 6)

b. A (2, 4) y B (5, 7)

c. A (2, 7) y B (−1, 1)

Clase 15 Ecuación de una función de la forma $y = ax + b$ mediante las coordenadas de dos puntos de la gráfica, donde $a < 0$

P Dadas las coordenadas de dos puntos: A (2, 6) y B (7, 1), encuentre la ecuación de la función lineal cuya gráfica pasa por los dos puntos.

S Paso 1. Determine la pendiente (valor de a).

Sustituya los valores (x, y) de los puntos A (2, 6) y B (7, 1) en $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1-6}{7-2} \\ &= \frac{-5}{5} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Paso 2. Determine el intercepto con el eje y (valor de b).

Sustituya la pendiente y un punto A (2, 6) por donde pasa la gráfica de la función lineal $y = ax + b$, se tiene:

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ 6 &= -1 \times 2 + b \\ 6 &= -2 + b \\ 6 + 2 &= b \\ 8 &= b \\ b &= 8 \end{aligned}$$

Paso 3. Sustituya los valores de a y b en la forma general de la función lineal $y = ax + b$:

$$y = -x + 8$$

C Para encontrar la ecuación de una función lineal cuando se conocen las coordenadas de dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ de su gráfica:

Paso 1. Se determina la pendiente utilizando $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Paso 2. Se determina el intercepto con el eje y, sustituyendo el valor de a encontrando en el paso 1 y las coordenadas de uno de los puntos dados en $y = ax + b$.

Paso 3. Se escribe la ecuación de la función lineal de la forma $y = ax + b$, sustituyendo los valores de a y b encontrados.

E Determine la ecuación de la función lineal de la forma $y = ax + b$, cuya gráfica pasa por los puntos:

a. A (1, −1) y B (−2, 5)

b. A (1, 2) y B (2, 1)

c. A (1, 8) y B (3, 2)

d. A (−2, 1) y B (1, −5)

Sección 2 Gráfica de la función

Clase 16 Aplicación de función lineal en las ciencias

P En la factura del consumo de energía eléctrica mensual de la casa de don Roberto aparecen los siguientes datos: cuota fija 18 quetzales y 2 quetzales por kilovatio hora (kWh).

a. Escriba la ecuación de la función lineal del total y a pagar, cuando consume x kilovatios hora.
b. ¿Cuánto debe pagar don Roberto si consume 140 kilovatios hora en un mes?
c. Grafique la función lineal que relaciona el total a pagar con el consumo de kilovatios hora.

S a. Con base en la forma general de la ecuación de una función lineal: $y = ax + b$, se tiene:
El total a pagar está representado por y.
Los kilovatios hora consumidos están representados por x.
La cuota fija (cargo fijo) está en quetzales, es decir, $b = 18$.
El costo por kilovatio hora está en quetzales, es decir, $a = 2$.
Entonces, la ecuación de la función lineal es: $y = 2x + 18$.

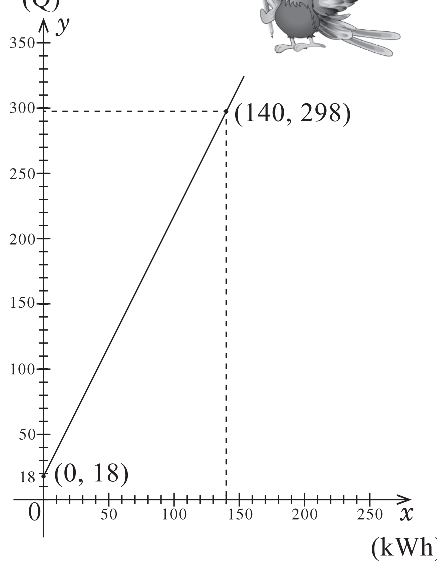
Como la gráfica refleja la relación entre el pago y el consumo de energía, se necesita graficar solo la parte de números positivos.

b. Sustituyendo 140 kilovatios hora en x, el total a pagar y es:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 18 \\ &= 2 \times 140 + 18 \\ &= 280 + 18 \\ &= 298 \end{aligned}$$

Respuesta: don Roberto debe pagar 298 quetzales.

c. Para graficar la función lineal $y = 2x + 18$, se puede utilizar el intercepto con el eje y, es decir, 18 y el punto que representa el total a pagar cuando se consume cierta cantidad de kilovatios hora (140, 298).



C Para resolver problemas que requieren el uso de conocimientos sobre una función lineal:

Paso 1. Se identifican las dos variables x y y, así como la pendiente (valor de a) y el intercepto con el eje y (valor de b).
Paso 2. Se escribe la ecuación de la función lineal.
Paso 3. Se sustituye el valor de x dado para encontrar el valor de y que se está buscando.

E Resuelva el siguiente problema.
La relación entre grados centígrados (°C) y grados Fahrenheit (°F) es la siguiente: 0°C es equivalente a 32°F y 100°C a 212°F.

Utilizando dos puntos, se puede determinar la pendiente a.

a. Si x°C equivalen a y°F, y es una función lineal de x, determine la pendiente (valor de a).
b. Determine el intercepto con el eje y (valor de b).
c. Determine la ecuación de la función lineal de la forma $y = ax + b$.

Clase 17 Trazo de la gráfica de una ecuación de primer grado con dos variables

P

Con base en la ecuación lineal $-2x + y = 1$:

a. Lleve la ecuación lineal $-2x + y = 1$ a la forma $y = ax + b$ e identifique el intercepto con el eje y.

b. Determine otro punto de la gráfica utilizando la ecuación y trace la gráfica.

S

a. Para llevar la ecuación lineal $-2x + y = 1$ a la forma $y = ax + b$, se despeja y:

$$-2x + y = 1$$
$$y = 1 + 2x$$
$$y = 2x + 1$$

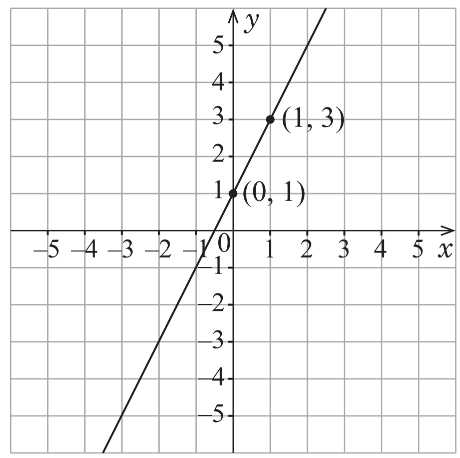
Respuesta: el intercepto con el eje y es 1.

b. Determine otro punto de la gráfica, sustituyendo cualquier valor de x en la ecuación $y = 2x + 1$.
Si $x = 1$,

$$y = 2 \times 1 + 1$$
$$= 2 + 1$$
$$= 3$$

La gráfica pasa por el punto (1, 3).

Trace la gráfica que pasa por los puntos (0, 1) y (1, 3).



C

Para graficar una ecuación de primer grado con dos variables:

Paso 1. Se convierte la ecuación a la forma $y = ax + b$.
Paso 2. Se identifica el intercepto con el eje y (valor de b).
Paso 3. Se sustituye cualquier valor de x en la ecuación $y = ax + b$ para encontrar las coordenadas de otro punto de la gráfica.
Paso 4. Se traza la línea recta que pasa por los dos puntos determinados.

E

Para cada una de las siguientes ecuaciones, resuelva.

$\ell: x + y - 2 = 0$

$m: -2x + y - 3 = 0$

a. Convierta la ecuación a la forma $y = ax + b$ e identifique el intercepto con el eje y.
b. Determine otro punto de la gráfica.
c. Grafique.

Clase 18 Gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables

P

Con base en el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x+y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$:

a. Convierta las dos ecuaciones a la forma $y = ax + b$.
b. Grafique las dos ecuaciones en un mismo plano cartesiano.
c. Determine las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.
d. Interprete el sentido del punto de intersección.

S

a. Al convertir las ecuaciones a la forma $y = ax + b$, se tiene:

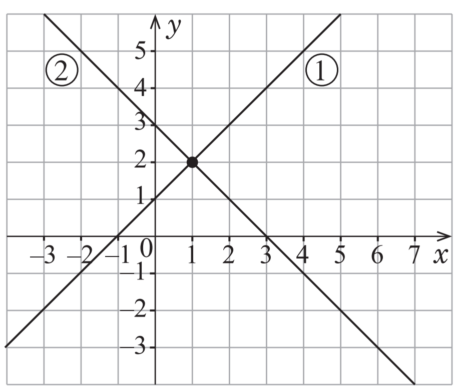
$$\begin{cases} y = x + 1 & ① \\ y = -x + 3 & ② \end{cases}$$

b. Para graficar cada ecuación, identifique la pendiente y el intercepto con el eje y.

① $y = x + 1$
Pendiente: 1
Intercepto con el eje y: 1

② $y = -x + 3$
Pendiente: -1
Intercepto con el eje y: 3

Trace la gráfica de ambas rectas en el mismo plano cartesiano:



c. Según la gráfica, el punto donde intersecan ambas gráficas tiene las coordenadas (1, 2).

d. Como el punto (1, 2) se encuentra sobre las gráficas de las dos ecuaciones, se puede decir que las coordenadas del punto satisfacen las dos ecuaciones. Por tanto, las coordenadas del punto son la solución del sistema de las dos ecuaciones, es decir, la solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$.

C

Cuando se grafica un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables en un solo plano, las coordenadas del punto en el que se intersecan las dos gráficas corresponden a la solución del sistema.

E

Trace las gráficas de las ecuaciones en un mismo plano, y resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$$

Ejercitación A

1. Indique cuáles de las siguientes ecuaciones de las funciones corresponden a una función lineal.

   a. $y = 3x + 1$ b. $y = 2x$ c. $y = \frac{10}{x}$ d. $y = x + 5$

2. Observe los datos de la siguiente tabla y resuelva.

x	-2	-1	0	1	2
y	1	3	5	7	9

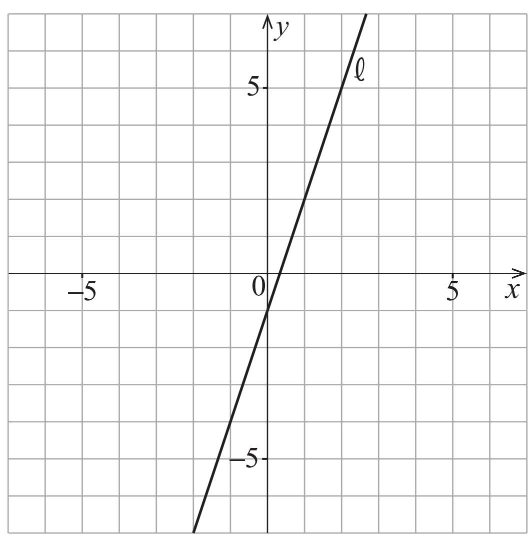
   a. Exprese y como función lineal de x.
   b. Encuentre la razón de cambio de y a x.

3. Para la función lineal $y = 2x - 1$, resuelva.

   a. Determine la pendiente.
   b. Determine el intercepto con el eje y.

4. Observe la gráfica ℓ y resuelva.

   a. Determine la pendiente.
   b. Determine el intercepto con el eje y.
   c. Escriba la ecuación de la función de la forma $y = ax + b$.
   d. Grafique la función $y = -x + 4$.



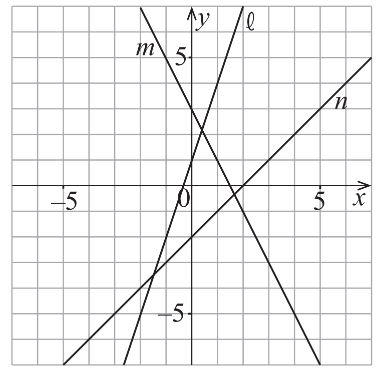
5. Resuelva.

   a. Determine la ecuación de la función lineal cuya gráfica tiene pendiente 3 y cuyo intercepto con el eje y es -1.
   b. Determine la ecuación de la función lineal cuya gráfica tiene pendiente -2 y que pasa por el punto $(0, 1)$.
   c. Determine la ecuación de la función lineal cuya razón de cambio es 4 y $y = -1$ cuando $x = 0$.

Ejercitación B

1. Identifique la ecuación de las funciones que corresponde a cada una de las gráficas.

   a. $y = x - 2$
   b. $y = 3x + 1$
   c. $y = -2x + 3$

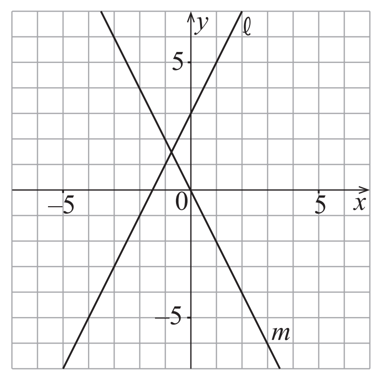


2. Resuelva.

   a. Determine la ecuación de la función lineal cuya gráfica pasa por el punto $(0, -1)$ y es paralela a la gráfica de la función $y = 2x$.
   b. Determine la ecuación de la función lineal cuyo intercepto con el eje y es 2 y que pasa por el punto $(1, 6)$.
   c. Determine la ecuación de la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(3, 1)$.

3. Observe las gráficas y resuelva.

   a. Escriba la ecuación de la función en la forma $y = ax + b$ para cada gráfica.
   b. Encuentre las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas ℓ y m resolviendo el sistema de ecuaciones.

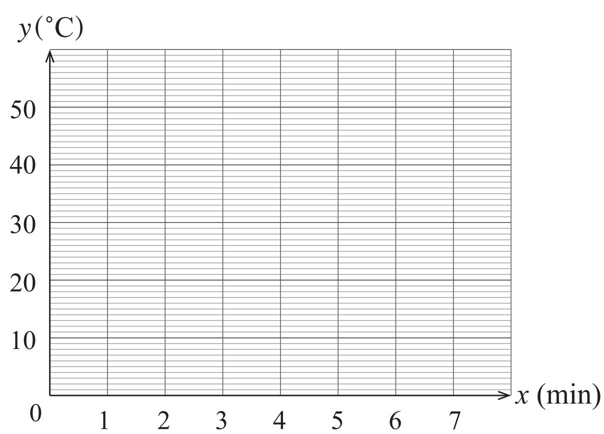


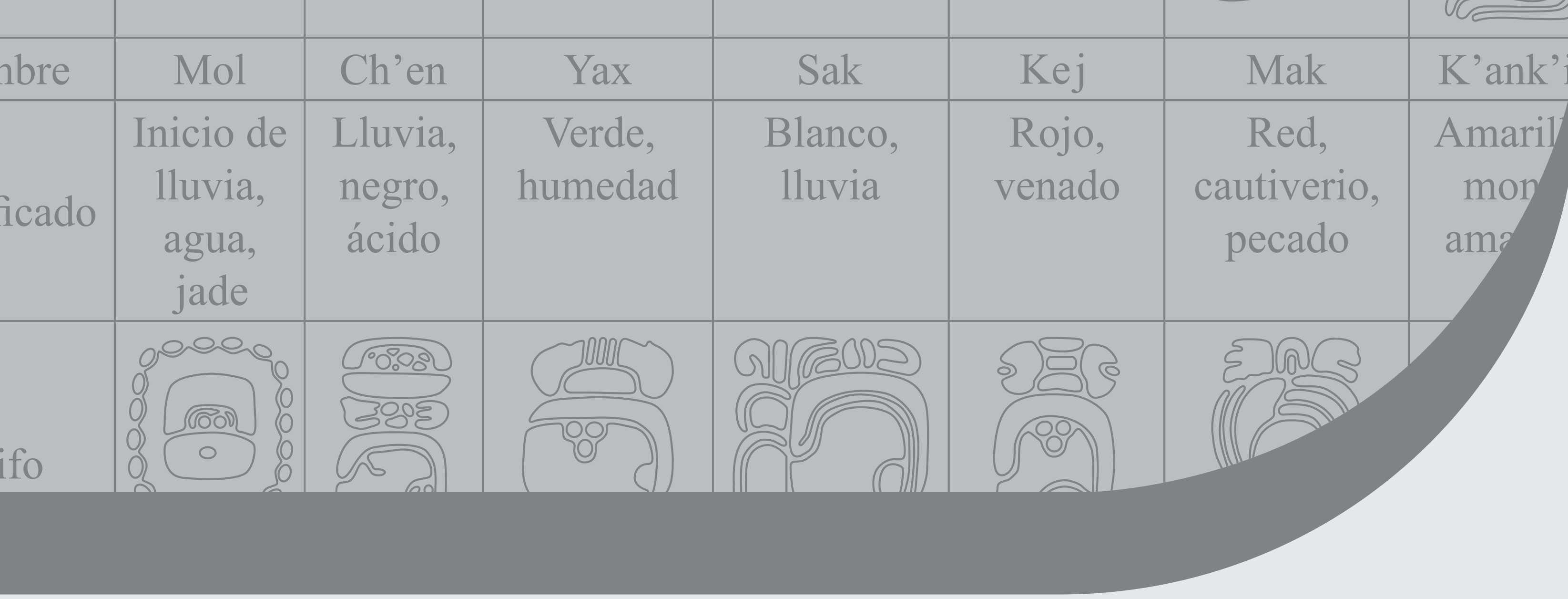
4. Alberto calentó el agua y observó el cambio de temperatura.
   Cuando la temperatura está y ˚C después de x minutos, la relación entre x y y está expresada en la siguiente tabla.

x	0	1	2	3	4	5
y	15	21	24	29	34	40

   a. Ubique los pares ordenados de la tabla en el plano que está a la derecha.

   b. Trace una línea recta que pase por los puntos $(0, 15)$ y $(5, 40)$.





Unidad 3 •••

Etnomatemática

Clase 1 Ciclos: Cholq'ij (260 días) y Cholab' (365 días)

P

a. Describa los ciclos del tiempo maya más conocidos.
b. Identifique las diferencias entre los ciclos descritos en el inciso a.

S

a. Cholq' ij: también se le llama Calendario Sagrado y consta de 260 días. Cada año del Cholq'ij tiene 13 meses y cada mes 20 días. El primer día, según los K'iche', es waqxaqib' B'atz (8 B'atz') y el último es wuqub' Tz'i'(7 Tz'i'). La combinación de las 13 energías con los 20 días forman los 260 días. Los días del Cholq'ij se repiten cada 20 días (B'atz, E,…,Tz'i') secuencialmente con cada una de las 13 energías.

Cholab': también se le llama Calendario Agrícola y consta de 365 días. Cada año del Cholab' tiene 18 meses de 20 días y un mes de 5 días llamado Wayeb' $(18 \times 20 + 5 = 365)$. El primer mes de este calendario es Pop y el último es Wayeb'. Este calendario utiliza las energías del 1 al 13 pero su ciclo es de meses y días.

b. Diferencias entre el Cholq'ij y Cholab':

Un ciclo del Cholq'ij se cierra cuando pasan 20 veces las 13 energías, mientras un ciclo del Cholab' se cierra cuando han pasado los 18 meses de 20 días y un mes de 5 días.

El Cholq'ij se utiliza más para rituales y en un contexto espiritual, mientras que el Cholab' se utiliza más en observaciones astronómicas, como los períodos de solsticio y equinoccio, y actividades agrícolas.

C

El Cholq'ij es para uso espiritual mientras que el Cholab' es para observaciones astronómicas y y prácticas agrícolas.

E

a. ¿Cómo se llama el Calendario Maya que tiene 365 días?
b. ¿Cuántos días tiene el mes más corto del Cholab'?
c. Explique una diferencia entre el Cholq'ij y el Cholab'.

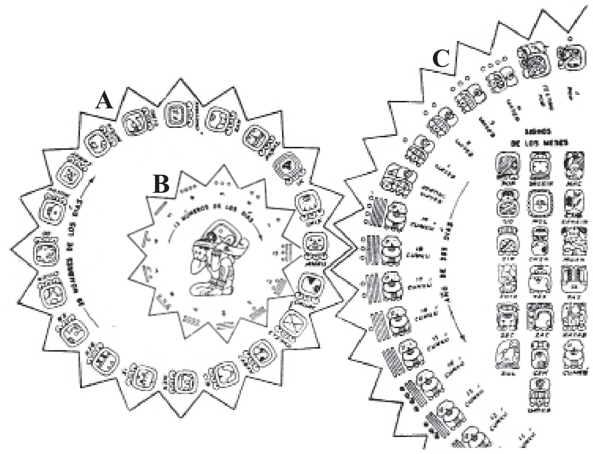
Clase 2 Secuencia del 52 y 73 en la rueda calendárica

P

Según el pensamiento maya, ¿qué representa la relación del 52 y 73?

S

El Cholq'ij y el Cholab' guardan una relación armoniosa.
Para lograr la armonía y conseguir fechas exactas, los mayas descubrieron la relación numérica de ambos calendarios, es decir, la relación entre 52 y 73. Significa que las fechas de ambos calendarios coinciden cada 52 ciclos del Cholab' o cada 73 ciclos del Cholq'ij.
Para comprobar lo anterior, se multiplica 52 ciclos del Cholab' por 365 días o 73 ciclos del Cholq'ij por 260 días.
$52 \times 365 = 18{,}980$
$73 \times 260 = 18{,}980$
Lo que significa que pasados 18,980 días, ambos calendarios volverán a coincidir en las mismas posiciones.



La rueda calendárica representada por las ruedas A y B del Cholq'ij y la rueda C del Cholab'.

C

A la relación de ambos calendarios para dar una fecha se le llama rueda calendárica.

Ejemplo:
El día 7 de marzo de 1977 correspondió en el Cholq'ij al 9 Kej y en el Ab' al 10 K'ayab', esa fecha fue 9 Kej 10 K'ayab'. Para que se repita esa fecha deberán pasar 52 ciclos Ab', lo que significa que se repetirá en el año 2029 después de 52 años de 365 días. Observe el cuadro relacionando a las fechas de los Calendarios Gregoriano, Cholq'ij y Ab'.

Fecha Gregoriana	Fecha Cholq'ij		Fecha Ab'	
7/mar/1977	9	Kej	10	K'ayab'
8/mar/1977	10	Q'anil	11	K'ayab'
9/mar/1977	11	Toj	12	K'ayab'
10/mar/1977	12	Tz'i'	13	K'ayab'
11/mar/1977	13	B'atz'	14	K'ayab'
12/mar/1977	1	E/B'e	15	K'ayab'
13/mar/1977	2	Aj	16	K'ayab'
14/mar/1977	3	Ix	17	K'ayab'
15/mar/1977	4	Tz'ikin	18	K'ayab'
16/mar/1977	5	Ajmaq	19	K'ayab'
17/mar/1977	6	No'j	0	Kumk'u
18/mar/1977	7	Tijax	1	Kumk'u
19/mar/1977	8	Kawoq	2	Kumk'u

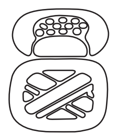
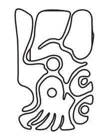
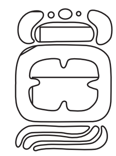
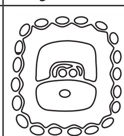
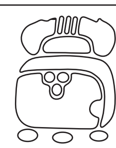
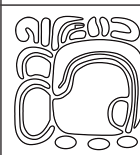
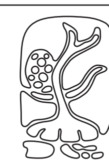
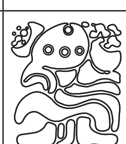
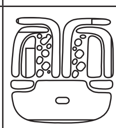
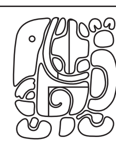
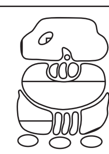
E

a. ¿Cuántos ciclos del Cholab' deben pasar para que coincidan en fecha con el Cholq'ij?
b. ¿Cuántos ciclos del Cholq'ij deben pasar para que coincidan en fecha con el Cholab'?

Clase 3 Meses del calendario maya y su significado

P ¿Qué significado tienen los meses del Cholab'?

S El Cholab' tiene 19 meses, 18 meses de 20 días cada uno y un mes de 5 días. Cada mes tiene un nombre, un significado y su respectivo glifo. A continuación, se presentan los nombres de los meses con fonología yucateca y sus respectivos significados.

Nombre	Pop	Woo	Sip	Sotz'	Tzek	Xul	Yaxk'in
Significado	Estera amarillo, petate	Rana, sapo, negro	Rojo, conjunción	Murciélago	Fin, palma, calavera	Instrumento musical	Inicio agrícola, monte verde, nuevo día
Glifo							
Nombre	Mol	Ch'en	Yax	Sak	Kej	Mak	K'ank'in
Significado	Inicio de lluvia, agua, jade	Lluvia, negro, ácido	Verde, humedad	Blanco, lluvia	Rojo, venado	Red, cautiverio, pecado	Amarillo, monte amarillo
Glifo							
Nombre	Muw'an	Pax	K'ayab'	Kumk'u'	Wayeb'		
Significado	Halcón, búho	Tambor, música	Tortuga, guacamaya	Granero, oscuridad	Reflexión, gracia, penitencia		
Glifo							

C Cada mes del Cholab' tiene un significado relacionado con el nombre de un animal, fenómeno natural u objeto de la naturaleza. Los nombres más utilizados de los meses están en idioma yucateco.

E

1. Relacione el nombre del mes con su significado a través de una línea.

Ch'en	Wayeb'	Pop	Sotz'	Mak	Yaxk'in	Sak
Petate/ estera	Murciélago	Ácido/lluvia	Penitencia/ gracia	Blanco/ lluvia	Monte verde	Pecado/red

2. Dibuje dos glifos de su preferencia.

Sección 2 El universo y sus cuadrantes
Clase 1 Cuadrantes y puntos cardinales

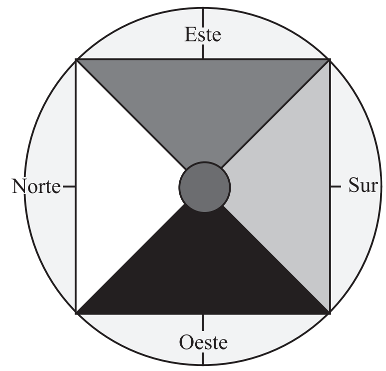
P

¿Cómo se relacionan los cuadrantes con los puntos cardinales?

S

La gráfica que está a la derecha ilustra la concepción holística del pensamiento maya. El área del círculo significa contexto social, cultural y espiritual. El área del cuadrado representa el lugar donde vivimos, nos comunica con la bóveda celeste y con el Xib'alb'a.

Los 4 triángulos cuyos colores son rojo, negro, blanco y amarillo, representan los sectores que conforman el universo. Cada sector está relacionado con los cuatro puntos cardinales.



El Este representa el fuego y se relaciona con el color rojo. Sus nawales son: Toj, Kan, Imox, No'j y Aj.

El Norte representa el aire y se relaciona con el color blanco. Sus nawales son: Iq', Tijax, I'x, Keme y Tz'i'.

El Sur representa el agua y se relaciona con el color amarillo. Sus nawales son: E, Ajpu, Q'anil, Ajmaq y K'at.

El Oeste representa la tierra y se relaciona con el color negro. Sus nawales son: B'atz', Tz'ikin, Kawoq, Aq'ab'al y Kej.

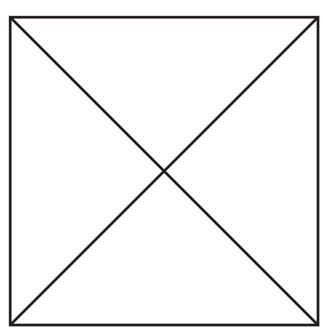
El pequeño círculo al centro indica la vida como elemento integrador de los 4 sectores. Se relaciona con el color verde.

C

El centro de los cuatro triángulos representa la vida y lo espiritual. Cada cuadrante se relaciona con un color y es acompañado por cinco nawales. Los 4 cuadrantes y los 20 nawales conforman la totalidad del pensamiento, en otras palabras son lo holístico en el pensamiento maya.

E

Observe la figura e indique el color de los cuadrantes y el punto cardinal que corresponde.

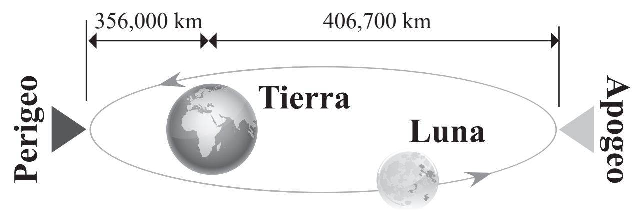


Clase 2 Movimientos de la Luna: Perigeo y Apogeo

P Describa el movimiento de la Luna con relación al Perigeo y Apogeo.

S Los Mayas utilizaron la observación para producir el conocimiento matemático y astronómico para crear el calendario lunar.

La Luna tiene una estructura calendárica de 260 días, en la magnitud de tiempo coincide con el Cholq'ij de 260 días.



Tal como se muestra en la figura, la Luna se mueve en forma elíptica alrededor de la Tierra. El punto más cercano a la Tierra se llama Perigeo y el punto más lejano se llama Apogeo. La Luna pasa por cada uno de estos puntos aproximadamente cada 13 o 14 días. El movimiento y se relaciona con la luna llena, luna nueva, cuarto creciente y cuarto menguante, según la posición de la persona en el hemisferio terrestre.

La distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna en el Perigeo es aproximadamente 356,500 km y la distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna en el punto del Apogeo es de 406,700 km.

Actualmente, las comunidades Mayas de Guatemala toman en cuenta las fases de la Luna para la siembra, cosecha, corte de árbol, entre otras actividades específicas del hogar o de la agricultura.

C Los Mayas lograron determinar las relaciones del movimiento de la Tierra con la Luna a través del Cholq'ij. Actualmente, las comunidades observan las fases de la Luna para desarrollar sus prácticas agrícolas, domésticas o rituales.

E

a. ¿Qué es el Perigeo?
b. ¿Qué significa Apogeo?
c. ¿A cuántos km de la Tierra se encuentra la Luna cuando pasa por el Perigeo?
d. ¿Qué forma tiene la trayectoria de la Luna alrededor de la Tierra?
e. ¿A cuántos km de la Tierra se encuentra la Luna cuando pasa por el Apogeo?

Clase 1 13 y 20 como patrones en el pensamiento maya

P Complete la secuencia de los días de un ciclo del Cholq'ij.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
1	8	2											B'atz'
2	9	3											E
3	10	4											Aj
4	11	5											I'x
5	12	6											Tz'ikin
6	13	7											Ajmaq
7	1	8											No'j
8	2	9											Tijax
9	3	10											Kawoq
10	4	11											Ajpu
11	5	12											Imox
12	6	13											Iq'
13	7	1											Aq'ab'al
1	8	2											K'at
2	9	3											Kan
3	10	4											Keme
4	11	5											Kej
5	12	6											Q'anil
6	13	7											Toj
7	1	8											Tz'i'

S La relación de las 13 energías con los 20 días forman una secuencia dentro del Cholq'ij.

Según el cuadro de la derecha, la primera columna de la izquierda representa los 20 días y las columnas, representan las trecenas de energía. La columna A inicia con el día 1 B'atz' hasta el día 13 Aq'ab'al para la primera trecena; el siguiente día es 1 K'at hasta 7 Tz'i' para la primera veintena, continúa la columna B, con el día 8 B'atz' hasta el día 13 Ajmaq para la segunda trecena, y así sucesivamente hasta completar los 260 días del Cholq'ij.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	B'atz'
2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	E
3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	Aj
4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	I'x
5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	Tz'ikin
6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	Ajmaq
7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	No'j
8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	Tijax
9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	Kawoq
10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	Ajpu
11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	Imox
12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	Iq'
13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	Aq'ab'al
1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	K'at
2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	Kan
3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	Keme
4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	Kej
5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	Q'anil
6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	Toj
7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	Tz'i'

C Los números 13 y 20 son patrones del Cholq'ij. El 13 representa los niveles energéticos y el 20 los días con sus respectivos nawales. La combinación secuencial de estos números permitió construir el Cholq'ij de 260 días.

E Elabore un Cholq'ij en su cuaderno, como se presentó anteriormente, y realice.

a. Señale los siguientes días: 3 Aj, 13 Ajmaq, 12 Tijax, 13 Tz'i' y 8 B'atz'.

b Indique qué día sigue después de 2 Iq'.

c. Indique qué día está antes de 9 I'x.

Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento maya
Clase 2 Patrones en la cerámica maya

P ¿Qué figuras geométricas observa en las siguientes imágenes?

Imagen 1

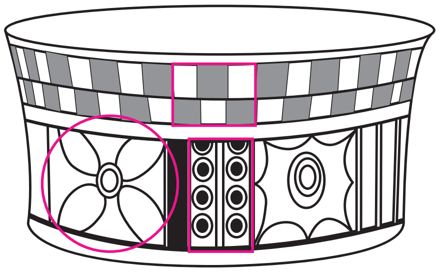
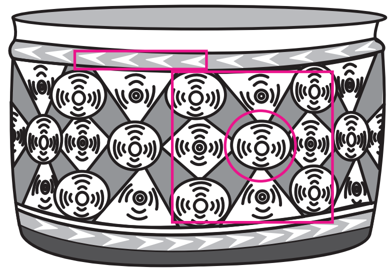


Imagen 2



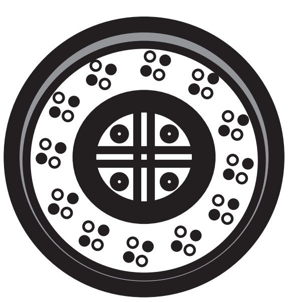
S La cerámica maya fue muy valorada en la época precolombina. Fabricaron objetos de uso cotidiano para la alimentación, así como vasijas sagradas que sirvieron para las ofrendas en las ceremonias.
La creación artística en la cerámica maya fue de mucha elegancia, en ella se conjugaron diferentes elementos geométricos. Entre ellas, patrones, simetría y proporcionalidad.
En las dos imágenes se pueden observar elementos geométricos tales como: punto, línea, cuadrado, círculo, rectángulo, entre otros.
Los elementos geométricos están distribuidos secuencialmente formando patrones geométricos que permiten crear armonía y elegancia en los objetos.
Según el pensamiento maya, los elementos geométricos tienen significado.
En la imagen 1 se observa secuencia de cuadrados gris, blanco, gris, blanco, así mismo círculos que representan el todo, el centro, el inicio y el fin.
En la imagen 2 se observan cuadrados secuenciales que ilustran las cuatro direcciones del cosmos en el plano horizontal, que forman la cruz maya. Se observa la secuencia de círculos que representan. En el círculo convergen las energías de los cuatro puntos.

Los diseños utilizados en la cerámica maya presentan elementos geométricos.
La secuencia y la simetría en el uso de los elementos geométricos proporcionan la vistosidad y elegancia de los objetos.

C En la cerámica maya se observan elementos geométricos y patrones que representan el cosmos, la naturaleza y los valores culturales. Para lograr los diseños, los artesanos utilizaron elevados conocimientos matemáticos sobre patrones, simetría y proporcionalidad.

E

1. Indique las figuras geométricas que se observan en las imágenes.
   a.



   b.

2. Elabore un dibujo utilizando figuras con algún patrón geométrico.

Unidad 3 Etnomatemática

Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento maya

Clase 3 13 y los ciclos de vida

P ¿Qué relación tiene el 13 con los ciclos de la vida?

S La relación del 13 con los ciclos de la vida es múltiple, entre ellas se pueden mencionar:
Las 13 energías en el nacimiento.
Los 13 ciclos de 20 días de un año Cholq'ij.
Los 4 momentos de 13 ciclos del Cholab' de la vida del ser humano.

Los 4 momentos de la vida Ciclos de 13 Ab', 13 años solares			
1	Ak'wal Niñez	0 a 7 Ab'	Etapa débil que requiere de protección, fortalecimiento físico y psíquico. Necesitan apoyo de papá y mamá.
		7 a 13 Ab'	Etapa fuerte. Se empiezan a desarrollar habilidades físicas y mentales. Poco a poco se desarrollan socialmente, acompañados y orientados por papá y mamá.
2	K'ajolal-Q'opojil Juventud	13 a 26 Ab'	Etapa de desarrollo físico y práctica de habilidades y toma de responsabilidades. Etapa del desarrollo de la abstracción, físico y comprensión del contexto.
3	Ixoq-Achi Madurez	26 a 52 Ab'	2 ciclos de 13. Tiempo para el ejercicio de actividades y transmisión de valores a los hijos, toma de responsabilidades en la sociedad.
4	Qati't-Q'amam La ancianidad	52 Ab' en adelante	Etapa de la experiencia y la consulta. Las personas que han superado las cuatro etapas anteriores y han acumulado experiencias se vuelven fuentes vivientes de consulta.

C El 13 es un número importante en el pensamiento maya. Se utiliza para indicar el nivel de energía y al combinar con el significado de los nawales determina la personalidad de la persona. Este número tiene influencia en toda la vida, marca la niñez, juventud, madurez y ancianidad.

E Relacione a través de una línea los momentos de la vida con la duración de los ciclos del Cholab'.

A. Niñez B. Ancianidad C. Juventud D. Madurez

a. De 13 a 26 Ab' b. De 26 a 52 Ab' c. De 0 a 13 Ab' d. De 52 Ab' en adelante

Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 1 Matemática Maya y sus características: espiritual y holístico

P

¿Qué significa lo espiritual y holístico en la Matemática Maya?

S

El pensamiento espiritual está presente en cualquier actividad humana y social, vinculado con los valores, el respeto, la armonía, el equilibrio y la complementariedad. Por ejemplo:

La práctica de remojar los hilos de las tejedoras en una mezcla de agua con maíz, posterior al conteo y ajustes que realizan en la urdidora. Esta práctica evidencia que la tejedora es quien alimenta el tejido para darle vida y crecimiento.

El Cholq'ij tiene como patrones los números 13 y 20 que correlacionados entre sí forman los 260 días del año y establece los niveles energéticos.
La energía o espíritu de una persona está representada por el nawal, que protege e identifica a la persona desde su nacimiento.

El círculo en una ceremonia maya conlleva la representación de los cuatro cuadrantes, así como la representación del Norte, Sur, Este y Oeste. Durante el desarrollo de la ceremonia hay conteo de energías de 1 a 13, que comienza según el nawal del día.

La Matemática Maya es holística, porque es una red de conocimientos y saberes difícilmente desvinculados de los fenómenos naturales y sociales. Ejemplos del pensamiento holístico:

Cuando el agricultor siembra el maíz, debe considerar varios factores, como el clima, la humedad del suelo, cantidad de semilla, distancia entre plantas, entre otros. Esto tiene que ver con conocimientos de Aritmética, Geometría y Astronomía.
En la elaboración de tejido se necesita considerar las dimensiones corporales de quien utilizará el tejido, tipo y cantidad de hilo, colores, diseños, días necesarios para la confección, entre otros.

Los ejemplos mencionados anteriormente hacen que cada persona adquiera alta experiencia para obtener buenos resultados en sus productos con formación holística.

C

La Matemática Maya es espiritual y holística porque trasciende de la abstracción. Se manifiesta las prácticas sociales, culturales y en la interacción con la naturaleza desde un enfoque integral.

E

a. Escriba un ejemplo del pensamiento holístico en la Matemática Maya.
b. Escriba un ejemplo que ilustre que la Matemática Maya es espiritual.

Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 2 Sistema de numeración base 20 y base 3

P Represente el 12 en los sistemas de numeración de base 20 y 3.

S El sistema de numeración vigesimal es de base 20 y utiliza tres símbolos como base:
●, ▬▬ y ; y combinados dan 20 significaciones.

Posición en el sistema vigesimal	Potenciación	Valor equivalente en el sistema decimal
Tercera posición	20^2	▬▬ $= 5 \times 20^2 = 2{,}000$ ● $= 1 \times 20^2 = 400$
Segunda posición	20^1	▬▬ $= 5 \times 20^1 = 100$ ● $= 1 \times 20^1 = 20$
Primera posición	20^0	▬▬ $= 5 \times 20^0 = 5$ ● $= 1 \times 20^0 = 1$

El sistema de numeración de base 3 utiliza tres símbolos: 0, 1 y 2.

Posición en el sistema base 3	5° posición		4° posición		3° posición		2° posición		1° posición	
Potenciación	$3^4 = 81$		$3^3 = 27$		$3^2 = 9$		$3^1 = 3$		$3^0 = 1$	
Valor equivalente en el sistema decimal	base 3	base 10	base 3	base 10	base 3	base 10	base 3	base 10	base 3	base 10
	1	81	1	27	1	9	1	3	1	1
	2	162	2	54	2	18	2	6	2	2

En ambos sistemas de numeración, el cero es un símbolo que se coloca en cualquier posición cuando queda vacía.
En la tabla de base 20, el 12 se ubica en los valores del intervalo de la primera posición porque un punto en la segunda posición es 20.
En la segunda tabla, la primera posición solo llega a 2, la segunda posición tiene un intervalo de 3 a 8 y la tercera posición de 9 a 26, intervalo al que pertenece el número 12.

En el sistema de base 20, una barra y un punto toman valores diferentes según la posición que ocupan. Observando la tabla, una barra en la primera posición es 5 y un punto es 1. Por tanto, el 12 en base 20 es:

En el sistema de base 3, el 1 y el 2 toman valores diferentes según la posición que ocupan. Observando la tabla, 1 en la tercera posición es 9 y 1 en la segunda posición es 3, en la primera posición se deja 0. Por tanto, el 12 en base 3 es:

$$12 = 110_3$$

C Un sistema de numeración es un conjunto de reglas que permiten la representación de cualquier cantidad y de cualquier base igual o mayor que 2.
El sistema de numeración vigesimal es de base 20 y utiliza tres símbolos como base para representar cualquier número.
El sistema de numeración ternario es de base 3 y utiliza tres símbolos: 0, 1 y 2; para representar cualquier número.

Ejemplo:
¿Cuál es el número decimal que representa 2120_3?
El 2120_3 tiene cuatro posiciones, el 2 en la cuarta posición es 54, el 1 en la tercera posición es 9 y 2 en la segunda posición es 6. Entonces, el número decimal es: $54 + 9 + 6 = 69$.
$2120_3 = 69$

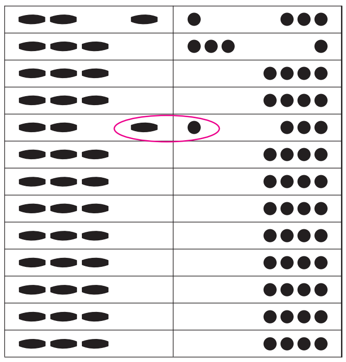
E
1. Represente las siguientes cantidades en el sistema de numeración de base 20 y 3.
   a. 15 b. 19 c. 24 d. 27
2. Represente las siguientes cantidades en sistema de numeración decimal.
   a. 200_3 b. 1000_3 c.  d. 

Clase 3 Multiplicación utilizando el Ábaco Maya

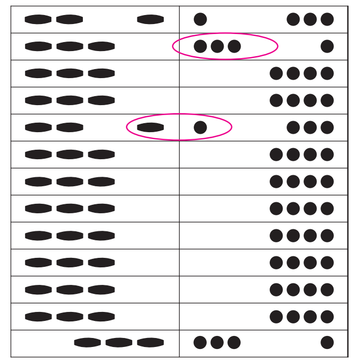
P Utilizando el Ábaco Maya, encuentre el resultado de  .

S El Ábaco Maya contiene principios básicos para el cálculo de la multiplicación. Tiene 13 niveles, suficientes para operar factores de la tercera posición. En el lado izquierdo del ábaco hay 3 barras y en el lado derecho 4 puntos, unidos hacen 19, número máximo permitido en cada posición. Para representar los números se deslizan las barras y los puntos hacia el centro según el valor posicional.

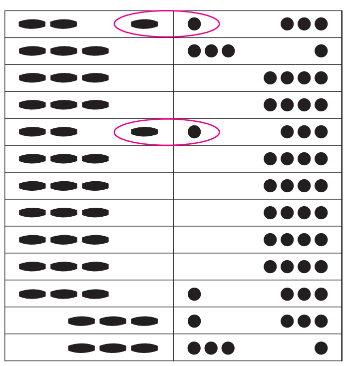
Paso 1. Representar multiplicando arriba y multiplicador resaltado.

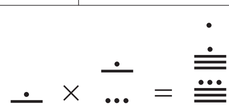


Paso 2. Multiplicar el multiplicador y 1° posición.



Paso 3. Multiplicar el multiplicador y 2° posición.



Respuesta: 

C

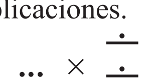
Para multiplicar en el sistema de numeración vigesimal con el uso del Ábaco Maya:

Paso 1. Se anota el multiplicando en la parte superior y se coloca el multiplicador dos niveles abajo, el producto se coloca en la parte inferior siguiendo las reglas de la representación numérica.

Paso 2. Se multiplica el multiplicador y posición del multiplicando, los subproductos se coloca de abajo hacia arriba según posición.

Paso 3. Cada 20 unidades en una misma escala se convierte en 1 punto en la posición inmediata superior.

E Realice las siguientes multiplicaciones.

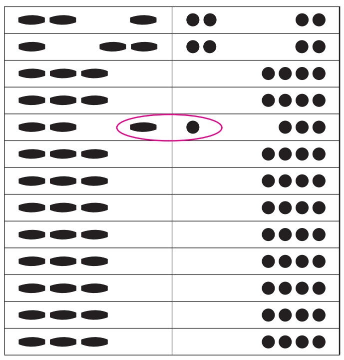
a.  b.  c. 

Sección 4 Sistemas numéricos
Clase 4 División utilizando el Ábaco Maya

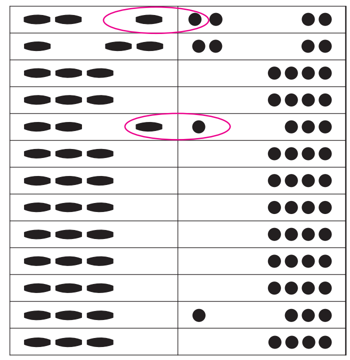
P Utilizando el Ábaco Maya, encuentre el resultado de ÷ .

S Para dividir números en el sistema de numeración vigesimal con el uso del Ábaco Maya, se escribe el dividendo en la parte superior y el divisor a dos niveles abajo.

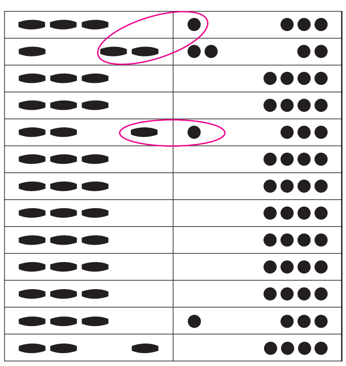
Paso 1. Dividendo arriba y divisor resaltado.



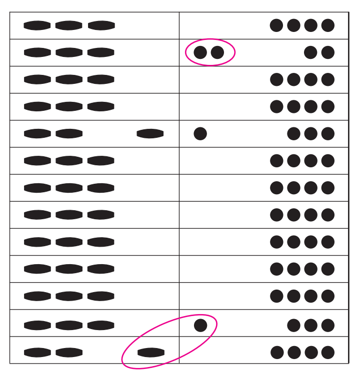
Paso 2. Primera repartición.



Paso 3. Segunda repartición.



Paso 4. Cociente y residuo.



Respuesta: ÷ = residuo

C

Para dividir en el sistema de numeración vigesimal con el uso del Ábaco Maya:

Paso 1. Se anota el dividendo en la parte superior y se coloca el divisor dos niveles debajo, el cociente se anota en la parte inferior obedeciendo las reglas del sistema vigesimal.
Paso 2. Se reparte la posición mayor entre el divisor. El cociente se anota en la parte inferior según posición del dividendo.
Paso 3. El residuo se junta con la posición inmediata inferior y se reparte, el cociente se anota en la posición inmediata inferior.
Paso 4. Se analiza si la respuesta es correcta tomando en cuenta el último residuo.

E Realice las siguientes divisiones.

a. ÷   b. ÷   c. ÷

Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 5 y su representación en el calendario maya

P ¿Qué relación hay entre el y el tiempo en el pensamiento maya?

S El fue uno de los grandes inventos matemáticos de los Mayas. Tiene varios significados como: principio, fin, todo, meditación, entre otros.

El está relacionado con los diferentes calendarios que utilizaron los Mayas:

En el Cholq'ij, el día Ajpu' o Ajaw representa el último día del ciclo de 20 días. El Ajpu' o Ajaw es el sol, el señor, el creador y formador. Es el todo y su representación es el cero.

En el Cholab', el conteo de los días de cada mes se representa utilizando los números del cero a diecinueve. Esta es otra manifestación del cero con el tiempo. Es el inicio y el final de un período.

En el Choltun, la fecha de inicio de la cuenta larga es cero B'ak'tun, cero K'atun, cero Tun, cero Winal y cero Q'ij, correspondiente a la fecha 4 Ajpu' o Ajaw 8 Kumku de la rueda calendárica.

Choltun o cuenta larga utiliza las medidas de tiempo: Q'ij (día), Winal (mes de 20 días), Tun (año de 360 días), K'atun (7,200 días o 20 años) y B'ak'tun (144,000 días o 400 años).

C En el pensamiento maya el determina el inicio y la finalización de un ciclo, es decir, determina que un período de tiempo ya está completo.

E

a. ¿Qué significado tiene el nawal Ajpu'?
b. ¿Cuál es la fecha de inicio de la cuenta larga en el Choltun?
c. Dibuje el glifo del nawal Ajaw.

Sección 5 Sistemas de medición

Clase 1 Medidas de longitud

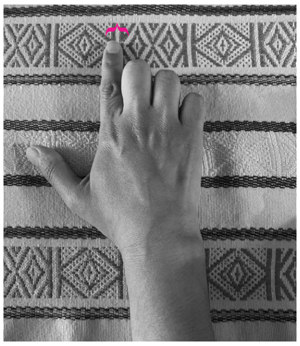
P ¿Qué unidades de medida de longitud se utilizan en las comunidades Mayas?

S

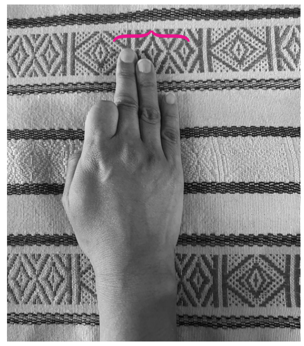
1. En las comunidades Mayas se utilizan como medidas de longitud:

   Ruwi' q'ab'aj: es una unidad de medida de longitud que utiliza el ancho de dedo. La longitud puede ser 1 dedo, 2 dedos, 3 dedos, hasta 5 dedos; este último es equivalente a media cuarta.

   1 dedo (jun ruwi' q'ab')

   3 dedos (oxib' ruwi' q'ab')

   1/2 cuarta o cinco dedos

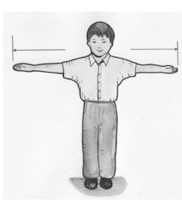
   

2. K'utu (cuarta): es una unidad de medida de longitud equivalente a la distancia entre el dedo pulgar y el dedo meñique.

   1 cuarta

3. Jaaj (brazada): es una unidad de medida de longitud equivalente a la distancia entre los brazos extendidos.

   1 brazada

C

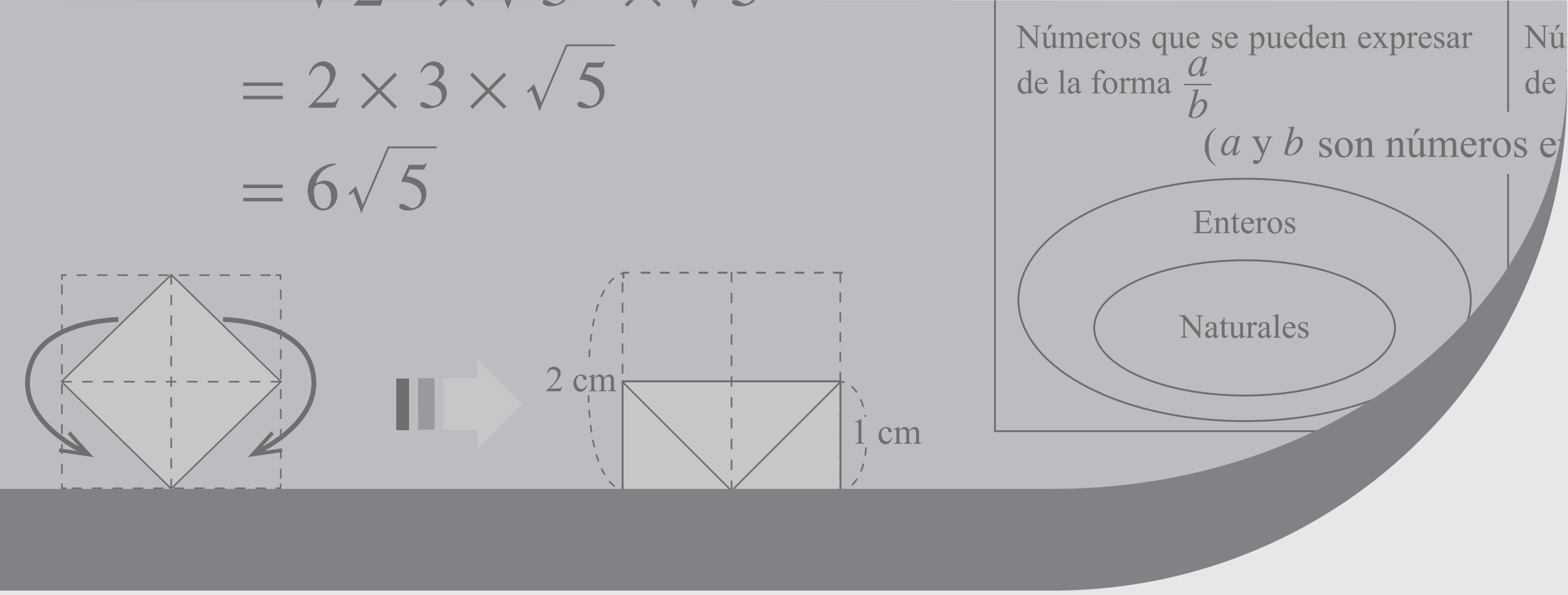
Algunas unidades de longitud utilizadas en las comunidades son: jun ruwi' q'ab' (un dedo), jun k'utu (una cuarta) y jun jaaj (una brazada). Estas unidades de longitud se relacionan con el sistema internacional como referente a través de las siguientes equivalencias.
5 cuartas son aproximadamente 1 m.
1 cuarta es aproximadamente 20 cm.

E

1. ¿Cuántos dedos mide aproximadamente cada una de las siguientes líneas?

   a. b. c.

2. Utilizando cuartas y dedos como referencia, estime la longitud en m o cm el largo y ancho de dos objetos de su entorno.



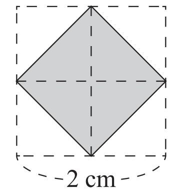
Unidad 4

Aritmética

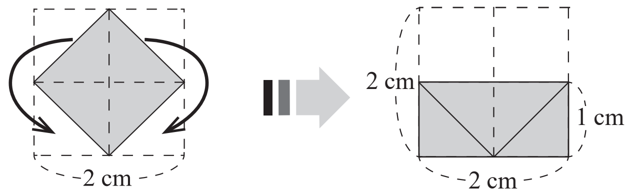
Sección 1 Radicación de conjuntos numéricos

Clase 1 Significado y símbolo de raíces cuadradas

P Observe el cuadrado de color grisáceo inscrito en otro cuadrado que mide 2 cm de lado.
¿Cuánto mide el lado del cuadrado grisáceo?



S Para encontrar el área del cuadrado grisáceo, cambie el cuadrado al rectángulo.



Entonces, $2 \times 1 = 2$. El área del cuadrado grisáceo es 2 cm^2.

Para encontrar la medida del lado del cuadrado grisáceo, pruebe si existe algún número que dé como resultado 2 cuando se eleva al cuadrado.

$1^2 = 1$ $2^2 = 4$
El número buscado está entre 1 y 2.

Probando números entre 1 y 2

$1.1^2 = 1.21$ $1.2^2 = 1.44$ $1.3^2 = 1.69$ $1.4^2 = 1.96$ $1.5^2 = 2.25$
El número buscado está entre 1.4 y 1.5.

Probando números entre 1.4 y 1.5

$1.41^2 = 1.9881$ $1.42^2 = 2.0164$
El número buscado está entre 1.41 y 1.42.

No es posible encontrar un número exacto que elevado al cuadrado dé como resultado 2.
Entonces, el lado del cuadrado con área 2 cm^2 se representa como $\sqrt{2}$ cm y se lee: "raíz cuadrada de dos centímetros".
Respuesta: el lado del cuadrado es $\sqrt{2}$ cm.

C Un número que elevado al cuadrado da ***a*** se representa como $\sqrt{a}$. Se lee: "**raíz cuadrada de *a***".

$$\text{Radical} \longrightarrow \sqrt{a} \longleftarrow \text{Radicando}$$

A $\sqrt{\ }$ se le llama **símbolo radical**. Al número *a* se le llama **radicando**.

El número que elevado al cuadrado da 5 se representa como $\sqrt{5}$.
El número que elevado al cuadrado da 11 se representa como $\sqrt{11}$.

E

1. Encuentre la medida del lado de cada cuadrado cuya área está dada en cada inciso.
   a. 3 cm^2 b. 7 cm^2 c. 10 cm^2 d. 17 cm^2

2. ¿Qué números se representan al elevar al cuadrado las siguientes raíces cuadradas?
   a. $\sqrt{7}$ b. $\sqrt{19}$ c. $\sqrt{21}$ d. $\sqrt{29}$

Sección 1 Radicación de conjuntos numéricos

Clase 2 Significado de raíces cuadradas positivas y negativas

P

¿Qué números al elevarlos al cuadrado dan los siguientes resultados?

a. 3
b. 25

S

a. Los números que elevados al cuadrado dan como resultado 3 son $\sqrt{3}$ como un número positivo y $-\sqrt{3}$ como un número negativo, porque $(\sqrt{3})^2 = 3$ y $(-\sqrt{3})^2 = 3$.

(un número positivo)^2 = un número positivo
(un número negativo)^2 = un número positivo

b. Los números que elevados al cuadrado dan como resultado 25 son $\sqrt{25}$ como un número positivo y $-\sqrt{25}$ como un número negativo, porque $(\sqrt{25})^2 = 25$ y $(-\sqrt{25})^2 = 25$.

Así mismo, $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$.

Por tanto, los números que elevados al cuadrado dan como resultado 25 son 5 y -5 donde $\sqrt{25} = 5$ y $-\sqrt{25} = -5$, porque $\sqrt{25}$ y 5 son los números positivos de la raíz cuadrada de 25 y $-\sqrt{25}$ y -5 son los números negativos de la raíz cuadrada de 25.

Entre los números que se expresan con el símbolo radical existen algunos que se pueden simplificar al expresarse sin el símbolo radical.

C

Se define la raíz cuadrada de un número a como los números que al elevarlos al cuadrado dan como resultado a. Cualquier número positivo tiene dos raíces cuadradas: una positiva y otra negativa.
Para denotar una raíz cuadrada positiva y negativa de un número, se utiliza la nomenclatura: $\pm\sqrt{a}$ y se lee "más o menos la raíz cuadrada de a".

La raíz cuadrada de 0 es 0. Es decir, $\sqrt{0} = 0$. No existe un número cuyo cuadrado es un número negativo, por tanto no se considera la raíz cuadrada de un número negativo.

Ejemplo:

a. La raíz cuadrada de 7 es $\pm\sqrt{7}$.
b. La raíz cuadrada de 4 es ± 2.
c. $\sqrt{16} = 4$
d. $-\sqrt{9} = -3$

E

1. Encuentre la raíz cuadrada de los siguientes números.

a. 9 b. 5 c. 100
d. 11 e. 49 f. 21

2. Exprese los siguientes números sin el símbolo radical.

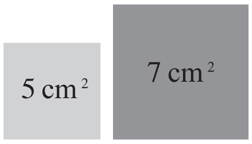
a. $\sqrt{9}$ b. $-\sqrt{16}$ c. $-\sqrt{36}$
d. $\sqrt{36}$ e. $\sqrt{64}$ f. $-\sqrt{81}$

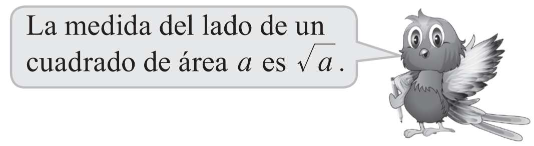
Sección 1 Radicación de conjuntos numéricos

Clase 3 Orden de raíces cuadradas

P

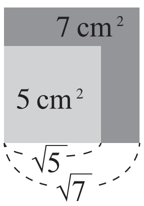
Se presentan dos cuadrados con un área de 5 cm^2 y 7 cm^2, respectivamente.
¿Cuál de los dos cuadrados posee lados de mayor longitud?





S

Colocando un cuadrado encima del otro, se observa que:



El lado del cuadrado de 5 cm^2 de área tiene menor medida que el lado del cuadrado de 7 cm^2 de área.

Si $5 < 7$, entonces $\sqrt{5} < \sqrt{7}$.

Respuesta: el cuadrado de 7 cm^2 de área posee lados de mayor longitud.

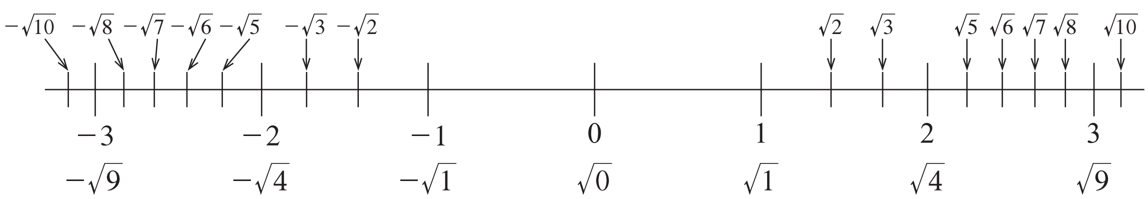
C

Si el radicando de una raíz cuadrada es mayor que el radicando de otra, entonces la primera raíz es mayor que la segunda.

Si $a > b$, donde ambos números son positivos, entonces $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ y $-\sqrt{a} < -\sqrt{b}$.

Ejemplo:

Se muestra la raíz cuadrada de algunos números en la siguiente recta numérica.



Un número que está a la derecha en la recta numérica es mayor que un número que está a la izquierda.

Por tanto, $\sqrt{8} > \sqrt{6}$, $-\sqrt{6} > -\sqrt{8}$, $\sqrt{2} < \sqrt{10}$ y $-\sqrt{10} < -\sqrt{2}$.

E

1. Escriba el símbolo “<” o “>” en el cuadro, según corresponda.

   a. $\sqrt{2} \square \sqrt{5}$ b. $-\sqrt{3} \square -\sqrt{7}$ c. $\sqrt{7} \square \sqrt{3}$ d. $-\sqrt{5} \square -\sqrt{6}$

2. Identifique el número mayor de los siguientes pares de números.

   a. $\sqrt{3}$ y $\sqrt{8}$ b. $-\sqrt{3}$ y $-\sqrt{6}$ c. $\sqrt{10}$ y $\sqrt{3}$ d. $-\sqrt{8}$ y $-\sqrt{5}$

Sección 2 Números irracionales

Clase 1 Decimales periódicos y no periódicos

P

Exprese los siguientes números en números decimales y responda a las preguntas.

a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{19}{11}$ c. $\frac{123}{111}$

d. $\frac{11}{7}$ e. $\sqrt{3}$ f. $\sqrt{10}$

De los números anteriores, ¿cuáles tienen cifras decimales que se repiten indefinidamente?
De los números anteriores, ¿cúales tienen cifras decimales que no se repiten y no terminan?

S

Para expresar los números dados como números decimales, realice la operación indicada. Por ejemplo, si el número es una fracción, realice la división.

a. $\frac{2}{3} = 2 \div 3$

$= 0.666666666...$ Se repite una cifra.

b. $\frac{19}{11} = 19 \div 11$

$= 1.7272727272...$ Se repite cada dos cifras.

c. $\frac{123}{111} = 1.108108108...$ Se repite cada tres cifras.

d. $\frac{11}{7} = 1.571428571428...$ Se repite cada seis cifras.

e. $\sqrt{3} = 1.7320508075...$ Las cifras no se repiten con regularidad ni terminan.

f. $\sqrt{10} = 3.1622776601...$ Las cifras no se repiten con regularidad ni terminan.

C

A un número decimal cuya parte decimal tiene una cantidad de cifras que se repiten indefinidamente, se le llama **número decimal periódico**.
A un número decimal cuya parte decimal no termina y las cifras no se repiten con regularidad, se le llama **número decimal no periódico**.

E

Clasifique los siguientes números en números decimales periódicos y no periódicos.

$\frac{1}{3}$, $\sqrt{5}$, $\frac{15}{11}$, $\frac{25}{11}$, $\sqrt{8}$

Clase 2 Aproximación a una raíz cuadrada

P Encuentre dos números enteros consecutivos tales que: $\square < \sqrt{7} < \square$.

S Dos números cuadrados perfectos consecutivos entre los que se sitúa 7 son 4 y 9. Es decir,

$4 < 7 < 9$

$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ Se saca la raíz cuadrada de los números.

$2 < \sqrt{7} < 3$ Se expresa la raíz cuadrada de $\sqrt{4}$ y $\sqrt{9}$ sin el símbolo radical.

Cuadrados perfectos
$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$

Respuesta: los números enteros consecutivos entre los que se sitúa $\sqrt{7}$ son 2 y 3.

C Para encontrar dos números enteros consecutivos entre los que se sitúa $\sqrt{a}$, se encuentran dos números cuadrados perfectos consecutivos entre los que se sitúa a. Los números requeridos son las raíces cuadradas de los números cuadrados perfectos.

E Encuentre los números enteros consecutivos que cumplen las siguientes relaciones.

a. $\square < \sqrt{3} < \square$ b. $\square < \sqrt{5} < \square$ c. $\square < \sqrt{10} < \square$

d. $\square < \sqrt{11} < \square$ e. $\square < \sqrt{8} < \square$ f. $\square < \sqrt{12} < \square$

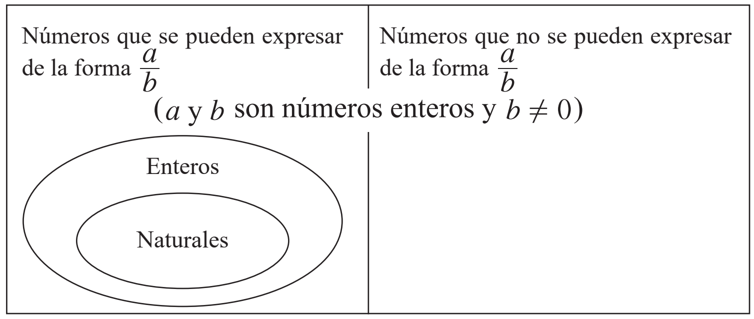
Sección 2 Números irracionales

Clase 3 Conjuntos numéricos en diagramas de Venn

P Clasifique los siguientes números en el siguiente diagrama de Venn.

$3,\ -\frac{2}{3},\ \sqrt{4},\ -12,\ -4,\ \sqrt{8},\ 6,$

$0,\ 0.25,\ -3.75,\ -\sqrt{11},\ \frac{15}{7}$

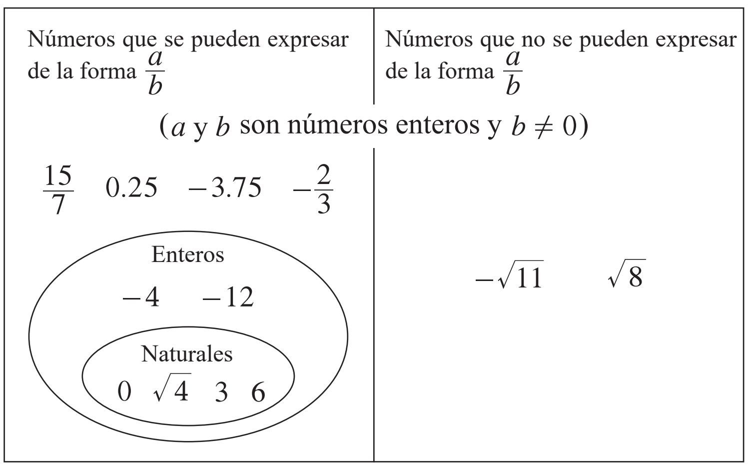


$0.25 = \frac{25}{100}$

$-3.75 = -\frac{375}{100}$

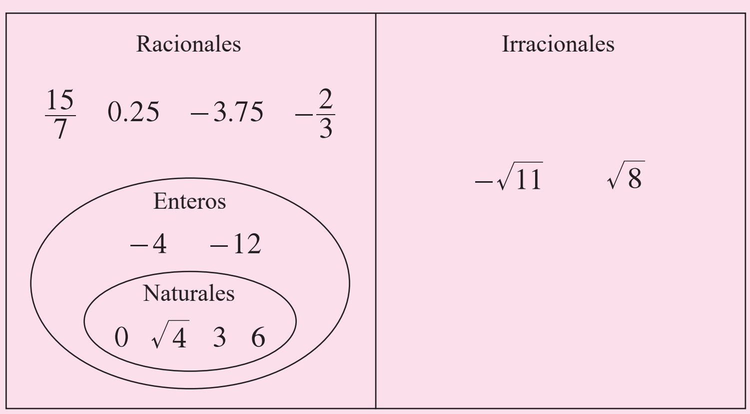
$\sqrt{4} = 2$

S



C

A un número que se puede expresar como una fracción $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$, se le llama **número racional**.
A un número que no se puede expresar de la forma $\frac{a}{b}$ se le llama **número irracional**.



E Clasifique los siguientes números en el diagrama de Venn.

$2,\ 0.35,\ 0,\ -5,\ -\frac{12}{5},\ \sqrt{2},\ \sqrt{9},\ -\sqrt{3}$

Unidad 4 Aritmética

Sección 3 Operaciones básicas con radicales
Clase 1 Multiplicación de raíces cuadradas

P

Calcule la siguiente expresión.

$\sqrt{5}\times\sqrt{3}$

S

$\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{5\times 3}$ Se expresa la multiplicación de los radicandos bajo un radical.

$=\sqrt{15}$ Se multiplican los radicandos.

C

En una multiplicación de raíces cuadradas, si $a>0$ y $b>0$, entonces $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$.

Ejemplo:

$(+)\times(+)\rightarrow(+)$
$(+)\times(-)\rightarrow(-)$
$(-)\times(+)\rightarrow(-)$
$(-)\times(-)\rightarrow(+)$

a. $\sqrt{7}\times(-\sqrt{6})=-(\sqrt{7}\times\sqrt{6})$
$=-\sqrt{7\times 6}$
$=-\sqrt{42}$

b. $(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{13})=+(\sqrt{3}\times\sqrt{13})$
$=\sqrt{3\times 13}$
$=\sqrt{39}$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$
b. $\sqrt{5}\times\sqrt{7}$
c. $\sqrt{11}\times(-\sqrt{3})$
d. $(-\sqrt{7})\times\sqrt{2}$
e. $(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{5})$
f. $(-\sqrt{5})\times\sqrt{6}$
g. $(-\sqrt{5})\times(-\sqrt{2})$
h. $\sqrt{2}\times\sqrt{13}$
i. $(-\sqrt{2})\times(-\sqrt{11})$
j. $\sqrt{3}\times\sqrt{7}$
k. $\sqrt{6}\times(-\sqrt{3})$
l. $(-\sqrt{13})\times(-\sqrt{5})$

Clase 2 División de raíces cuadradas

P

Calcule la siguiente expresión.

$\sqrt{2} \div \sqrt{7}$

S

$\sqrt{2} \div \sqrt{7} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ Se expresa la división de radicales como una fracción.

$= \sqrt{\dfrac{2}{7}}$ Se expresan las raíces cuadradas bajo un radical.

C

En una división de raíces cuadradas, si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Ejemplo:

a. $\left(-\sqrt{5}\right) \div \sqrt{8} = -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$

$= -\sqrt{\dfrac{5}{8}}$

b. $\left(-\sqrt{7}\right) \div \left(-\sqrt{10}\right) = +\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$

$= \sqrt{\dfrac{7}{10}}$

$(+) \div (+) \rightarrow (+)$
$(+) \div (-) \rightarrow (-)$
$(-) \div (+) \rightarrow (-)$
$(-) \div (-) \rightarrow (+)$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{6} \div \sqrt{7}$

b. $\sqrt{4} \div \left(-\sqrt{5}\right)$

c. $\sqrt{2} \div \sqrt{11}$

d. $\left(-\sqrt{5}\right) \div \sqrt{8}$

e. $\left(-\sqrt{7}\right) \div \left(-\sqrt{5}\right)$

f. $\left(-\sqrt{15}\right) \div \left(-\sqrt{6}\right)$

g. $\sqrt{2} \div \sqrt{13}$

h. $\sqrt{8} \div \left(-\sqrt{7}\right)$

i. $\left(-\sqrt{3}\right) \div \left(-\sqrt{8}\right)$

Unidad 4 Aritmética

Sección 3 Operaciones básicas con radicales

Clase 3 Simplificación de raíces cuadradas exactas

P

Simplifique la siguiente expresión.

$\sqrt{196}$

S

Descomponga 196 en sus factores primos.

$196 = 2^2 \times 7^2$

196	2
98	2
49	7
7	7
1	

$\sqrt{196} = \sqrt{2^2 \times 7^2}$ Se descompone el radicando en sus factores primos.

$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{7^2}$ Se escribe como multiplicación de radicales.

$= 2 \times 7$ Se expresan las raíces cuadradas sin el símbolo radical.

$= 14$

C

Para simplificar una raíz cuadrada por medio de descomposición en factores primos:

Paso 1. Se descompone el radicando en sus factores primos.
Paso 2. Se expresa el radicando como factores de potencias cuadradas.
Paso 3. Se multiplican las raíces cuadradas expresadas sin el símbolo radical.

E

Simplifique los siguientes números.

a. $\sqrt{2^2 \times 3^2}$

b. $\sqrt{5^2 \times 7^2}$

c. $\sqrt{6^2 \times 2^2}$

d. $\sqrt{8^2 \times 6^2}$

e. $\sqrt{100}$

f. $-\sqrt{144}$

g. $\sqrt{225}$

h. $-\sqrt{169}$

Sección 3 Operaciones básicas con radicales

Clase 4 Multiplicación de un número racional y una raíz cuadrada

P Exprese $3\sqrt{5}$ de la forma $\sqrt{c}$.

S $3 = \sqrt{3^2}$ Se expresa 3 con el símbolo radical.

Entonces,

$$\begin{aligned} 3\sqrt{5} &= 3 \times \sqrt{5} \\ &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{5} \\ &= \sqrt{9 \times 5} \\ &= \sqrt{45} \end{aligned}$$

C La notación $a\sqrt{b}$ significa $a \times \sqrt{b}$, donde $a > 0$ y $b > 0$. Para expresar $a\sqrt{b}$ de la forma $\sqrt{c}$:

Paso 1. Se expresa el número a con el símbolo de radical: $a = \sqrt{a^2}$
Paso 2. Se multiplican las raíces cuadradas: $\sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} &= 2 \times \sqrt{3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{3} \\ &= \sqrt{4 \times 3} \\ &= \sqrt{12} \end{aligned}$$

E Exprese las siguientes raíces cuadradas de la forma $\sqrt{c}$.

a. $2\sqrt{8}$

b. $4\sqrt{3}$

c. $6\sqrt{2}$

d. $5\sqrt{6}$

e. $3\sqrt{7}$

f. $5\sqrt{2}$

g. $4\sqrt{2}$

h. $3\sqrt{6}$

Unidad 4 Aritmética

Clase 5 Simplificación de raíces cuadradas inexactas

P

Simplifique la siguiente expresión.

$\sqrt{180}$

Simplificar una raíz cuadrada es expresarla con un radicando menor que el inicial.

S

Descomponga 180 en sus factores primos. Se obtiene: $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5}$	Se descompone el radicando en sus factores primos.
$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{5}$	Se escribe como multiplicación de radicales.
$= 2 \times 3 \times \sqrt{5}$	Se expresan las raíces cuadradas sin el símbolo radical.
$= 6\sqrt{5}$	

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

C

Simplificar una raíz cuadrada es expresarla con un radicando menor que el inicial. Para simplificar una expresión con radical:

Paso 1. Se descompone el radicando en sus factores primos.
Paso 2. Se expresa el radicando como factores de potencias cuadradas y no cuadradas.
Paso 3. Se obtienen las raíces cuadradas de las potencias. Se multiplican las raíces cuadradas obtenidas y el radical que no tiene raíz cuadrada exacta.

E

Simplifique los siguientes números.

a. $\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7}$

b. $\sqrt{5^2 \times 7^2 \times 2}$

c. $\sqrt{3^2 \times 5^2 \times 2}$

d. $\sqrt{2^2 \times 7^2 \times 3}$

e. $\sqrt{75}$

f. $-\sqrt{135}$

g. $\sqrt{200}$

h. $-\sqrt{245}$

Sección 3 Operaciones básicas con radicales
Clase 6 Multiplicación de raíces cuadradas utilizando simplificación

P

Calcule la siguiente expresión.

$\sqrt{12} \times \sqrt{18}$

S

Forma 1.
Simplifique antes de operar.

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$
$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$

Entonces,

$$\begin{aligned}\sqrt{12} \times \sqrt{18} &= 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{6}\end{aligned}$$

Forma 2.
Multiplique desde el inicio.

$\sqrt{12} \times \sqrt{18} = \sqrt{12 \times 18}$	Se multiplican los radicandos.
$= \sqrt{2^2 \times 3 \times 3^2 \times 2}$	Se descomponen los radicandos en factores primos.
$= 2 \times 3 \times \sqrt{3 \times 2}$	Se expresan las raíces cuadradas sin el símbolo radical.
$= 6\sqrt{6}$	Se simplifica la expresión.

Unidad 4 Aritmética

C

Una multiplicación de raíces cuadradas se puede hacer de dos formas.

Forma 1:
Paso 1. Se simplifican las raíces cuadradas, si es posible.
Paso 2. Se multiplican las raíces ya simplificadas y los radicales.

Forma 2:
Paso 1. Se multiplican los radicandos.
Paso 2. Se descomponen los radicandos en sus factores primos.
Paso 3. Se simplifica la expresión.

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{20} \times \sqrt{2}$ b. $\sqrt{10} \times \sqrt{12}$ c. $\sqrt{18} \times \sqrt{27}$ d. $\sqrt{15} \times \sqrt{24}$

e. $\sqrt{7} \times \sqrt{24}$ f. $\sqrt{12} \times \sqrt{28}$ g. $\sqrt{11} \times \sqrt{20}$ h. $\sqrt{75} \times \sqrt{50}$

Clase 7 Racionalización del denominador de una fracción con raíz cuadrada

P Encuentre una fracción que es equivalente a $\frac{3}{\sqrt{5}}$ y no tenga raíz cuadrada en el denominador.

S Al multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número se obtiene una fracción equivalente.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{5}$.

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

$$= \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$$

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

$$= \frac{3 \times \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}$$

Se simplifica.

$$= \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

C Al proceso de encontrar una fracción equivalente sin raíz cuadrada en el denominador se le llama **racionalización de denominador**.

Para racionalizar el denominador de una fracción $\frac{n}{\sqrt{d}}$, donde $d > 0$:

Paso 1. Se multiplica el numerador y denominador por $\sqrt{d}$.
Paso 2. Se multiplica y se simplifica el resultado.

$$\frac{n}{\sqrt{d}} = \frac{n}{\sqrt{d}} \times \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d}}$$
$$= \frac{n \times \sqrt{d}}{\sqrt{d} \times \sqrt{d}}$$
$$= \frac{n \times \sqrt{d}}{(\sqrt{d})^2}$$
$$= \frac{n\sqrt{d}}{d}$$

E Racionalice el denominador de las siguientes fracciones.

a. $\frac{3}{\sqrt{7}}$ b. $\frac{6}{\sqrt{10}}$ c. $\frac{5}{\sqrt{12}}$ d. $\frac{3}{\sqrt{8}}$ e. $\frac{13}{\sqrt{2}}$

f. $\frac{4}{\sqrt{5}}$ g. $\frac{5}{\sqrt{6}}$ h. $\frac{7}{\sqrt{3}}$ i. $\frac{3}{\sqrt{13}}$ j. $\frac{7}{\sqrt{8}}$

Sección 3 Operaciones básicas con radicales
Clase 8 Suma y resta de radicales semejantes

P

Calcule las siguientes expresiones.

a. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$
b. $5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

S

a. Utilice la idea de una suma de términos semejantes.

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} &= (3+4)\sqrt{2} \\ &= 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

Se considera $\sqrt{2}$ como a.

$$3\,\boldsymbol{a} + 4\,\boldsymbol{a} = (3+4)\,\boldsymbol{a}$$

$$3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3+4)\sqrt{2}$$

b. Aplique la misma idea a la resta con radicales.

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} &= (5-3)\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

C

Para sumar o restar términos con raíces cuadradas:

Paso 1. Se identifica si los términos tienen las raíces cuadradas con los mismos radicandos.
Paso 2. Se suman o se restan los coeficientes de los radicales semejantes.

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $6\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$
b. $6\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$
c. $2\sqrt{6} + 8\sqrt{6}$
d. $5\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$
e. $7\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$
f. $10\sqrt{11} - 6\sqrt{11}$
g. $3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$
h. $\sqrt{13} - 4\sqrt{13}$
i. $8\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$
j. $8\sqrt{3} - 11\sqrt{3}$
k. $7\sqrt{5} + 12\sqrt{5}$
l. $15\sqrt{8} - 6\sqrt{8}$

Sección 3 Operaciones básicas con radicales

Clase 9 Suma y resta de raíces cuadradas utilizando simplificación

P

Calcule la siguiente expresión.

$\sqrt{45} - \sqrt{20}$

S

Paso 1. Exprese cada radicando en factores primos y simplifique.

$$\begin{aligned}\sqrt{45} &= \sqrt{3^2 \times 5}\\ &= 3\sqrt{5}\\ \sqrt{20} &= \sqrt{2^2 \times 5}\\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Paso 2. Sume o reste los radicales semejantes.

$$\begin{aligned}\sqrt{45} - \sqrt{20} &= 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}\\ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

En el caso de la suma, se aplica el mismo procedimiento.

C

Para sumar y restar raíces cuadradas con diferente radicando:

Paso 1. Se expresa cada radicando en factores primos y se simplifica.
Paso 2. Se suman o se restan los radicales semejantes.

Ejemplo:

$\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$

Paso 1.
$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{5^2 \times 2}\\ &= 5\sqrt{2}\\ \sqrt{18} &= \sqrt{3^2 \times 2}\\ &= 3\sqrt{2}\\ \sqrt{32} &= \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2}\\ &= 2 \times 2\sqrt{2}\\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

Paso 2.
$$\begin{aligned}\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{32} &= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\\ &= (5 - 3 + 4)\sqrt{2}\\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{75} - \sqrt{12}$ b. $\sqrt{48} + \sqrt{3}$ c. $\sqrt{32} - \sqrt{72}$ d. $\sqrt{98} - \sqrt{50}$

e. $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}$ f. $\sqrt{28} - \sqrt{63} - \sqrt{7}$ g. $\sqrt{20} + \sqrt{125} - \sqrt{45}$ h. $\sqrt{45} - \sqrt{5} - \sqrt{80}$

Unidad 4 Aritmética

Sección 3 Operaciones básicas con radicales
Clase 10 Suma y resta de raíces cuadradas utilizando racionalización

P Calcule las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{28}+\dfrac{28}{\sqrt{7}}$

b. $\sqrt{18}-\dfrac{12}{\sqrt{2}}$

S a. $\sqrt{28}+\dfrac{28}{\sqrt{7}}$

Paso 1. $\sqrt{28}=\sqrt{2^2\times 7}$
$=2\sqrt{7}$ Se simplifica el primer término.

Paso 2. $\dfrac{28}{\sqrt{7}}=\dfrac{28}{\sqrt{7}}\times\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ Se racionaliza el denominador del segundo término.
$=\dfrac{28\sqrt{7}}{7}$
$=4\sqrt{7}$

Paso 3. $\sqrt{28}+\dfrac{28}{\sqrt{7}}=2\sqrt{7}+4\sqrt{7}$ Se suman los términos.
$=6\sqrt{7}$

b. $\sqrt{18}-\dfrac{12}{\sqrt{2}}$

Paso 1. $\sqrt{18}=\sqrt{2\times 3^2}$ Se simplifica el primer término.
$=3\sqrt{2}$

Paso 2. $\dfrac{12}{\sqrt{2}}=\dfrac{12}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ Se racionaliza el denominador del segundo.
$=\dfrac{12\sqrt{2}}{2}$
$=6\sqrt{2}$

Paso 3. $\sqrt{18}-\dfrac{12}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}-6\sqrt{2}$ Se restan los términos.
$=-3\sqrt{2}$

C Para sumar y restar raíces cuadradas con diferente radicando:

Paso 1. Se simplifican los términos a su mínima expresión.
Paso 2. Se racionalizan los denominadores, si fuera necesario.
Paso 3. Se suman o se restan los radicales semejantes.

E Calcule las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{2}+\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ b. $\sqrt{27}-\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ c. $\sqrt{12}+\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ d. $\sqrt{98}-\dfrac{20}{\sqrt{2}}$

e. $\sqrt{72}-\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ f. $\sqrt{50}-\dfrac{18}{\sqrt{2}}$ g. $\sqrt{45}-\dfrac{20}{\sqrt{5}}$ h. $\sqrt{20}+\dfrac{30}{\sqrt{5}}$

Unidad 4
Aritmética

Clase 11 Operaciones combinadas de raíces cuadradas de la forma $a(b+c)$

P

Calcule la siguiente expresión.

$\sqrt{5}(\sqrt{7}+3)$

S

Aplique la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}\sqrt{5}(\sqrt{7}+3) &= \sqrt{5}\times\sqrt{7}+\sqrt{5}\times 3\\ &= \sqrt{35}+3\sqrt{5}\end{aligned}$$

En la propiedad distributiva se cumple:

$$a(b+c) = ab+ac$$

C

La propiedad distributiva de la multiplicación se aplica a una operación de raíces cuadradas.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}5(\sqrt{45}+9) &= 5\sqrt{45}+5\times 9\\ &= 5\sqrt{3^2\times 5}+45\\ &= 5\times 3\sqrt{5}+45\\ &= 15\sqrt{5}+45\end{aligned}$$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{3}(\sqrt{3}+6)$

b. $\sqrt{9}(\sqrt{9}-2)$

c. $2(\sqrt{3}+4)$

d. $7(\sqrt{7}-5)$

e. $3(\sqrt{12}+4)$

f. $\sqrt{2}(\sqrt{18}-4)$

g. $3(\sqrt{24}-2)$

h. $\sqrt{5}(\sqrt{20}+6)$

Clase 12 Operaciones combinadas de raíces cuadradas de la forma $(a+b)(c+d)$

P

Calcule la siguiente expresión.

$(\sqrt{7}+2)(\sqrt{5}-4)$

S

Aplique la propiedad distributiva.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{7}+2)(\sqrt{5}-4) &= \sqrt{7}\times\sqrt{5}+\sqrt{7}\times(-4)+2\times\sqrt{5}+2\times(-4) \\
&= \sqrt{35}-4\sqrt{7}+2\sqrt{5}-8
\end{aligned}
$$

En la propiedad distributiva se cumple:
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

C

La propiedad distributiva de la multiplicación se aplica a una operación de raíces cuadradas.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{6}-2)(\sqrt{2}+4) &= \sqrt{6}\times\sqrt{2}+\sqrt{6}\times 4-2\times\sqrt{2}-2\times 4 \\
&= \sqrt{12}+4\sqrt{6}-2\sqrt{2}-8 \\
&= \sqrt{2^2\times 3}+4\sqrt{6}-2\sqrt{2}-8 \qquad \text{Se simplifica.} \\
&= 2\sqrt{3}+4\sqrt{6}-2\sqrt{2}-8
\end{aligned}
$$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{5}+2)$ b. $(\sqrt{3}+3)(\sqrt{2}-1)$ c. $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{6}-4)$

d. $(\sqrt{6}-4)(\sqrt{2}-2)$ e. $(\sqrt{3}+4)(\sqrt{3}-5)$ f. $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

g. $(\sqrt{2}+4)(\sqrt{3}-3)$ h. $(\sqrt{6}-1)(\sqrt{3}-1)$ i. $(\sqrt{7}-5)(\sqrt{7}-5)$

Clase 13 Operaciones combinadas de raíces cuadradas de la forma $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$

P

Calcule las siguientes expresiones.

a. $(\sqrt{7}+2)^2$

b. $(\sqrt{3}-8)^2$

S

a. Forma 1.

La operación $(\sqrt{7}+2)^2$ indica que se multiplica la base por ella misma, es decir:

$$(\sqrt{7}+2)^2=(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}+2)$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}&=\sqrt{7}\times\sqrt{7}+\sqrt{7}\times 2+2\times\sqrt{7}+2\times 2\\&=7+4\sqrt{7}+4\\&=11+4\sqrt{7}\end{aligned}$$

Forma 2.

Aplique el producto notable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$$\begin{aligned}(\sqrt{7}+2)^2&=(\sqrt{7})^2+2\times\sqrt{7}\times 2+2^2\\&=7+4\sqrt{7}+4\\&=11+4\sqrt{7}\end{aligned}$$

b. Aplique el producto notable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-8)^2&=(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{3}\times 8+8^2\\&=3-16\sqrt{3}+64\\&=67-16\sqrt{3}\end{aligned}$$

C

Los productos notables $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$ se aplican a las operaciones de raíces cuadradas.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

E

Calcule las siguientes expresiones.

a. $(\sqrt{3}+2)^2$	b. $(\sqrt{2}-5)^2$	c. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$	d. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$
e. $(\sqrt{6}+2)^2$	f. $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$	g. $(\sqrt{8}-3)^2$	h. $(\sqrt{10}+1)^2$
i. $(\sqrt{3}+5)^2$	j. $(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2$	k. $(\sqrt{7}-5)^2$	l. $(\sqrt{8}+3)^2$

Unidad 4 Aritmética

Sección 3 Operaciones básicas con radicales

Clase 14 Jerarquía de operaciones

P Calcule las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{2}\times\sqrt{24}$

b. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{30}\div\sqrt{5}$

S

a. $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{2}\times\sqrt{24}=\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{2\times 24}$ Se multiplica la raíz cuadrada.

$=\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$

$=\sqrt{2^2\times 3}+\sqrt{3^2\times 3}-\sqrt{2^2\times 2^2\times 3}$

$=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}$ Se simplifican las raíces cuadradas.

$=(2+3-4)\sqrt{3}$ Se suma o se resta.

$=\sqrt{3}$

b. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{30}\div\sqrt{5}=\sqrt{2\times 3}+\sqrt{\frac{30}{5}}$ Se multiplican y se dividen las raíces cuadradas.

$=\sqrt{6}+\sqrt{6}$

$=(1+1)\sqrt{6}$ Se suma.

$=2\sqrt{6}$

C

En la resolución de operaciones combinadas de raíces cuadradas:

Paso 1. Se multiplica y se divide de izquierda a derecha.
Paso 2. Se suma y se resta de izquierda a derecha.

E Calcule las siguientes expresiones.

a. $2\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\sqrt{6}-\sqrt{12}$

b. $\sqrt{8}-\sqrt{50}+3\sqrt{6}\div\sqrt{3}$

c. $\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\sqrt{75}\div\sqrt{5}$

d. $\sqrt{7}\times\sqrt{2}+\sqrt{56}\div\sqrt{4}$

e. $\sqrt{12}\times\sqrt{3}-\sqrt{27}\times\sqrt{3}$

f. $3\sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{30}\div\sqrt{3}$

Unidad 4 Aritmética

Ejercitación A

1. Exprese los siguientes números sin el símbolo radical.

a. $\sqrt{25}$ b. $-\sqrt{36}$ c. $\sqrt{64}$ d. $-\sqrt{100}$

2. Encuentre la raíz cuadrada de los siguientes números.

a. 16 b. 49 c. 81 d. 121

3. Escriba el símbolo "$<$" o "$>$" en el cuadro, según corresponda.

a. $\sqrt{3}\ \square\ \sqrt{6}$ b. $-\sqrt{2}\ \square\ -\sqrt{5}$ c. $\sqrt{6}\ \square\ -\sqrt{6}$

4. Calcule las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{5}\times\sqrt{2}$ b. $(-\sqrt{3})\times\sqrt{5}$ c. $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$ d. $\sqrt{5}\times(-\sqrt{6})$

e. $\sqrt{6}\div\sqrt{3}$ f. $(-\sqrt{10})\div\sqrt{2}$ g. $\sqrt{14}\div\sqrt{3}$ h. $\sqrt{2}\div(-\sqrt{7})$

5. Exprese las siguientes raíces cuadradas de la forma $\sqrt{c}$.

a. $2\sqrt{3}$ b. $3\sqrt{6}$ c. $5\sqrt{2}$ d. $4\sqrt{3}$

6. Simplifique los siguientes números.

a. $\sqrt{2^2\times 5}$ b. $\sqrt{2^2\times 3^2\times 5}$ c. $\sqrt{8}$ d. $\sqrt{18}$

7. Racionalice el denominador de las siguientes fracciones.

a. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b. $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ c. $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ d. $\dfrac{7}{\sqrt{10}}$

8. Calcule las siguientes expresiones.

a. $2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$ b. $6\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ c. $7\sqrt{5}+\sqrt{5}$

d. $5\sqrt{10}-8\sqrt{10}$ e. $4\sqrt{7}+7\sqrt{7}$ f. $2\sqrt{6}-8\sqrt{6}$

g. $9\sqrt{3}+6\sqrt{3}$ h. $7\sqrt{11}-2\sqrt{11}$ i. $3\sqrt{2}+6\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

j. $5\sqrt{3}-\sqrt{3}-3\sqrt{3}$ k. $7\sqrt{5}+3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$ l. $8\sqrt{7}-11\sqrt{7}-3\sqrt{7}$

m. $2\sqrt{6}+9\sqrt{6}+8\sqrt{6}$ n. $4\sqrt{11}-5\sqrt{11}-10\sqrt{11}$ o. $4\sqrt{2}+5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

p. $10\sqrt{5}-6\sqrt{5}+3\sqrt{5}$ q. $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-11\sqrt{3}$

9. Calcule las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{2}(\sqrt{2}+5)$ b. $\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$ c. $5(\sqrt{8}+3)$

d. $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{2}+2)$ e. $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-2)$ f. $(\sqrt{3}-4)(\sqrt{6}+1)$

g. $(\sqrt{2}-4)(\sqrt{7}-2)$ h. $(\sqrt{6}+3)(\sqrt{6}+5)$ i. $(\sqrt{8}-2)(\sqrt{8}-3)$

j. $(\sqrt{2}+3)^2$ k. $(\sqrt{3}-4)^2$ l. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

Ejercitación B

1. Analice si los siguientes enunciados son correctos. Si hay errores, muestre las respuestas correctas.
   a. La raíz cuadrada de 36 es 6.
   b. La raíz cuadrada de 16 es -4.
   c. La respuesta de $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ es 5.
   d. La respuesta de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es $\sqrt{5}$.

2. Identifique el número mayor de cada par de números.
   a. 2 y $\sqrt{2}$
   b. 2 y $\sqrt{5}$
   c. -2 y $-\sqrt{3}$

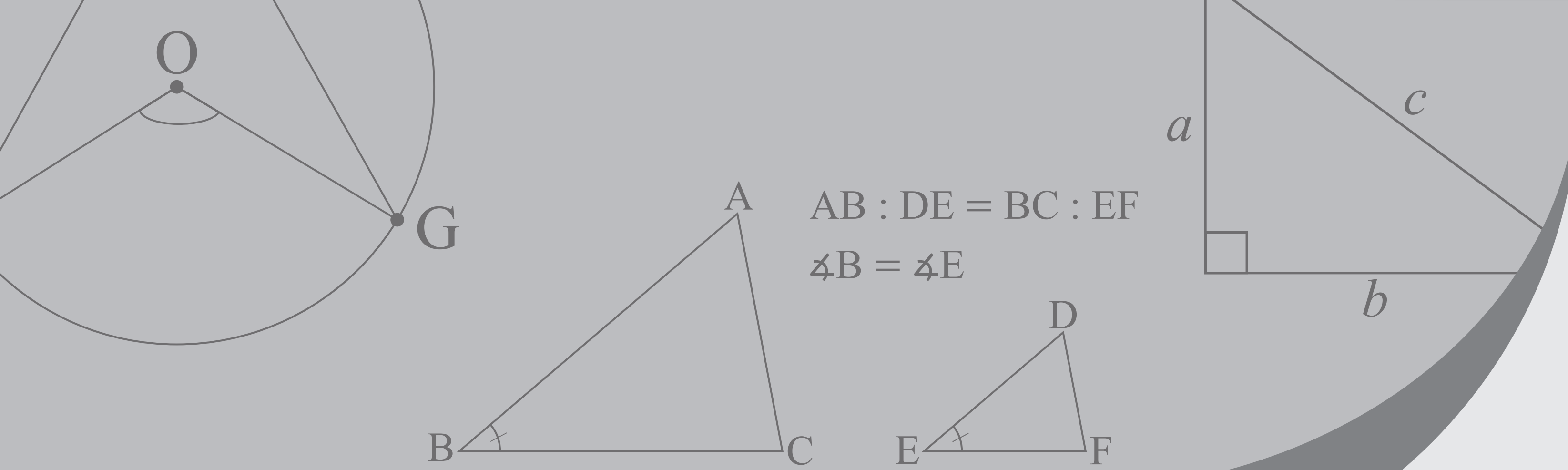
3. Calcule las siguientes expresiones.
   a. $\sqrt{18} \times \sqrt{2}$
   b. $\sqrt{12} \times \sqrt{5}$
   c. $\sqrt{27} \times \sqrt{10}$
   d. $6\sqrt{2} \div 6$
   e. $\sqrt{6} \div (-\sqrt{3})$
   f. $\sqrt{4} \div \sqrt{25}$
   g. $\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10}$
   h. $\sqrt{6} \times \sqrt{8} \div \sqrt{2}$
   i. $\sqrt{45} \div \sqrt{5} \div \sqrt{9}$

4. Calcule las siguientes expresiones.
   a. $\sqrt{24} + \sqrt{54}$
   b. $\sqrt{48} - \sqrt{12}$
   c. $\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{108}$
   d. $\sqrt{2} + \dfrac{4}{\sqrt{2}}$
   e. $\sqrt{18} - \dfrac{4}{\sqrt{2}}$
   f. $2\sqrt{5} + \dfrac{10}{\sqrt{5}}$
   g. $5\sqrt{3} - \dfrac{6}{\sqrt{3}}$
   h. $\sqrt{40} + \dfrac{5}{\sqrt{10}} + \dfrac{\sqrt{10}}{2}$
   i. $\sqrt{75} - \dfrac{6}{\sqrt{3}} - \dfrac{6}{\sqrt{12}}$
   j. $\sqrt{50} + \dfrac{6}{\sqrt{2}} - \dfrac{16}{\sqrt{8}}$

5. Calcule las siguientes expresiones.
   a. $(2 + 3\sqrt{2})(2 - 3\sqrt{2})$
   b. $(4\sqrt{2} - 1)^2$
   c. $4\sqrt{6} + \sqrt{2} \times \sqrt{3} - \sqrt{54}$
   d. $\sqrt{5} \times \sqrt{2} + \sqrt{50} \div \sqrt{5}$
   e. $\sqrt{32} \times \sqrt{2} - \sqrt{50} \times \sqrt{2}$
   f. $\sqrt{100} \div \sqrt{5} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{10}$

6. Cuando $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ y $y = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, encuentre el resultado de las siguientes expresiones.
   a. $x + y$
   b. $x - y$
   c. xy

Unidad 4
Aritmética

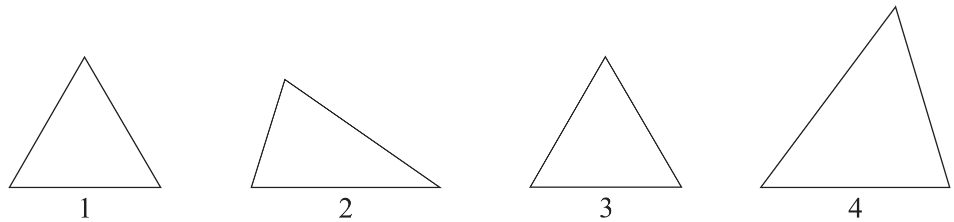


Unidad 5

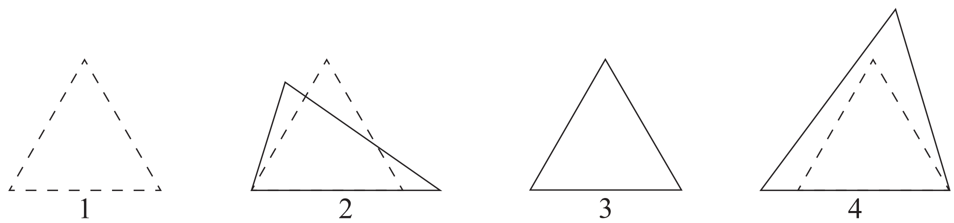
Geometría

Sección 1 Congruencia
Clase 1 Concepto de congruencia de figuras

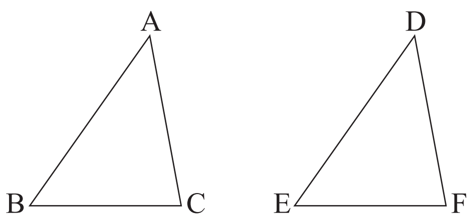
P ¿Qué sucede si se sobrepone el triángulo 1 en los triángulos 2, 3 y 4?



S Al sobreponer el triángulo 1 en el triángulo 2, 3 y 4 se observa que el triángulo 1 coincide con el triángulo 3 en todos sus lados y ángulos.



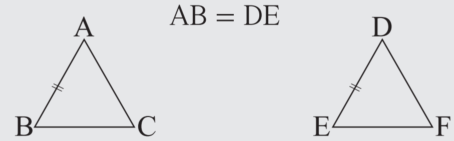
Cuando dos triángulos son congruentes, los vértices, lados y ángulos correspondientes coinciden.



Elementos correspondientes		
Vértices	Lados	Ángulos
A y D	AB y DE	$\measuredangle A$ y $\measuredangle D$
B y E	BC y EF	$\measuredangle B$ y $\measuredangle E$
C y F	CA y FD	$\measuredangle C$ y $\measuredangle F$

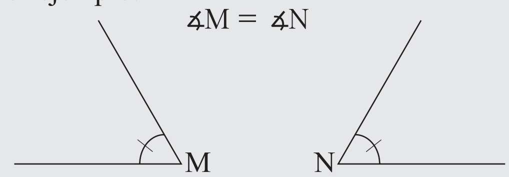
Cuando dos lados tienen igual longitud se dice que son congruentes.
Por ejemplo:

$AB = DE$



Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.
Por ejemplo:

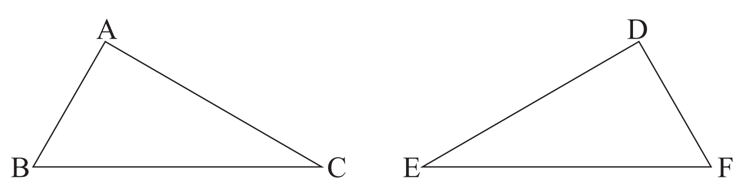
$\measuredangle M = \measuredangle N$



Unidad 5
Geometría

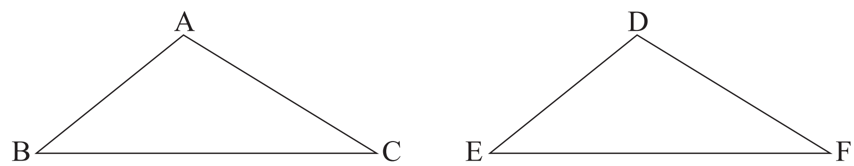
C A dos figuras que coinciden cuando se sobreponen de manera directa o colocándolas al revés se les llama **figuras congruentes**. Los vértices, lados y ángulos que coinciden al sobreponer dos figuras congruentes son **homólogos** o **correspondientes**.

E Los siguientes triángulos son congruentes. Identifique los vértices, lados y ángulos correspondientes.



Clase 2 Condición de congruencia de triángulos

P Compare los lados y los ángulos de los siguientes triángulos congruentes. Utilice regla y transportador.

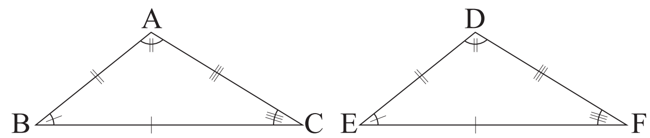


S Cuando se comparan los lados se observa que:

$AB = DE$

$BC = EF$

$CA = FD$



Cuando se comparan los ángulos se observa que:

$\measuredangle A = \measuredangle D$
$\measuredangle B = \measuredangle E$
$\measuredangle C = \measuredangle F$

A dos triángulos que coinciden en sus lados y ángulos se les llama triángulos congruentes.

Cuando el $\triangle ABC$ es congruente con el $\triangle DEF$, se simboliza como $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ y se lee “el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF”.

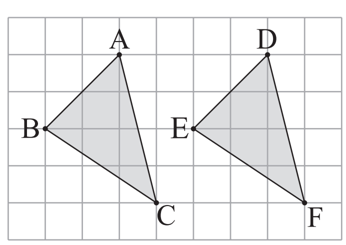
Cuando se simboliza la congruencia entre dos triángulos, es importante que las letras de los vértices estén en el orden de los vértices correspondientes.

Es incorrecto decir que el $\triangle ABC \equiv \triangle DFE$.

C Cuando los ángulos y los lados correspondientes son iguales, los triángulos son congruentes. Para indicar congruencia se utiliza el símbolo “≡”.

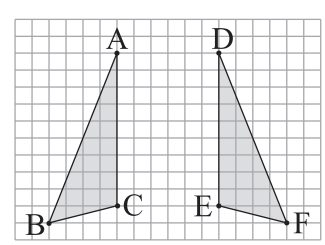
E En los siguientes triángulos, indique con el símbolo “≡” en caso de que sean congruentes. Escriba los vértices, lados y ángulos correspondientes.

a.



¡Cuidado con el orden para nombrar los vértices, lados y ángulos correspondientes!

b.

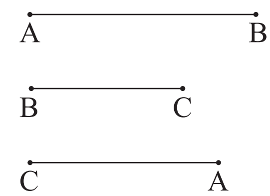


Sección 1 Congruencia
Clase 3 Primer criterio de congruencia: LLL

P

a. Construya un triángulo cuyos lados tengan las medidas de los segmentos que están a la derecha. Utilice regla y compás.

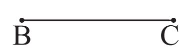
b. Compare los resultados obtenidos con otros estudiantes. ¿Cómo son los triángulos?



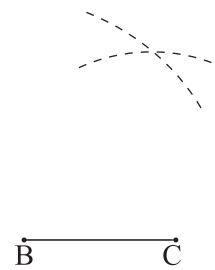
S

a.

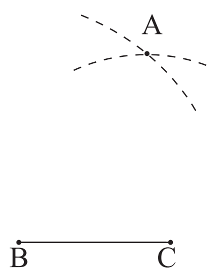
Paso 1. Trace un segmento de longitud BC.



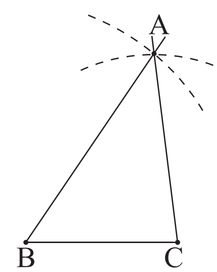
Paso 2. Trace un arco de radio AB con centro en B y otro de radio CA con centro en C.



Paso 3. Identifique la intersección entre los arcos como A.



Paso 4. Una los puntos para formar el △ABC.

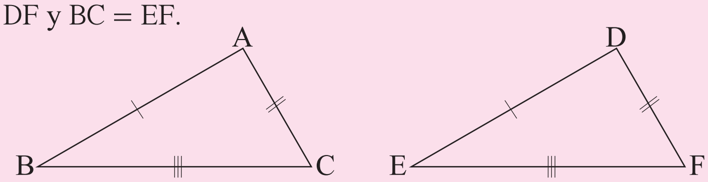


b. Los triángulos coinciden en todas las medidas. Es decir, sus lados y ángulos correspondientes son iguales sin importar la posición.

C

Primer criterio de congruencia:

Dos triángulos son congruentes si sus tres lados correspondientes son congruentes.
Este criterio se conoce como **Lado–Lado–Lado (LLL)**.
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ si $AB = DE$, $AC = DF$ y $BC = EF$.



E

Indique los pares de triángulos congruentes con el símbolo de congruencia.

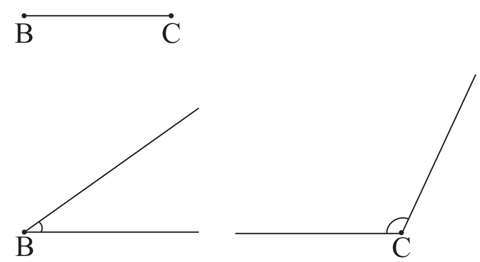
a. $\triangle ABC$; AB = 5 cm, BC = 7 cm, CA = 6 cm
b. $\triangle DEF$; DE = 2 cm, EF = 4 cm, FD = 3 cm
c. $\triangle JKL$; JK = 5 cm, KL = 7 cm, LJ = 8 cm
d. $\triangle PQR$; PQ = 5 cm, QR = 8 cm, RP = 7 cm
e. $\triangle XYZ$; XY = 4 cm, YZ = 3 cm, ZX = 2 cm
f. $\triangle GHI$; GH = 4 cm, HI = 5 cm, IG = 3 cm
g. $\triangle MNO$; MN = 3 cm, NO = 4 cm, OM = 5 cm
h. $\triangle STU$; ST = 7 cm, TU = 5 cm, US = 6 cm

Sección 1 Congruencia
Clase 4 Segundo criterio de congruencia: ALA

P

a. Construya un triángulo con las medidas de los ángulos y del segmento que están a la derecha. Utilice regla y transportador.

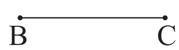
b. Compare los resultados obtenidos con otros estudiantes. ¿Cómo son los triángulos?



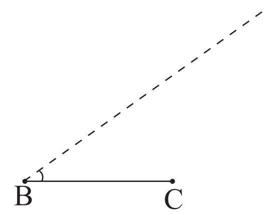
S

a.

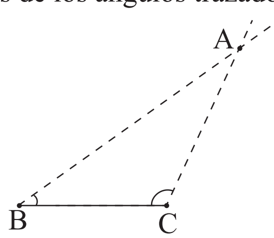
Paso 1. Trace un segmento de longitud BC.



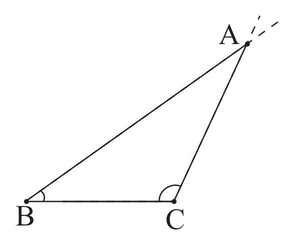
Paso 2. Mida el $\measuredangle$B con el transportador.



Paso 3. Mida el $\measuredangle$C con el transportador e identifique la intersección A de los rayos de los ángulos trazados.



Paso 4. Una los puntos para formar el $\triangle$ABC.



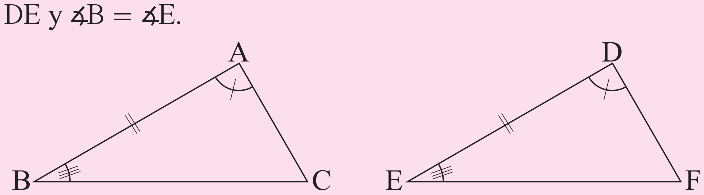
b. Los triángulos coinciden en todas las medidas. Es decir, sus lados y ángulos correspondientes son iguales sin importar la posición.

C

Segundo criterio de congruencia:

Dos triángulos son congruentes si dos de sus ángulos correspondientes y el lado comprendido entre ellos son congruentes. Este criterio se conoce como **Ángulo−Lado−Ángulo (ALA)**.

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ si $\measuredangle A = \measuredangle D$, $AB = DE$ y $\measuredangle B = \measuredangle E$.



E

Indique los pares de triángulos congruentes con el símbolo de conguencia.

a. $\triangle$JKL; JK = 5 cm, $\measuredangle$J = 60°, $\measuredangle$K = 50°

b. $\triangle$DEF; EF = 6 cm, $\measuredangle$E = 50°, $\measuredangle$F = 70°

c. $\triangle$XYZ; XZ = 6 cm, $\measuredangle$X = 70°, $\measuredangle$Z = 50°

d. $\triangle$PQR; PR = 6 cm, $\measuredangle$P = 110°, $\measuredangle$R = 40°

e. $\triangle$GHI; GH = 6 cm, $\measuredangle$G = 40°, $\measuredangle$H = 110°

f. $\triangle$ABC; BC = 5 cm, $\measuredangle$B = 35°, $\measuredangle$C = 100°

g. $\triangle$STU; ST = 5 cm, $\measuredangle$T = 50°, $\measuredangle$S = 60°

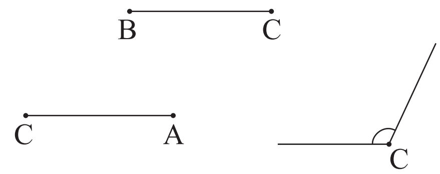
h. $\triangle$MNO; MO = 5 cm, $\measuredangle$M = 100°, $\measuredangle$O = 35°

Clase 5 Tercer criterio de congruencia: LAL

P

a. Construya un triángulo utilizando las medidas de los dos segmentos y el ángulo comprendido entre ellos que están a la derecha. Utilice regla, compás y transportador.

b. Compare los resultados obtenidos con sus compañeros. ¿Cómo son los triángulos?

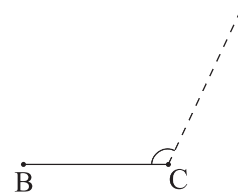


S

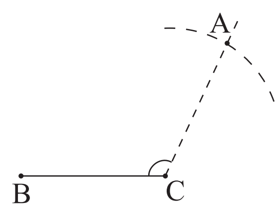
a.

Paso 1. Trace un segmento de longitud BC.

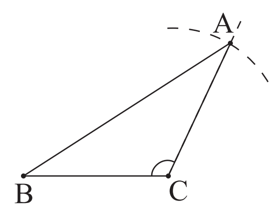
Paso 2. Mida el ∡C con el transportador.



Paso 3. Trace un arco de radio CA e identifique la intersección del arco y el rayo del ∡C.



Paso 4. Una los puntos para formar el △ABC.

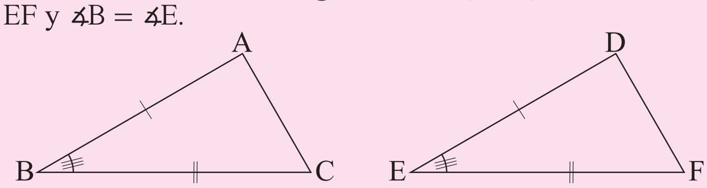


b. Los triángulos coinciden en todas las medidas. Es decir, sus lados y ángulos correspondientes son iguales sin importar la posición.

C

Tercer criterio de congruencia:

Dos triángulos son congruentes si sus dos lados correspondientes y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes. Este criterio se conoce como **Lado−Ángulo−Lado (LAL)**.
△ABC ≡ △DEF si AB = DE, BC = EF y ∡B = ∡E.



E

Indique los pares de triángulos congruentes con el símbolo de conguencia.

a. △JKL; JK = 5, KL = 4, ∡K = 50°

b. △DEF; EF = 3, FD = 5, ∡F = 60°

c. △XYZ; YX = 5, XZ = 3, ∡X = 60°

d. △PQR; RP = 4, PQ = 5, ∡P = 50°

e. △GHI; GH = 4, HI = 3, ∡H = 60°

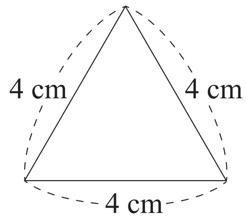
f. △ABC; BC = 3, CA = 4, ∡C = 50°

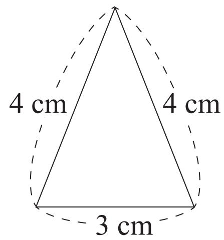
g. △STU; US = 4, TU = 3, ∡U = 50°

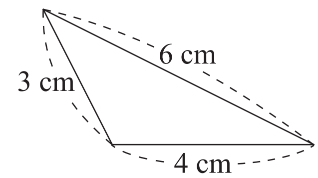
h. △MNO; OM = 3, MN = 4, ∡M = 60°

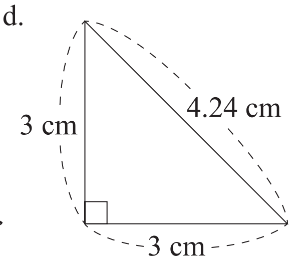
Clase 1 Triángulos isósceles

P Clasifique los siguientes triángulos según la longitud de sus lados, y mencione las características de los triángulos isósceles.

a.


b.


c.


d.


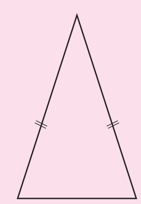
S La clasificación de los triángulos queda de la siguiente manera:

El triángulo del inciso a tiene tres lados de igual longitud. Por tanto, es un triángulo equilátero.

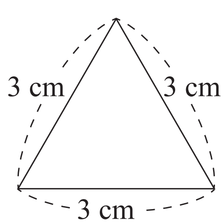
Los triángulos de los incisos b y d tienen únicamente dos lados de igual longitud. Por tanto, son triángulos isósceles.

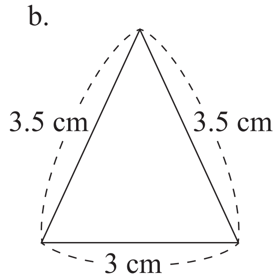
El triángulo del inciso c tiene los tres lados con diferente longitud. Por tanto, es un triángulo escaleno.

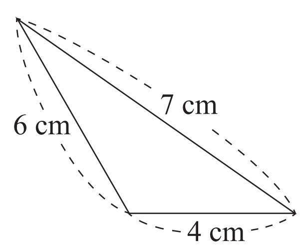
C A un triángulo que posee dos lados con igual longitud se le llama triángulo isósceles.

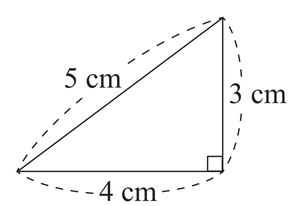


E Identifique cuál de los siguientes triángulos es isósceles.

a.


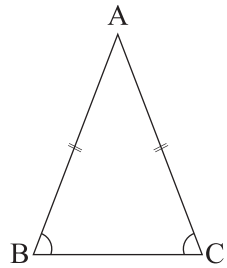
b.


c.


d.


Clase 2 Teorema del triángulo isósceles

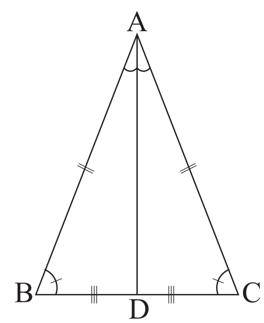
P Si el $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles con los lados $AB = AC$, entonces demuestre que el $\measuredangle B$ y el $\measuredangle C$ son iguales.



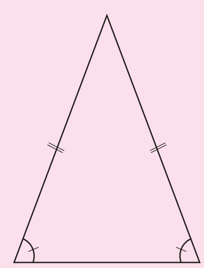
S Identifique el punto medio D del segmento BC y trace el segmento AD.

En $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$,
$AB = AC$ (por hipótesis)
$DB = DC$ (por construcción)
$AD = AD$ (es común)
Entonces, $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (por el criterio LLL).

Por tanto, $\measuredangle B = \measuredangle C$ (por la congruencia de triángulos).

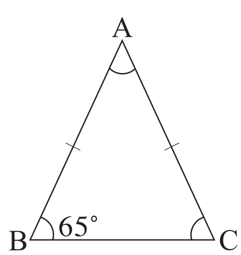


C En un triángulo isósceles la medida de los ángulos de la base son iguales.

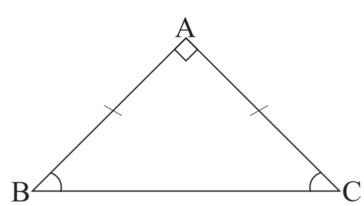


E Determine la medida de los ángulos restantes de cada triángulo.

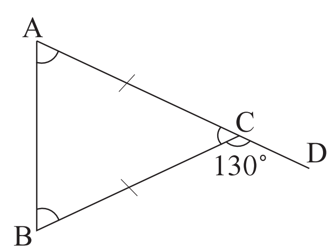
a.



b.

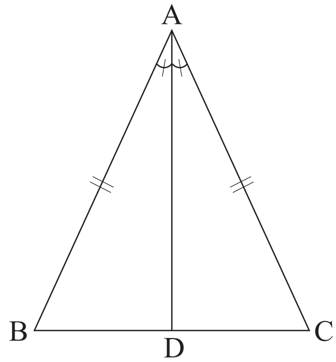


c.



Clase 3 Bisectriz del ángulo de un triángulo isósceles

P Demuestre que en un triángulo isósceles ABC, la bisectriz del ángulo comprendido entre los lados de igual longitud es mediatriz del lado opuesto.



Bisectriz del ángulo es el rayo que divide un ángulo en dos partes iguales.

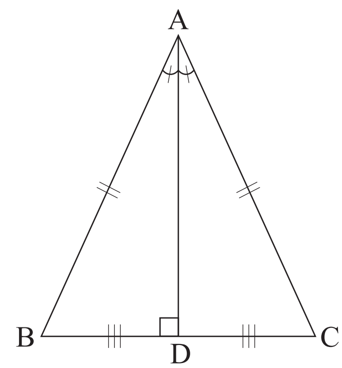
Mediatriz de un segmento es la recta que se interseca perpendicularmente con el punto medio de dicho segmento.

S En $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$,
$AB = AC$ (por hipótesis)
$AD = AD$ (es común)
$\measuredangle BAD = \measuredangle CAD$ (por hipótesis)
Entonces, $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (por el criterio LAL).

$DB = DC$ (por la congruencia de triángulos)
$\measuredangle ADB = \measuredangle ADC$ (por la congruencia de triángulos) ①
$\measuredangle ADB + \measuredangle ADC = 180^\circ$ (por ser ángulo llano) ②

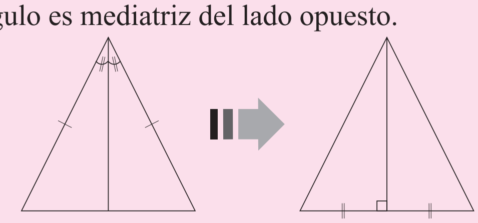
$2\measuredangle ADB = 180^\circ$ (por ① y ②)
$\measuredangle ADB = 90^\circ$

Entonces, $AD \perp BC$.
Por tanto, AD es mediatriz de BC $(\text{por } DB = DC \text{ y } AD \perp BC)$.

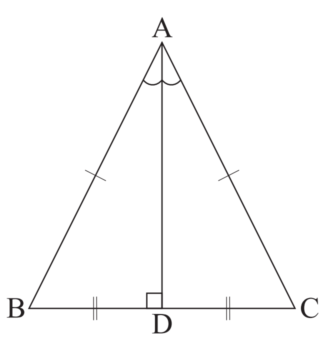


$AD \perp BC$ significa que AD y BC se intersecan formando un ángulo de 90°.

C En un triángulo isósceles se cumple que la bisectriz del ángulo comprendido entre los dos lados de igual longitud del triángulo es mediatriz del lado opuesto.



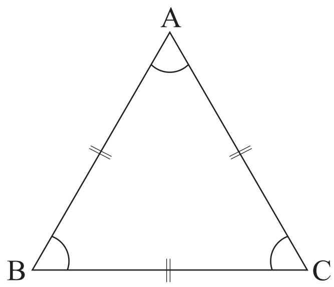
E Demuestre que si el $\triangle ABC$ es isósceles con los lados $AB = AC$, entonces la mediatriz de BC divide el $\measuredangle A$ en dos partes iguales llenando los espacios en blanco.



En $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$,
$AB = \boxed{}$ (por hipótesis)
$BD = \boxed{}$ (por hipótesis)
$AD = \boxed{}$ (es común)
$\triangle ABD \equiv \boxed{}$ (por el criterio LLL)
$\measuredangle BAD = \measuredangle CAD$ (por la congruencia de triángulos)
Por tanto, la mediatriz de BC divide el $\measuredangle A$ en dos partes iguales.

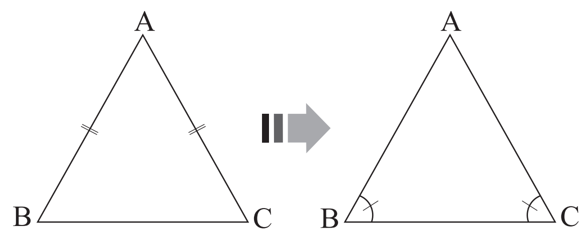
Sección 2 Triángulos
Clase 4 Triángulos equiláteros

P Demuestre que los ángulos internos del triángulo equilátero ABC tienen la misma medida y cada uno mide 60°.

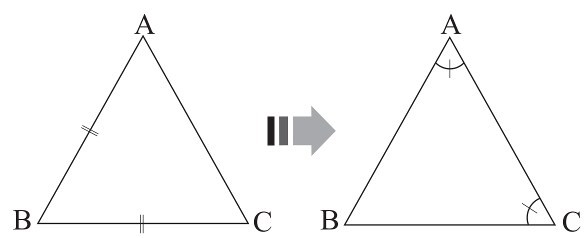


Un triángulo equilátero tiene tres lados de igual longitud.

S En $\triangle$ABC, ∡ABC = ∡ACB (porque AB = AC)



∡BCA = ∡BAC (porque BC = BA)



Por tanto, ∡ABC = ∡BCA = ∡CAB

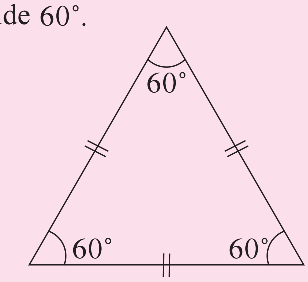
Si "x" es la medida de cada ángulo interno,
entonces $x + x + x = 180^\circ$

$$3x = 180^\circ$$

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{180^\circ}{3}$$
$$= 60^\circ$$

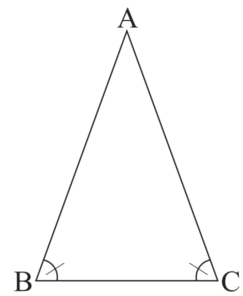
C En un triángulo equilátero, cada uno de los ángulos internos mide 60°.



E Identifique los incisos que contengan las características de un triángulo equilátero.
a. Los ángulos de la base miden 45°.
b. Todos los ángulos internos miden 60°.
c. La longitud de los tres lados es igual.
d. La longitud de los tres lados es diferente.

Clase 5 Recíproco del teorema del triángulo isósceles

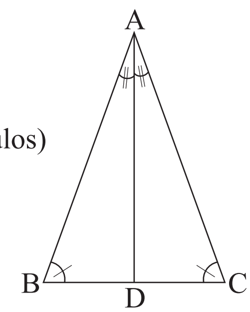
P Demuestre que si la medida de dos ángulos internos del triángulo ABC es igual, entonces la longitud de los lados opuestos a estos ángulos es igual.



S Trazando la bisectriz de $\measuredangle BAC$, se tiene $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$.
En $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$,
$\measuredangle DBA = \measuredangle DCA$ (por hipótesis) ①
$\measuredangle DAB = \measuredangle DAC$ (por construcción de la bisectriz) ②

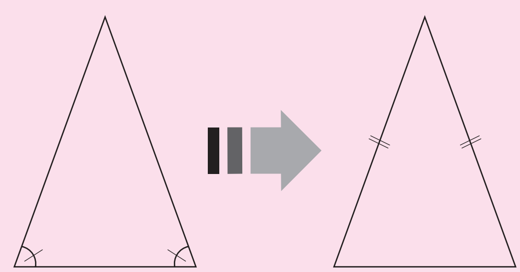
$\measuredangle BDA = 180° - (\measuredangle DBA + \measuredangle DAB)$ (por teorema de ángulos internos de triángulos)
$= 180° - (\measuredangle DCA + \measuredangle DAC)$ (por ① y ②)
$= \measuredangle CDA$

$AD = AD$ (es común)



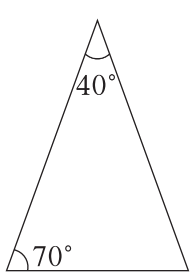
Entonces, $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (por el criterio ALA).
Por tanto, $AB = AC$ (por la congruencia).

C Cuando un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, los lados opuestos a dichos ángulos tienen la misma longitud.

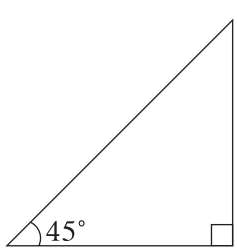


E Identifique cuáles de las siguientes figuras son triángulos isósceles.

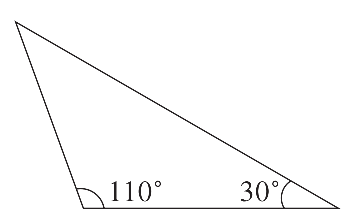
a.



b.



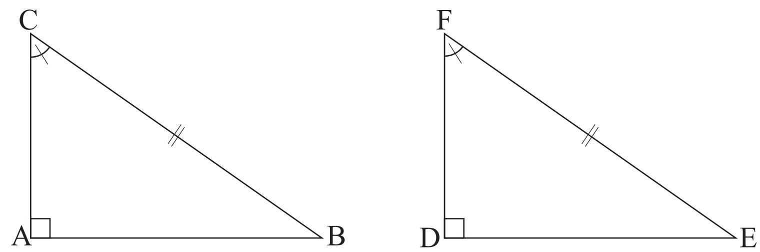
c.



Clase 6 Criterio de congruencia de triángulos rectángulos (1)

P

Demuestre que si en el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ se cumple que $\measuredangle CAB = \measuredangle FDE = 90°$, $\measuredangle ACB = \measuredangle DFE$ y el lado $CB = FE$, entonces $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.



S

En $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$,

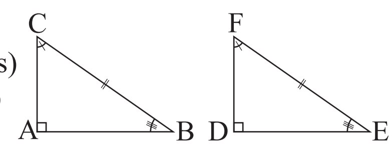
$\measuredangle ACB = \measuredangle DFE$ (por hipótesis) ①

$\measuredangle CAB = \measuredangle FDE$ (por hipótesis)

$\measuredangle ABC = 180° - (\measuredangle CAB + \measuredangle ACB)$ (por la suma de ángulos internos)

$\measuredangle DEF = 180° - (\measuredangle FDE + \measuredangle DFE)$ (por la suma de ángulos internos)

Entonces, $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$. ②

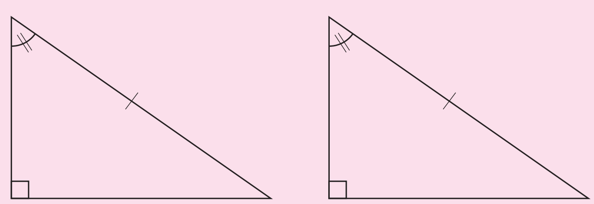


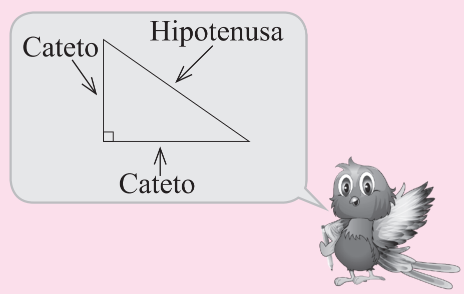
$CB = FE$ (por hipótesis) ③

Por tanto, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (por ①, ②, ③ y el criterio de congruencia ALA).

C

Si en dos triángulos rectángulos sus hipotenusas y un par de ángulos agudos correspondientes son de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

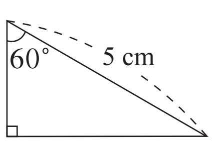




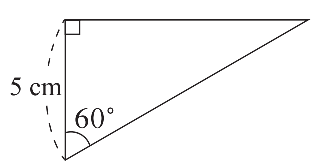
E

Identifique los triángulos que son congruentes y justifique su respuesta.

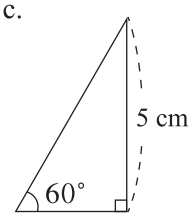
a.



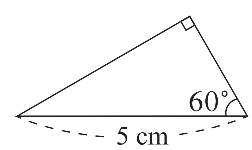
b.



c.



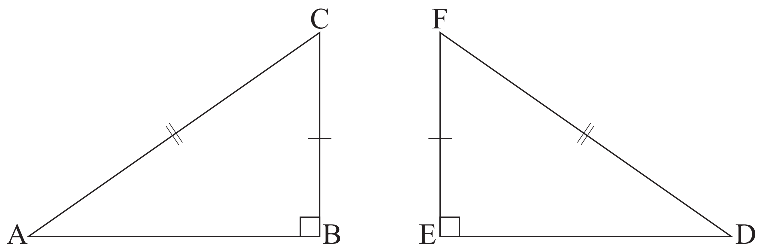
d.



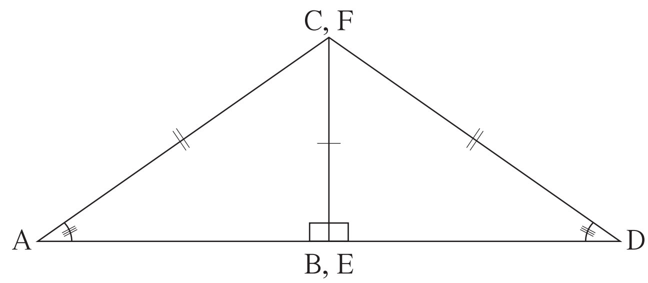
Unidad 5
Geometría

Clase 7 Criterio de congruencia de triángulos rectángulos (2)

P Demuestre que si CB = FE, CA = FD y ∡CBA = ∡FED = 90°, entonces △CAB ≡ △FDE.



S Se hace coincidir los lados CB y FE.

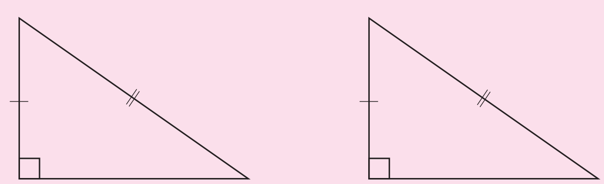


Por tanto,
∡ABD = ∡ABC + ∡DEF
= 90° + 90°
= 180°

Los puntos A, B, D están alineados.
Entonces, △CAD es un triángulo isósceles.
En el triángulo isósceles CAD, ∡CAD = ∡CDA (por teorema del triángulo isósceles). ①
En △CAB y △FDE,
CA = FD (por hipótesis)
∡CBA = ∡FED = 90° (por hipótesis)
∡CAD = ∡CDA (por ①)

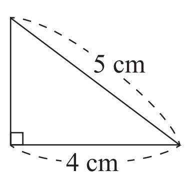
Por tanto, △CAB ≡△ FDE (por ser triángulos rectángulos que tienen su hipotenusa y un ángulo agudo congruentes).

C Si en dos triángulos rectángulos sus hipotenusas y un par de catetos correspondientes son de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

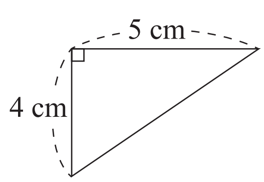


E Agrupe los triángulos que son congruentes y justifique su respuesta.

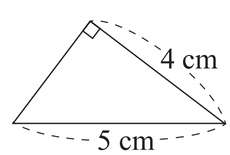
a.



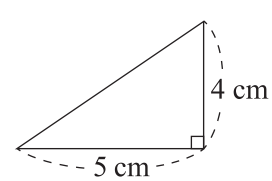
b.



c.

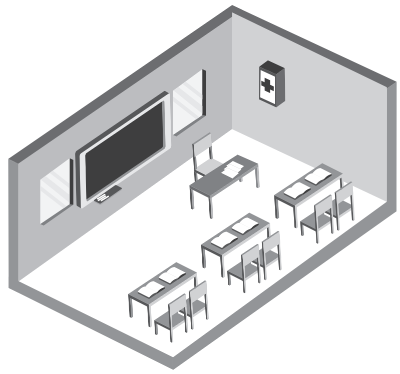


d.

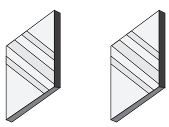


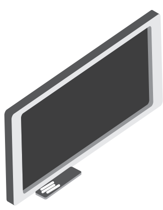
Sección 3 Cuadriláteros
Clase 1 Definición de paralelogramos

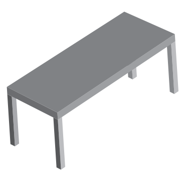
P La figura de abajo muestra la imagen de un salón de clases vista en dirección diagonal superior. Encuentre las figuras planas llamadas paralelogramos en la imágen y explique la respuesta.

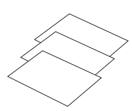


S Los siguientes paralelogramos se encuentran en la figura:


Las ventanas.

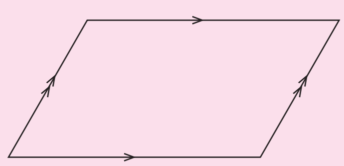

El pizarrón al fondo del salón de clase.


La parte superior de los escritorios.

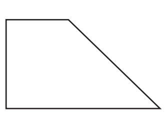
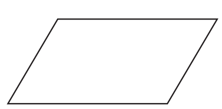
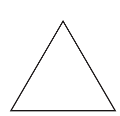
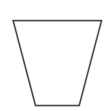

Las hojas sobre el escritorio.

Los paralelogramos tienen dos pares de lados opuestos paralelos.

C Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

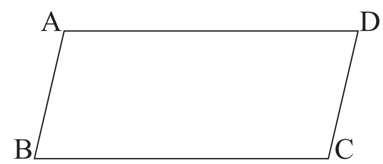


E Identifique en las siguientes figuras cuáles son paralelogramos y explique por qué.

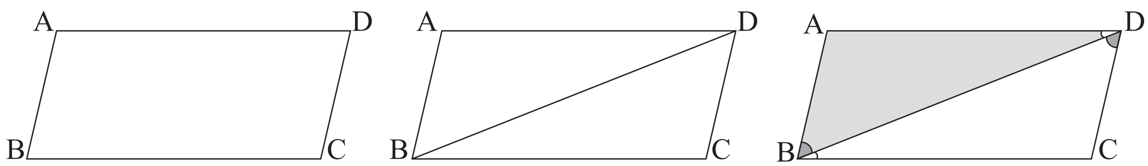
a. 
b. 
c. 
d. 

Clase 2 Características de paralelogramos (lados y ángulos opuestos son congruentes)

P Dado el siguiente paralelogramo ABCD, demuestre que tiene dos lados opuestos congruentes y dos ángulos opuestos congruentes.



S Por hipótesis se tiene que AB∥DC y AD∥BC.
Se traza la diagonal BD, de lo cual se tiene:

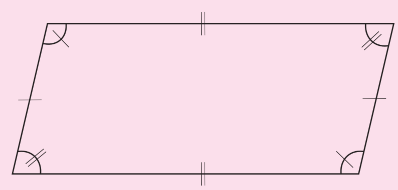


En △ABD y △CDB,
$\measuredangle$ABD = $\measuredangle$CDB (por ser ángulos alternos internos entre paralelas) ①
$\measuredangle$ADB = $\measuredangle$CBD (por ser ángulos alternos internos entre paralelas) ②
BD = DB (es común)
Entonces, △ABD ≡ △CDB (por el criterio ALA).
Por tanto, $\measuredangle$DAB = $\measuredangle$BCD, AB = CD, AD = CB. ③

$\measuredangle$ABC = $\measuredangle$ABD + $\measuredangle$DBC ④
$\measuredangle$CDA = $\measuredangle$CDB + $\measuredangle$BDA ⑤
Por tanto, $\measuredangle$ABC = $\measuredangle$CDA (por ①, ②, ④ y ⑤). ⑥

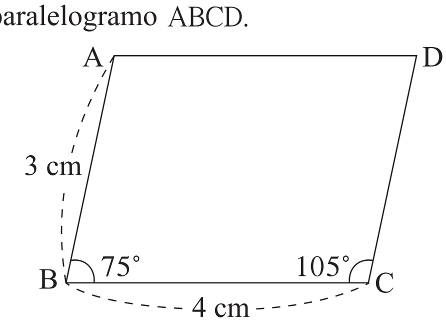
Por consiguiente,
AB = DC, AD = BC (por ③)
$\measuredangle$DAB = $\measuredangle$BCD (por ③), $\measuredangle$ABC = $\measuredangle$CDA (por ⑥)

C Un paralelogramo tiene las siguientes características:
a. Los lados opuestos son congruentes.
b. Los ángulos opuestos son congruentes.



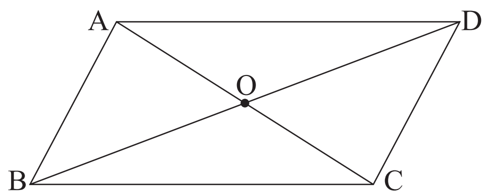
E Encuentre los siguientes lados y ángulos del paralelogramo ABCD.

a. La longitud DC
b. La longitud AD
c. La medida del $\measuredangle$DAB
d. La medida del $\measuredangle$ADC



Clase 3 Características de paralelogramos (diagonales se intersecan en el punto medio)

P Demuestre que el siguiente paralelogramo ABCD las diagonales se intersecan en su punto medio.



Para demostrar que las diagonales se intersecan en su punto medio es suficiente demostrar que OA = OC y OB = OD.

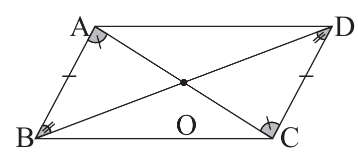
S En $\triangle OAB$ y $\triangle OCD$,

Para demostrar que OA = OC y OB = OD, es suficiente demostrar $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$.

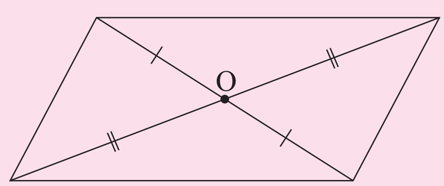
AB = CD (por ser paralelogramo) ①
$\measuredangle ABO = \measuredangle CDO$ (por ser alternos internos entre paralelas) ②
$\measuredangle BAO = \measuredangle DCO$ (por ser alternos internos entre paralelas) ③
Entonces, $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$ (por ①, ②, ③ y criterio ALA).

Por tanto, OA = OC y OB = OD (por la congruencia).

Por consiguiente, las diagonales se intersecan en su punto medio.

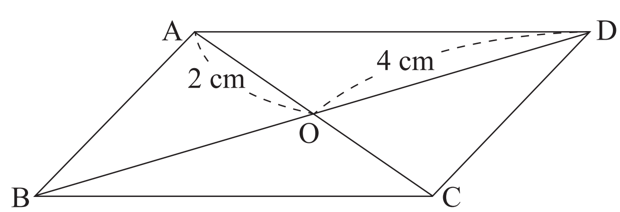


C En un paralelogramo se cumple que las diagonales se intersecan en su punto medio.



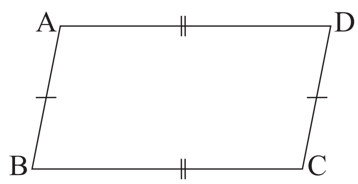
E El siguiente paralelogramo ABCD tiene DO = 4 cm y AO = 2 cm. Encuentre:

a. BO
b. AC



Clase 4 Condiciones para un paralelogramo (1)

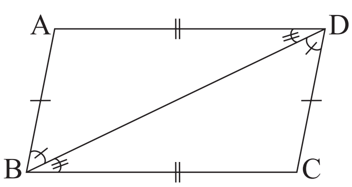
P Demuestre que el siguiente cuadrilátero ABCD es un paralelogramo si sus lados opuestos son congruentes.



Para demostrar $AD \parallel BC$ y $AB \parallel DC$, es suficiente demostar $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, trazando la diagonal BD.

S Se traza la diagonal BD.
Entonces, $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (por criterio LLL, $AB = CD$, $AD = CB$; por hipótesis y BD es común).

Entonces, $\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$ (por ser ángulos correspondientes en la congruencia).



Por tanto, $AB \parallel CD$ (dado que $\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$ por ser ángulos alternos internos de igual medida).

De la misma forma, $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD$ (por ser ángulos correspondientes en la congruencia).

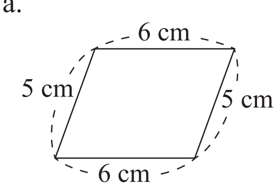
Por tanto, $AD \parallel CB$ (ángulos alternos internos de igual medida).

Entonces, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

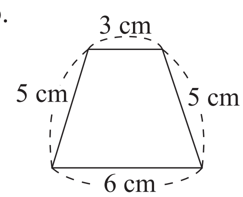
C Si dos pares de lados opuestos son congruentes en un cuadrilátero, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

E Dados los siguientes cuadriláteros, identifique los paralelogramos.

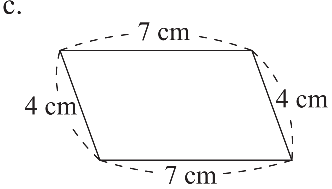
a.



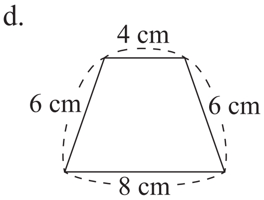
b.



c.

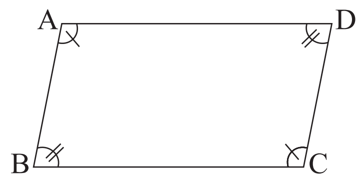


d.

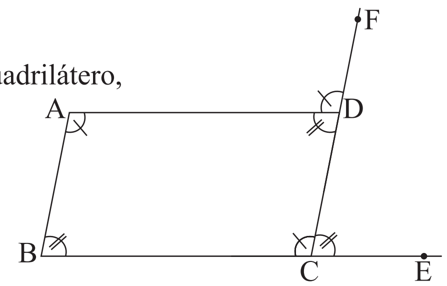


Sección 3 Cuadriláteros
Clase 5 Condiciones para un paralelogramo (2)

P Demuestre que el siguiente cuadrilátero ABCD, cuyos pares de ángulos opuestos son congruentes, es un paralelogramo.



S Se prolongan los segmentos BC hasta el punto E y CD hasta el punto F.



Para AB y DC,
$2\measuredangle ABC + 2\measuredangle BCD = 360^\circ$ (suma de ángulos internos de un cuadrilátero, $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD$ y $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$)

$\measuredangle ABC + \measuredangle BCD = 180^\circ$ (dividiendo entre 2) ①

También $\measuredangle BCD + \measuredangle DCE = 180^\circ$ (porque $\measuredangle BCE$ es un ángulo llano). ②

$\measuredangle ABC + \measuredangle BCD = \measuredangle BCD + \measuredangle DCE$ (por ① y ②)

Entonces, $\measuredangle ABC = \measuredangle DCE$ (se resta $\measuredangle BCD$ en ambos miembros).

Por tanto, $AB \parallel DC$ (ángulos correspondientes de igual medida).

Para BC y AD,
$2\measuredangle BCD + 2\measuredangle ADC = 360^\circ$ ($\measuredangle BCD = \measuredangle BAD$ y $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC$)

$\measuredangle BCD + \measuredangle ADC = 180^\circ$ (dividiendo entre 2) ③

También $\measuredangle ADC + \measuredangle ADF = 180^\circ$ (porque $\measuredangle CDF$ es un ángulo llano). ④

$\measuredangle BCD + \measuredangle ADC = \measuredangle ADC + \measuredangle ADF$ (por ③ y ④)

Entonces, $\measuredangle BCD = \measuredangle ADF$ (se resta $\measuredangle ADC$ en ambos miembros).

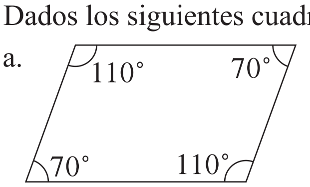
Por tanto, $BC \parallel AD$ (ángulos correspondientes de igual medida).

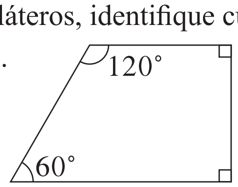
Por tanto, se concluye que los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos.

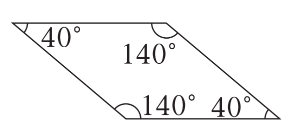
Por consiguiente, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

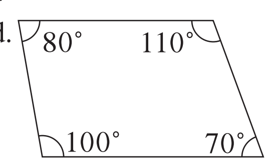
C Si dos pares de ángulos opuestos son congruentes en un cuadrilátero, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

E Dados los siguientes cuadriláteros, identifique cuáles son los paralelogramos.

a.


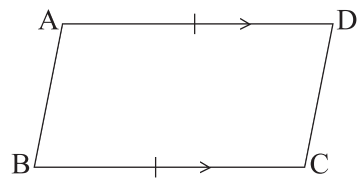
b.


c.


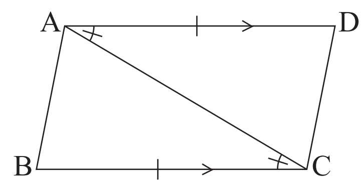
d.


Clase 6 Condiciones para un paralelogramo (3)

P Demuestre que el siguiente cuadrilátero ABCD, cuyo par de lados opuestos son congruentes y paralelos, es un paralelogramo.



S AD = BC y AD∥BC (por hipótesis)
Se traza la diagonal AC.



En △ABC y △CDA,
BC = DA (por hipótesis)
∡ACB = ∡CAD (ángulos alternos internos entre paralelas)
AC = CA (es común)

Entonces, △ABC ≡ △CDA (por el criterio LAL).
Por consiguiente, AB = CD (por la congruencia).

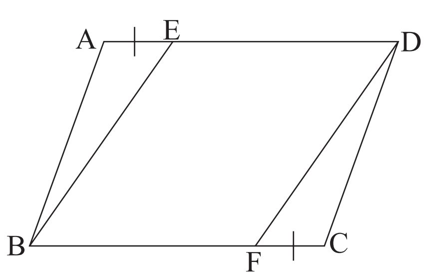
Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo (dos pares de lados opuestos de igual medida).

C Cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea paralelogramo:

1. Dos pares de lados opuestos son paralelos. (Definición)
2. Dos pares de lados opuestos son congruentes.
3. Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
4. Las diagonales se intersecan en su punto medio.
5. Un par de lados opuestos son paralelos y congruentes.

El numeral 1 corresponde a la definición de paralelogramo.

E Se toman los puntos E y F en los lados AD y BC respectivamente de un paralelogramo ABCD de modo que se cumple que AE = CF. Demuestre que el cuadrilátero EBFD es un paralelogramo llenando los espacios en blanco.



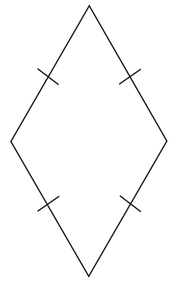
En el paralelogramo ABCD,
AD = $\boxed{}$ (por la condición 2)
AE = CF (por hipótesis)
Entonces, ED = $\boxed{}$.

AD∥BC (por hipótesis)
ED∥$\boxed{}$

Por lo anterior, los dos lados opuestos son paralelos y congruentes.
Por tanto, el cuadrilátero EBFD es un paralelogramo.

Sección 3 Cuadriláteros
Clase 7 Características de rombos

P Demuestre que un rombo es un paralelogramo, utilizando las condiciones vistas en la conclusión de la clase 6 sección 3.



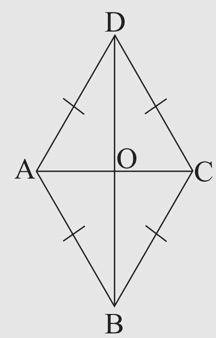
S Un rombo tiene dos pares de lados opuestos congruentes. Entonces, por la condición 2, un rombo es un paralelogramo.

C Un rombo es un paralelogramo por tener cuatro lados congruentes.

Las diagonales de un rombo se intersecan perpendicularmente.

Se trazan las diagonales AC y BD en el rombo ABCD y se nombra O al punto donde las diagonales se intersecan.

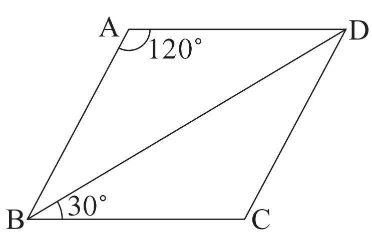
En $\triangle$DAO y $\triangle$DCO,
DA = DC (por ser un rombo) ①
DO = DO (es común) ②
AO = CO (por la condición 4 para un paralelogramo) ③



Entonces, $\triangle$DAO $\equiv$ $\triangle$DCO (por el criterio LLL).

Por consiguiente, $\measuredangle$DOA = $\measuredangle$DOC = 90°
Por tanto, DO $\perp$ AC.

E Demuestre que en el paralelogramo ABCD, si el $\measuredangle$DAB = 120° y el $\measuredangle$DBC = 30°, entonces el paralelogramo ABCD es un rombo.



En el paralelogramo ABCD,

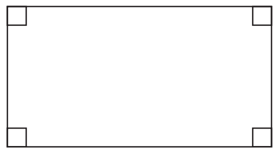
$\measuredangle$BDA = $\square$° (por AD $\parallel$ BC y $\measuredangle$DBC = 30°)
En $\triangle$ABD,
$\measuredangle$DBA = 180° − ($\measuredangle$DAB + $\measuredangle$BDA) = $\square$°
Entonces, $\triangle$ABD es un triángulo isósceles y AB = AD.

En el paralelogramo ABCD, AB = $\square$ y AD = $\square$ por la condición 2 para un paralelogramo.
Por lo anterior, AB = $\square$ = $\square$ = $\square$.
Por tanto, el paralelogramo ABCD es un rombo.

Unidad 5
Geometría

Clase 8 Características de rectángulos

P Demuestre que un rectángulo es paralelogramo, utilizando las condiciones vistas en la conclusión de la clase 6 sección 3.



Un rectángulo es el cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos.

S Un rectángulo tiene dos pares de ángulos opuestos congruentes. Entonces, por la condición 3, un rectángulo es paralelogramo.

C Un rectángulo es un paralelogramo por tener cuatro ángulos congruentes.

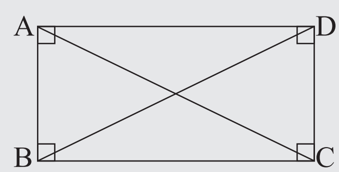
Las diagonales de un rectángulo tienen la misma medida.

Se trazan las diagonales AC y DB en el rectángulo ABCD, como se muestra en la figura que está abajo.

$AB = DC$
$BC = CB$
$\measuredangle ABC = \measuredangle DCB = 90^\circ$

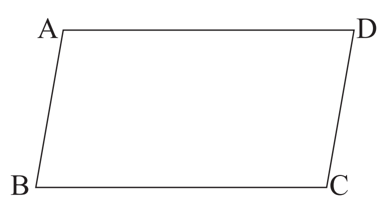
Entonces, $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ (por el criterio LAL).

Por tanto, $AC = DB$ (por congruencia).



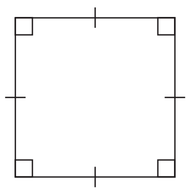
E ¿Cuáles son las condiciones para que el paralelogramo ABCD sea un rectángulo?

a. $\measuredangle A = 90^\circ$
b. $AB = BC$
c. $AC = BD$



Clase 9 Características de cuadrados

Demuestre que un cuadrado es un paralelogramo, utilizando las condiciones vistas en la conclusión de la clase 6 sección 3.



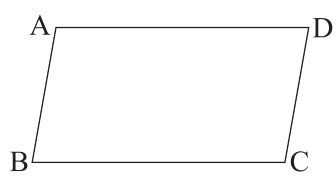
Un cuadrado es un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes.

Dado que un cuadrado tiene cuatro lados congruentes por definición, entonces los lados opuestos son congruentes. Por tanto, por la condición 2, un cuadrado es paralelogramo.

Un cuadrado es un paralelogramo por tener cuatro lados congruentes y cuatro ángulos congruentes.

¿Qué incisos muestran las condiciones para que un paralelogramo ABCD sea un cuadrado?

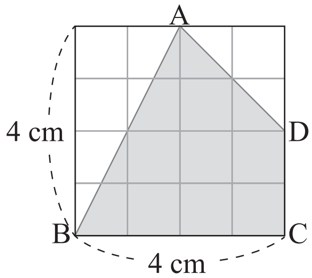
a. $\measuredangle A = \measuredangle B$
b. $AB = BC$
c. $\measuredangle A = \measuredangle B$ y $AB = BC$



Sección 4 Semejantes

Clase 1 Concepto de semejanza

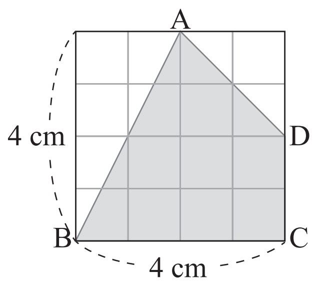
P Con base en la siguiente figura:

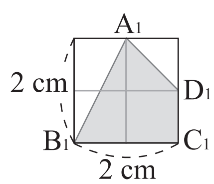


Reduzca a la mitad y amplíe al doble las longitudes de los lados en la cuadrícula.

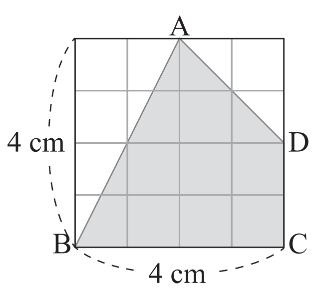
a. Reduzca el tamaño del cuadrilátero ABCD a la mitad sin cambiar su forma.
b. Amplíe el tamaño del cuadrilátero ABCD al doble sin cambiar su forma.

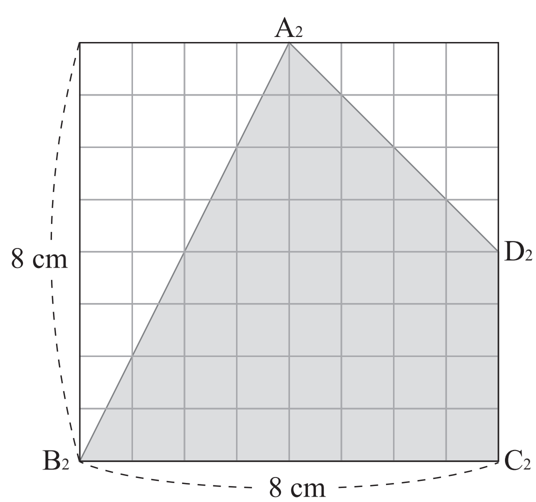
S a. Se traza el cuadrilátero en la cuadrícula, respetando la forma del mismo.





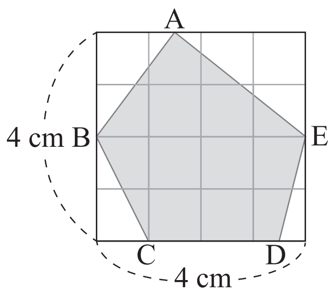
b. Se traza el cuadrilátero en la cuadrícula, respetando la forma del mismo.

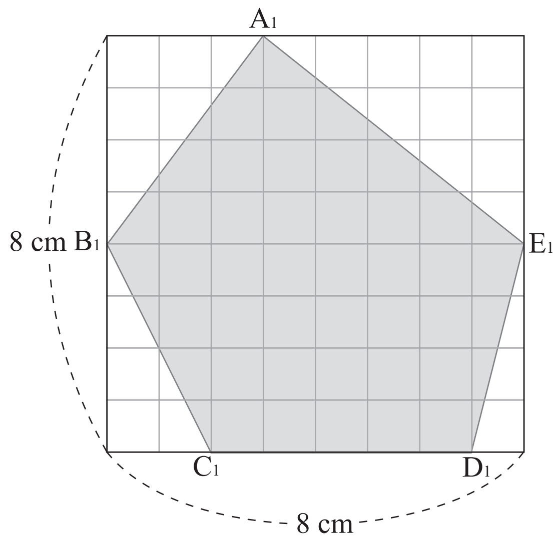




C Dos o más figuras son **semejantes** si tienen la misma forma sin importar los tamaños entre ellos. Para indicar semejanza se utiliza el símbolo "$\sim$". Por ejemplo: el cuadrilátero ABCD $\sim$ el cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$, y se lee "el cuadrilátero ABCD es semejante al cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$. Así mismo, el cuadrilátero ABCD $\sim$ el cuadrilátero $A_2B_2C_2D_2$, y se lee "el cuadrilátero ABCD es semejante al cuadrilátero $A_2B_2C_2D_2$".

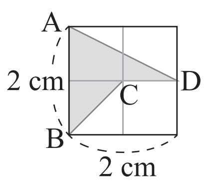
a. Dadas las siguientes figuras, responda:





¿Son semejantes?
Explique por qué son semejantes.

b. Amplíe al doble el cuadrilátero ABCD que está abajo.

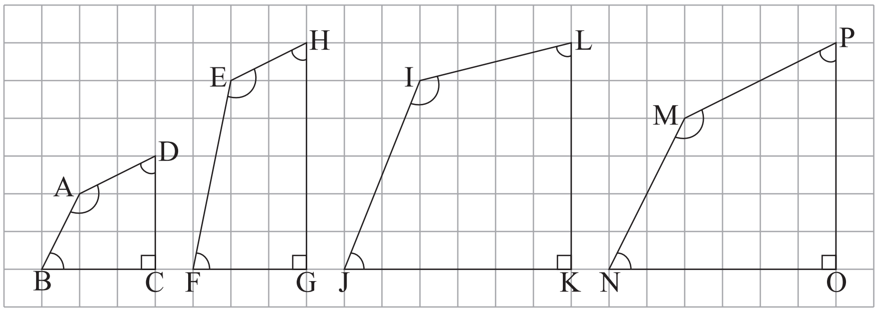


Unidad 5 Geometría

Clase 2 Características de figuras semejantes (1)

P

a. En las siguientes figuras, ¿qué cuadrilátero es semejante al cuadrilátero ABCD?

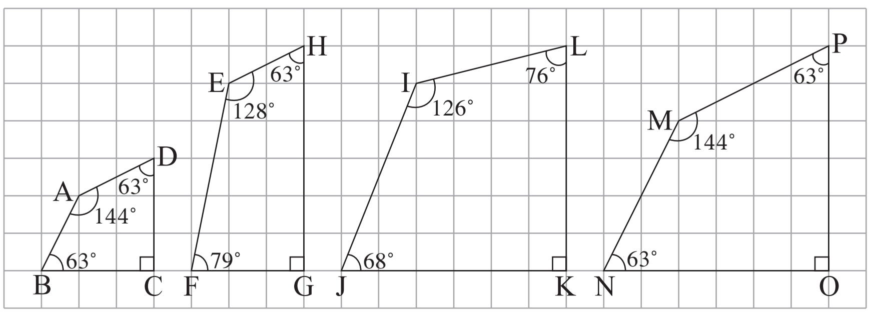


b. Mida los ángulos de los cuadriláteros dados.
c. Compare los ángulos medidos en el inciso b.

S

a. Dos o más figuras son semejantes si son de la misma forma. Por tanto, el cuadrilátero MNOP es semejante al cuadrilátero ABCD.

b.



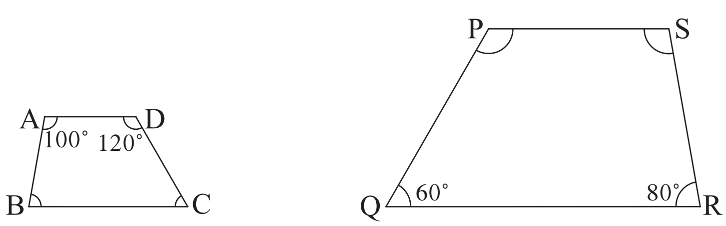
c. Todos los ángulos del cuadrilátero ABCD son congruentes a los ángulos del cuadrilátero MNOP. Sin embargo, los ángulos del cuadrilátero EFGH y del cuadrilátero IJKL no son congruentes.

C

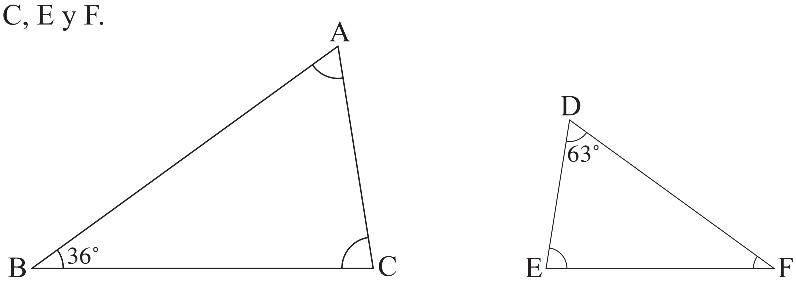
En dos o más polígonos semejantes, las medidas de sus ángulos correspondientes son congruentes.

E

a. El cuadrilátero ABCD y el cuadrilátero SRQP son semejantes. Encuentre las medidas de sus ángulos B, C, P y S.

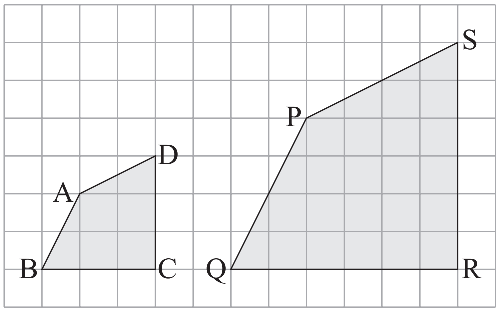


b. El triángulo ABC y el triángulo DFE son semejantes. Encuentre las medidas de sus ángulos A, C, E y F.



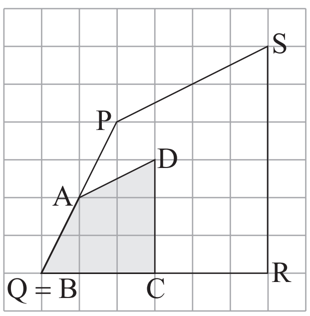
Clase 3 Características de figuras semejantes (2)

P Los cuadriláteros ABCD y PQRS son semejantes. ¿Cuál es la relación entre las razones de los lados correspondientes de ambos cuadriláteros?



A los lados correspondientes se les llama también lados homólogos.

S Sobreponga los cuadriláteros, haciendo coincidir los vértices B y Q. Comparando los lados correspondientes, se deduce lo siguiente:



$AB : PQ = 1 : 2$ $\quad$ $BC : QR = 1 : 2$

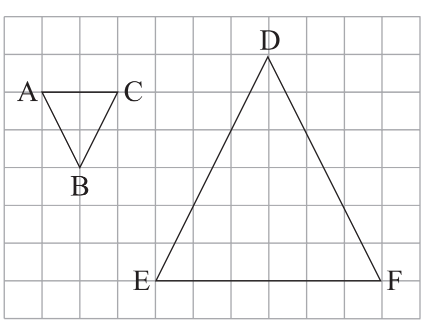
$CD : RS = 1 : 2$ $\quad$ $DA : SP = 1 : 2$

Entonces,
$AB : PQ = BC : QR = CD : RS = DA : SP = 1 : 2$

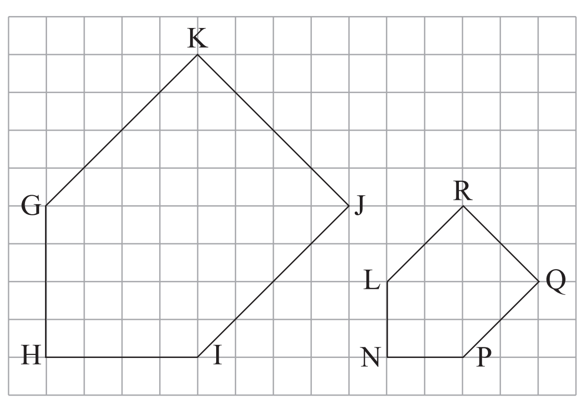
C En dos polígonos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales y a la razón entre ellos se le llama **razón de semejanza**.

E En las siguientes figuras, identifique los lados correspondientes y calcule la razón de semejanza en cada pareja.

a.

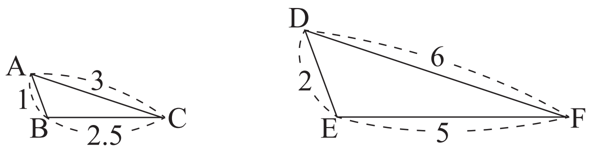


b.



Clase 4 Criterio de semejanza de triángulos: LLL

P ¿El $\triangle$ABC y el $\triangle$DEF son semejantes?



En dos o más polígonos semejantes, las medidas de sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.

S En $\triangle$ABC y $\triangle$DEF,

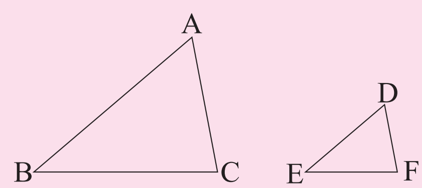
$AB : DE = 1 : 2$	$\measuredangle A = 50°$	$\measuredangle D = 50°$
$BC : EF = 2.5 : 5 = 1 : 2$	$\measuredangle B = 110°$	$\measuredangle E = 110°$
$CA : FD = 3 : 6 = 1 : 2$	$\measuredangle C = 20°$	$\measuredangle F = 20°$

Debido a que las medidas de sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales, los triángulos ABC y DEF son semejantes.

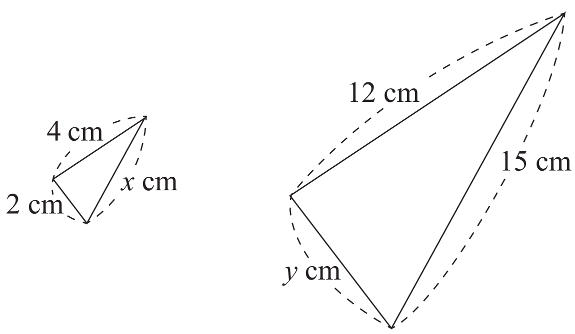
C Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

A esta condición de dos triángulos semejantes se le llama **criterio de semejanza LLL (Lado-Lado-Lado)**.

$AB : DE = BC : EF = CA : FD$



Ejemplo:
¿Cuáles son los valores de "x" y "y" para que los triángulos sean semejantes?



Para que los triángulos sean semejantes es suficiente que sus lados correspondientes sean proporcionales, es decir:

$$2 : y = x : 15 = 4 : 12$$

Si $a : b = c : d$, entonces $ad = bc$.

Se calcula el valor de x:

$$x : 15 = 4 : 12$$
$$12x = 15 \times 4$$
$$12x = 60$$
$$x = 5$$

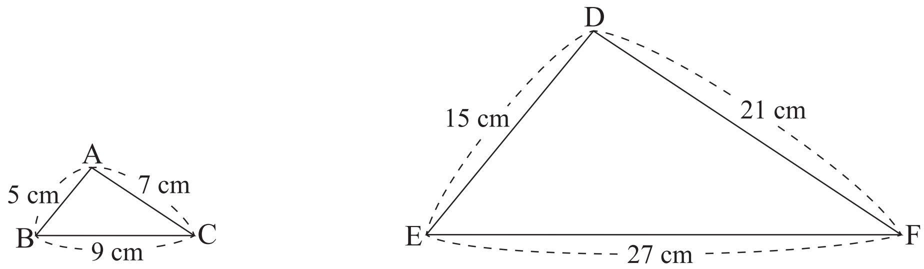
Se calcula el valor de y:

$$2 : y = 4 : 12$$
$$4y = 2 \times 12$$
$$4y = 24$$
$$y = 6$$

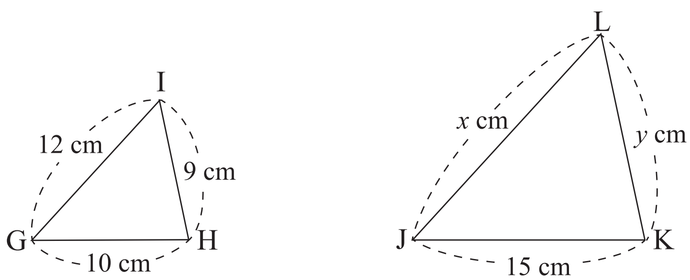
Por tanto, los valores de "x" y "y" son 5 cm y 6 cm respectivamente.

E

a. ¿El $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ son semejantes? Justifique su respuesta.



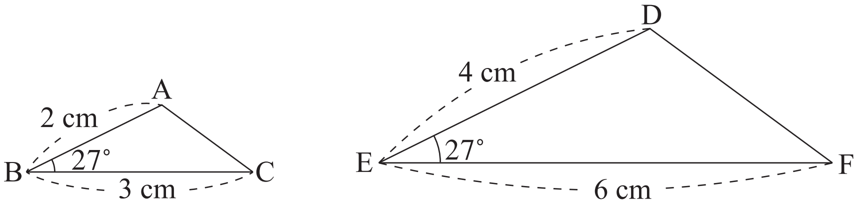
b. ¿Cuáles son los valores de "x" y "y" para que el $\triangle GHI$ y el $\triangle JKL$ sean semejantes?



Unidad 5
Geometría

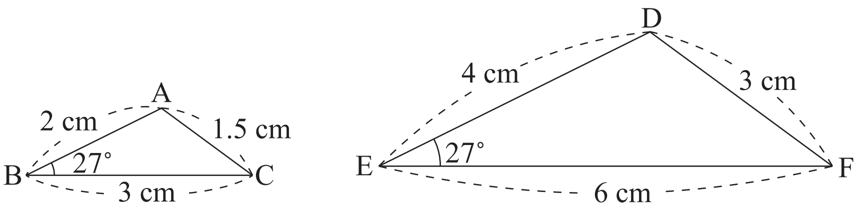
Clase 5 Criterio de semejanza de triángulos: LAL

P ¿El $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ son semejantes?



S La medida del lado CA es 1.5 cm y la medida del lado FD es 3 cm. Entonces, se comprueba que CA es la mitad de FD, es decir, $CA : FD = 1 : 2$

Utilice regla para medir CA y FD.



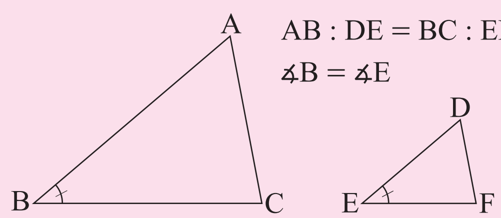
Por tanto, los triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales y por el criterio de semejanza LLL:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

C Si dos triángulos tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes. A esta condición de dos triángulos semejantes se le llama **criterio de semejanza LAL (Lado-Ángulo-Lado)**.

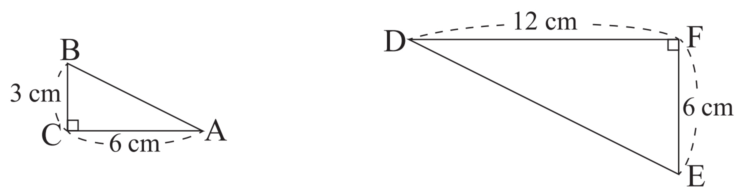
$AB : DE = BC : EF$

$\measuredangle B = \measuredangle E$

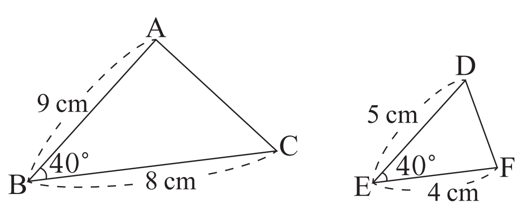


E 1. Determine si los siguientes triángulos son semejantes, utilizando el criterio LAL:

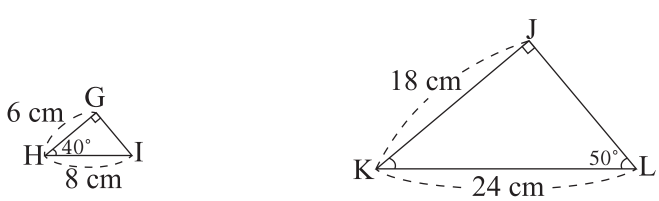
a.



b.



2. ¿Es semejante el $\triangle GHI$ con el $\triangle JKL$? Justifique su respuesta.

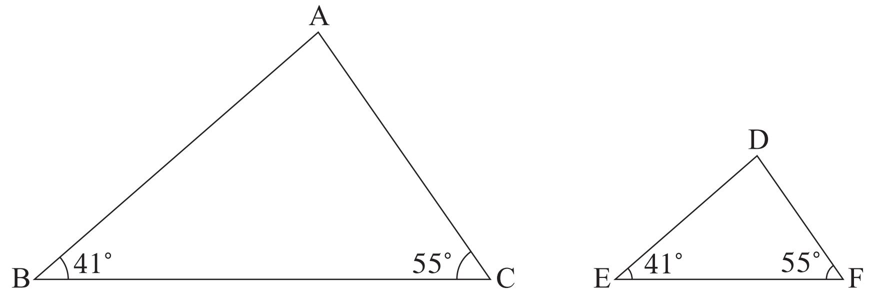


Unidad 5 Geometría

Sección 4 Semejantes

Clase 6 Criterio de semejanza de triángulos: AA

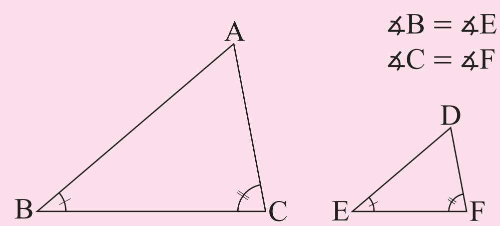
P ¿El $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ son semejantes?



S En $\triangle ABC$, la medida del lado AB es 5 cm y la medida del lado BC es 6 cm.
En $\triangle DEF$, la medida del lado DE es 2.5 cm y la medida del lado EF es 3 cm.
En $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$,
$AB : DE = 5 : 2.5 = 2 : 1$, $BC : EF = 6 : 3 = 2 : 1$
Entonces, $AB : DE = BC : EF$ y $\measuredangle B = \measuredangle E$ por hipótesis.

Por tanto, el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ tienen un ángulo correspondiente congruente y sus lados adyacentes a este son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

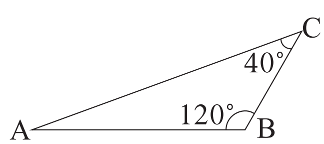
C Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, entonces los triángulos son semejantes. A esta condición de dos triángulos semejantes se le llama **criterio de semejanza AA (Ángulo-Ángulo)**.

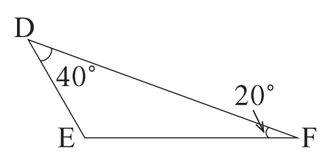


E

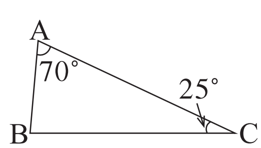
1. Determine si son semejantes los siguientes triángulos utilizando el criterio de semejanza AA. Justifique su respuesta.

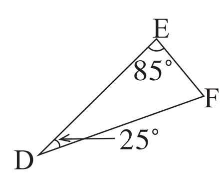
a.



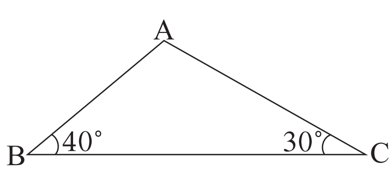


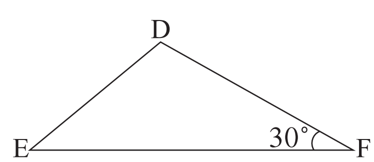
b.





2. ¿Cuál debe ser el valor del $\measuredangle D$ para que los triángulos ABC y DEF sean semejantes?

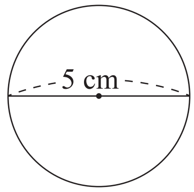




Sección 5 Círculo y circunferencia

Clase 1 Perímetro de circunferencias

P1 ¿Cuál es el perímetro de la circunferencia cuyo diámetro es 5 cm?



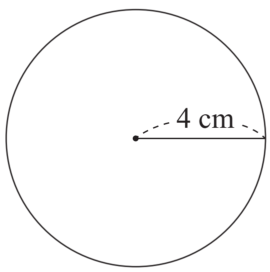
S1 Para encontrar el perímetro de la circunferencia, se multiplica Pi (π) por el valor del diámetro de la circunferencia:

$$\begin{aligned}\text{(Perímetro de la circunferencia)} &= \pi \times \text{(diámetro)}\\ &= \pi \times 5\\ &= 5\pi\end{aligned}$$

El perímetro de la circunferencia es 5π cm.

Pi (π) es un número irracional y su valor aproximado es 3.14. A partir de ahora, en los cálculos en los que aparece π no se sustituirá por su valor aproximado.

P2 ¿Cuál es el perímetro de la circunferencia cuyo radio es 4 cm?



Diámetro $= 2 \times$ radio

S2

$$\begin{aligned}\text{(Perímetro de la circunferencia)} &= \pi \times 2 \times \text{(radio)}\\ &= \pi \times 2 \times 4\\ &= 8\pi\end{aligned}$$

El perímetro de la circunferencia es 8π cm.

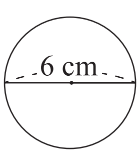
C El perímetro de una circunferencia se calcula como π por diámetro:

$$P = \pi d \text{ o } P = 2\pi r$$

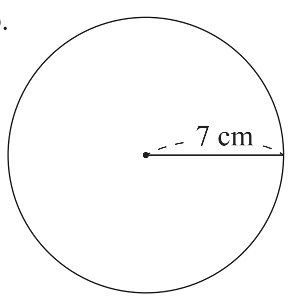
donde P es el perímetro de la circunferencia, d es el diámetro y r es el radio de la circunferencia.

E Encuentre el perímetro de cada circunferencia.

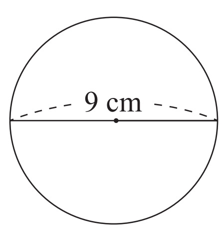
a.



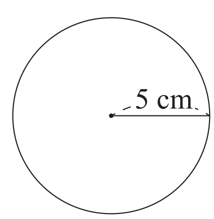
b.



c.

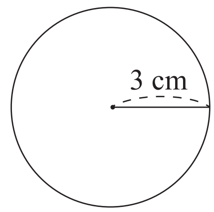


d.



Sección 5 Círculo y circunferencia
Clase 2 Área de círculos

P1 ¿Cuál es el área del círculo cuyo radio es de 3 cm?



S1 (Área del círculo) $= \pi \times (\text{radio})^2$

$= \pi \times 3^2$

$= \pi \times 9$

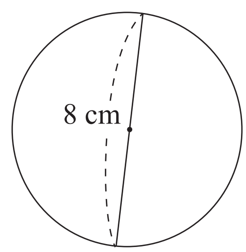
$= 9\pi$

El área del círculo es 9π cm^2.

Área del círculo $= \pi \times$ radio $\times$ radio

$= \pi \times$ radio^2

P2 ¿Cuál es el área del círculo cuyo diámetro es de 8 cm?



S2 (Área del círculo) $= \pi \times \left(\dfrac{\text{diámetro}}{2}\right)^2$

$= \pi \times \left(\dfrac{8}{2}\right)^2$

$= \pi \times 4^2$

$= \pi \times 16$

$= 16\pi$

El área del círculo es 16π cm^2.

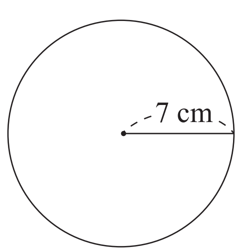
C El área de un círculo puede calcularse aplicando la siguiente fórmula:

$$A = \pi r^2 \text{ o } A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

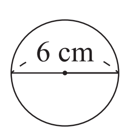
donde A es el área del círculo, r es el radio y d es el diámetro de la circunferencia.

E Encuentre el área de cada círculo.

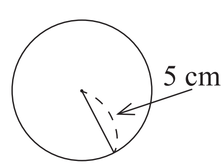
a.



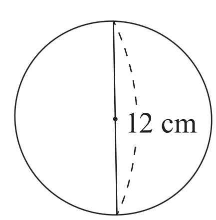
b.



c.



d.

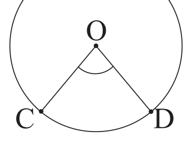


Sección 6 Ángulos notables en la circunferencia

Clase 1 Ángulo central y ángulo inscrito de circunferencias

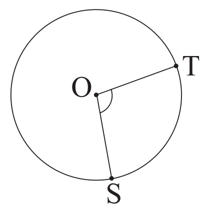
P Mida el ángulo de las figuras utilizando el transportador.

a.



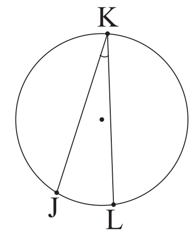
$\measuredangle$COD = ☐

b.



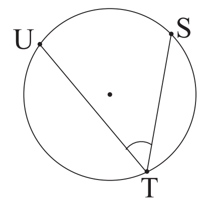
$\measuredangle$SOT = ☐

c.



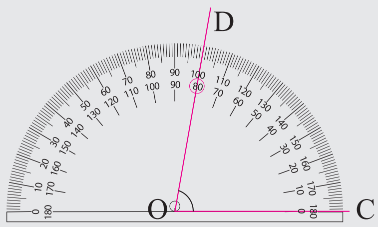
$\measuredangle$JKL = ☐

d.



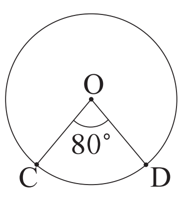
$\measuredangle$UTS = ☐

S Con el transportador se miden los ángulos de cada una de las figuras.



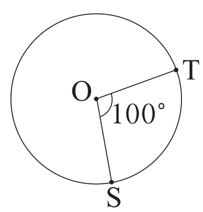
Cuando use el transportador, extienda los rayos si es necesario.

a.



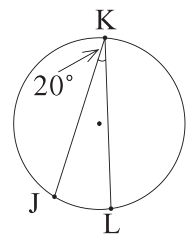
$\measuredangle$COD = $\boxed{80°}$

b.



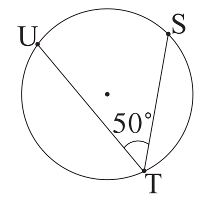
$\measuredangle$SOT = $\boxed{100°}$

c.



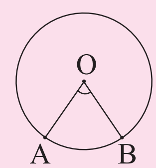
$\measuredangle$JKL = $\boxed{20°}$

d.

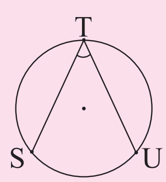


$\measuredangle$UTS = $\boxed{50°}$

C Al $\measuredangle$AOB que se muestra en la figura que está a la derecha se le llama **ángulo central** subtendido por el arco AB.

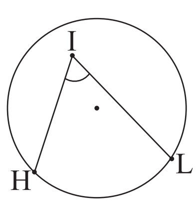


Al $\measuredangle$STU que se muestra en la figura que está a la derecha se le llama **ángulo inscrito** subtendido por el arco SU.

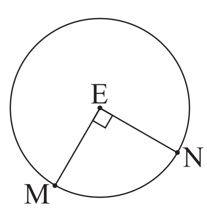


E ¿Cuál es el ángulo central y el ángulo inscrito entre las siguientes circunferencias?

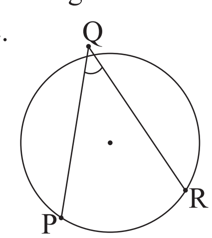
a.



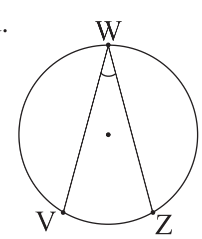
b.



c.



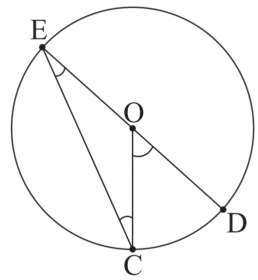
d.



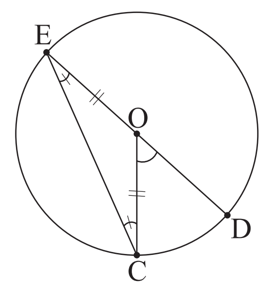
Sección 6 Ángulos notables en la circunferencia

Clase 2 Propiedad del ángulo inscrito de circunferencias (1)

P Demuestre que $\measuredangle DOC = 2\measuredangle DEC$, cuando el centro de la circunferencia está en algún lado del $\measuredangle DEC$.



S En el $\triangle OEC$, $OE = OC$ porque ambos lados son radios de la circunferencia.

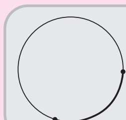


Entonces, $\measuredangle OEC = \measuredangle OCE$ porque los ángulos de la base de los triángulos isósceles tienen la misma medida.

Por otra parte, $\measuredangle DOC = \measuredangle OEC + \measuredangle OCE$ porque el $\measuredangle DOC$ es un ángulo exterior del $\triangle OEC$.

Por tanto, $\measuredangle DOC = 2\measuredangle OEC$.
Como $\measuredangle OEC = \measuredangle DEC$, entonces $\measuredangle DOC = 2\measuredangle DEC$.

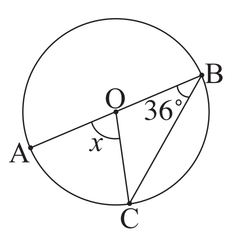
C Cuando un lado del ángulo inscrito coincide con el diámetro de la circunferencia, la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco es el doble de la medida del ángulo inscrito.



A la parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella se le llama arco.

Ejemplo:

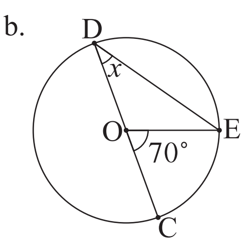
a.



$\measuredangle AOC = 2\measuredangle ABC$,
entonces,
$\measuredangle AOC = 2 \times 36°$
$= 72°$

Por tanto, $\measuredangle x = 72°$.

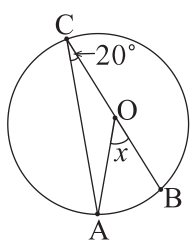
b.



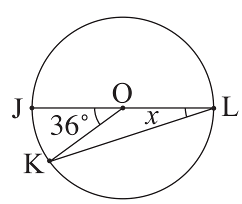
$\measuredangle COE = 2\measuredangle CDE$,
entonces,
$\measuredangle CDE = \frac{1}{2}\measuredangle COE$
$= \frac{70°}{2}$
$= 35°$
Por tanto, $\measuredangle x = 35°$.

E Encuentre la medida de x para los siguientes casos.

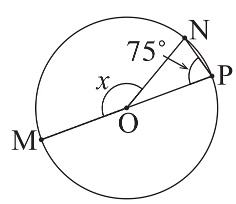
a.



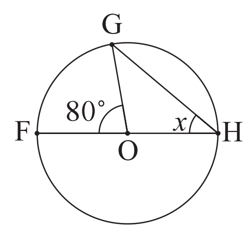
b.



c.

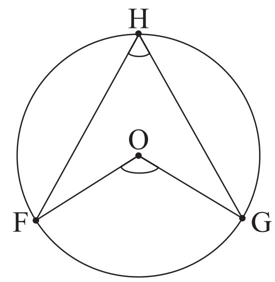


d.



Clase 3 Propiedad del ángulo inscrito de circunferencias (2)

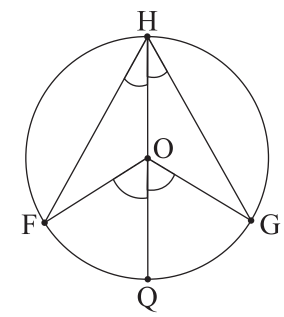
P Demuestre que $\measuredangle GOF = 2\measuredangle GHF$ cuando el centro de la circunferencia está dentro del $\measuredangle GHF$.



S Se traza el diámetro QH que pasa por el centro O.
$\measuredangle QOF = 2\measuredangle QHF$ y $\measuredangle GOQ = 2\measuredangle GHQ$

Se suman ambas igualdades: $\measuredangle QOF + \measuredangle GOQ = 2\measuredangle QHF + 2\measuredangle GHQ$
$= 2(\measuredangle QHF + \measuredangle GHQ)$

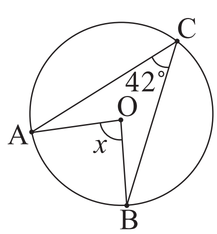
Por tanto, $\measuredangle GOF = 2\measuredangle GHF$.



C Cuando un ángulo central está en el interior de un ángulo inscrito subtendidos por el mismo arco, la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Ejemplo:

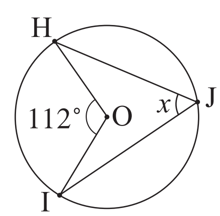
a.



$\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB$,
entonces,
$\measuredangle AOB = 2 \times 42°$
$= 84°$

Por tanto, $\measuredangle x = 84°$.

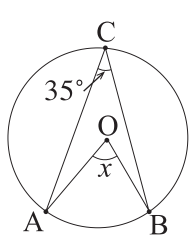
b.



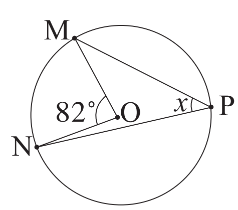
$\measuredangle IOH = 2\measuredangle IJH$,
entonces,
$\measuredangle IJH = \frac{1}{2}\measuredangle IOH$
$= \frac{112°}{2}$
$= 56°$
Por tanto, $\measuredangle x = 56°$.

E Encuentre la medida de x para los siguientes casos.

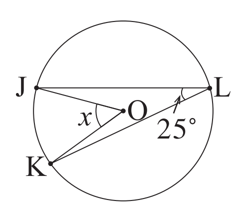
a.



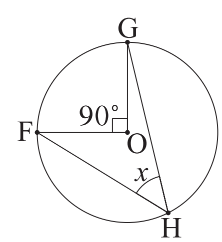
b.



c.



d.



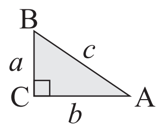
Sección 7 Teorema de Pitágoras

Clase 1 Demostración del teorema de Pitágoras

P

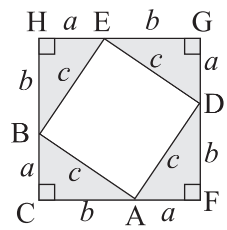
Dado el $\triangle ABC$ Figura 1, tal que $CA = b$, $AB = c$, $BC = a$ y $\measuredangle C = 90°$, como se muestra en la figura, verifique la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$ utilizando la Figura 2.

Figura 1



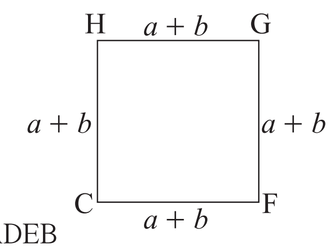
El cuadrado HCFG consiste en cuatro triángulos ABC y un cuadrado ADEB cuyo lado es la hipotenusa del $\triangle ABC$.

Figura 2



S

Se representa el área del cuadrado CFGH de dos formas:



Forma 1.

Área del cuadrado CFGH $= (a + b)^2$

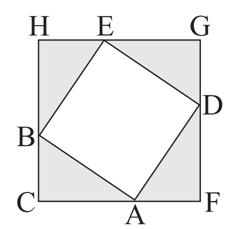
$= a^2 + 2ab + b^2$

Forma 2.

Área del cuadrado CFGH $= 4 \times$ área del $\triangle ABC +$ área del cuadrado ADEB

$= 4 \times \frac{ab}{2} + c^2$

$= 2ab + c^2$



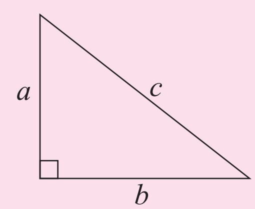
Ambas representan el área del cuadrado CFGH.

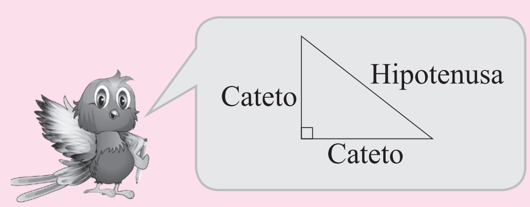
$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

C

Un triángulo rectángulo cumple que la suma de los cuadrados de las longitudes sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa. Si las longitudes de sus catetos son a y b y su hipotenusa es c, entonces $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$. A esta igualdad se le llama **teorema de Pitágoras**.

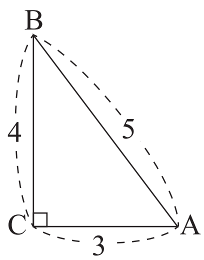




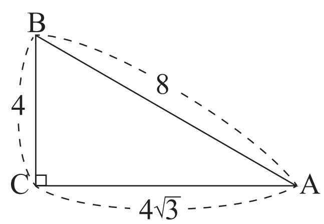
E

Verifique el teorema de Pitágoras en los siguientes triángulos rectángulos.

a.



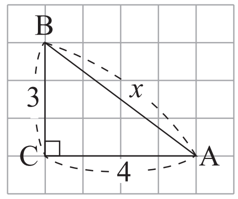
b.

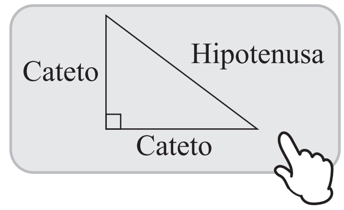


Unidad 5 Geometría

Clase 2 Cálculo de la longitud de hipotenusa

P Encuentre el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo utilizando el teorema de Pitágoras.





S Debido a que el $\triangle$ABC es un triángulo rectángulo:

$3^2 + 4^2 = x^2$ Se sustituyen los valores conocidos en el teorema de Pitágoras.

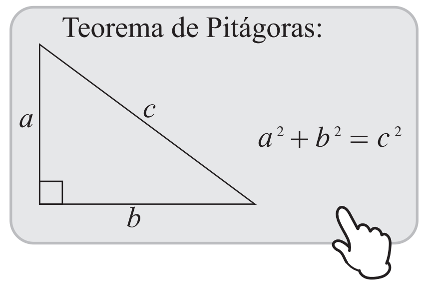
$9 + 16 = x^2$

$25 = x^2$

$\sqrt{25} = x$ Se resuelve para x, teniendo en cuenta que $x > 0$.

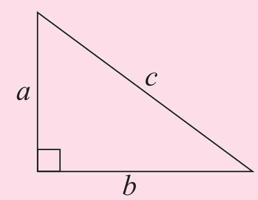
$x = 5$

Respuesta: el valor de x es 5.



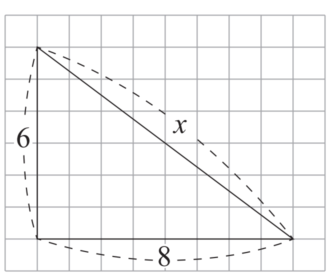
C Si se conoce la longitud de los dos catetos de un triángulo rectángulo, se puede usar el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de la hipotenusa.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

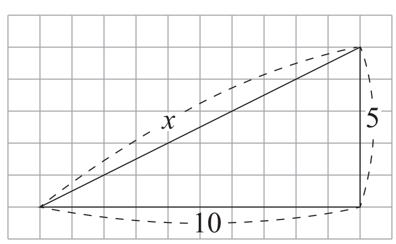


E Encuentre el valor de x.

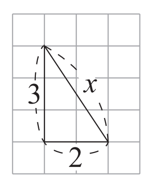
a.



b.



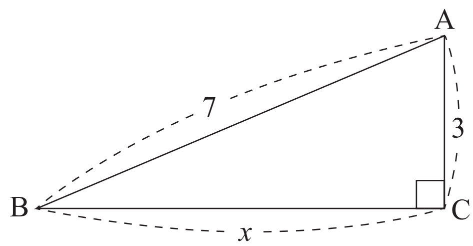
c.



Unidad 5 Geometría

Sección 7 Teorema de Pitágoras
Clase 3 Cálculo de la longitud de catetos

P En el siguiente triángulo rectángulo ABC, encuentre la medida del cateto BC, es decir, el valor de x.



S Debido a que el △ABC es un triángulo rectángulo:

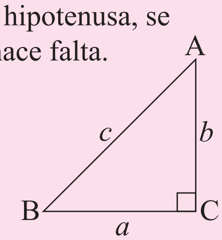
$3^2 + x^2 = 7^2$	Se sustituyen los valores conocidos en el teorema de Pitágoras.
$9 + x^2 = 49$	
$x^2 = 49 - 9$	
$x^2 = 40$	Se resuelve la ecuación para x^2.
$x = \sqrt{40}$	Se resuelve para x, teniendo en cuenta que $x > 0$.
$= \sqrt{2^2 \times 10}$	Se simplifica el valor de la raíz cuadrada.
$= 2\sqrt{10}$	

Respuesta: la medida del cateto BC es $2\sqrt{10}$.

C Si se conoce la longitud de uno de los catetos de un triángulo rectángulo y su hipotenusa, se puede usar el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del cateto que hace falta.

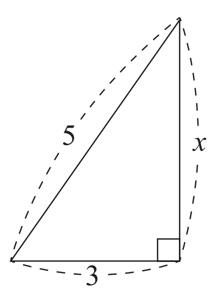
$a^2 + b^2 = c^2$ Despejando para el cateto a: $a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Despejando para el cateto b: $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$

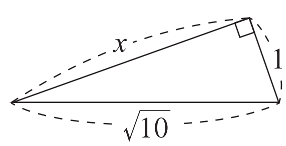


E Encuentre el valor de x.

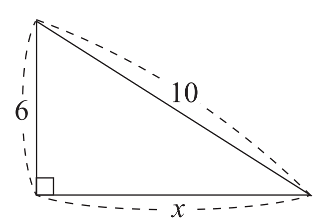
a.



b.



c.

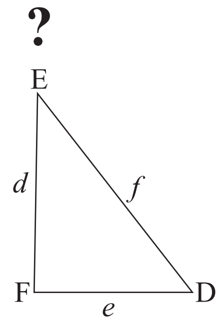


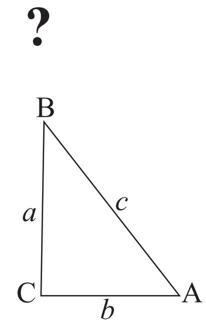
Clase 4 Recíproco del teorema de Pitágoras

Determine si los siguientes triángulos son rectángulos.

a. El $\triangle$DEF, cuyos lados son:
$d = 5$
$e = 4$
$f = 6$

b. El $\triangle$ABC, cuyos lados son:
$a = 4$
$b = 3$
$c = 5$





Aplique el teorema de Pitágoras para determinar si los triángulos son rectángulos.

a. $d^2 + e^2 = 5^2 + 4^2$
$= 25 + 16$
$= 41$ ① Se encuentra la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos del triángulo.
$f^2 = 6^2 = 36$ ② Se encuentra el cuadrado del lado más largo del triángulo.

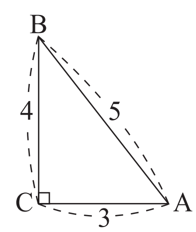
$d^2 + e^2 \neq f^2$ Por ① y ②.

Por tanto, el $\triangle$DEF no es un triángulo rectángulo.

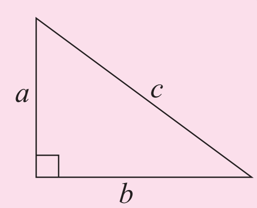
b. $a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2$
$= 16 + 9$
$= 25$ ① Se encuentra la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos del triángulo.
$c^2 = 5^2 = 25$ ② Se encuentra el cuadrado del lado más largo del triángulo.

$a^2 + b^2 = c^2$ Por ① y ②.

Por tanto, el $\triangle$ABC es un triángulo rectángulo donde $\measuredangle$C es el ángulo recto.



Si los lados a, b y c de un triángulo cumplen con la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo, en donde c es la hipotenusa del triángulo. A esto se le conoce como **recíproco del teorema de Pitágoras**.



Verifique cuáles de los siguientes triángulos son rectángulos, usando el teorema de Pitágoras.

a. AB = 13, BC = 12, AC = 5
b. AB = 8, BC = 7, AC = 6
c. AB = 17, BC = 15, AC = 8
d. AB = 9, BC = 8, AC = 7
e. AB = 10, BC = 6, AC = 8

Sección 8 Razones trigonométricas

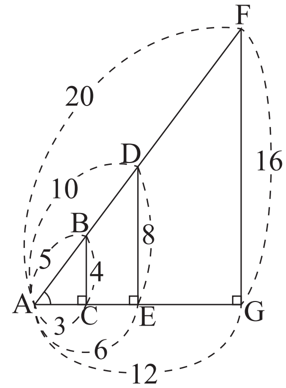
Clase 1 Razones trigonométricas

P Con base en la figura de la derecha, llene los espacios en blanco con la fracción más simplificada.

a. $\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$, $\frac{DE}{AD}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, $\frac{FG}{AF}=\boxed{}$

b. $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$, $\frac{AE}{AD}=\boxed{}$, $\frac{AG}{AF}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

c. $\frac{BC}{AC}=\frac{4}{3}$, $\frac{DE}{AE}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$, $\frac{FG}{AG}=\boxed{}$



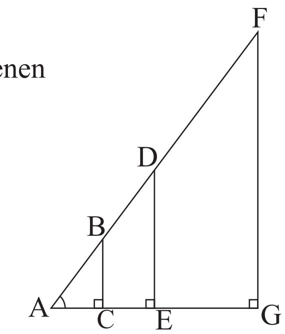
S a. $\frac{FG}{AF}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$ b. $\frac{AE}{AD}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ c. $\frac{FG}{AG}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$

Los tres triángulos rectángulos ABC, ADE, AFG son semejantes y tienen las mismas razones correspondientes de sus lados.

a. Las razones $\frac{BC}{AB}$, $\frac{DE}{AD}$ y $\frac{FG}{AF}$ son iguales.

b. Las razones $\frac{AC}{AB}$, $\frac{AE}{AD}$ y $\frac{AG}{AF}$ son iguales.

c. Las razones $\frac{BC}{AC}$, $\frac{DE}{AE}$ y $\frac{FG}{AG}$ son iguales.



La razón $a : b$ se expresa también como $\frac{a}{b}$, utilizando el valor de razón.

C En un triángulo rectángulo ABC, las razones de los lados, $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$, $\frac{BC}{AC}$, son determinadas únicamente por la medida del ∡A y se mantienen sus valores sin importar el tamaño de los triángulos rectángulos.

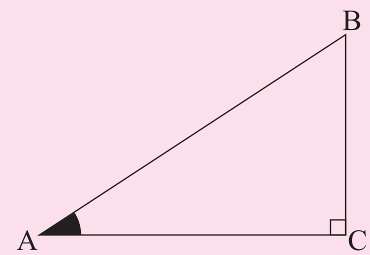
Se denominan estas razones de la siguiente manera:

$\frac{BC}{AB}$ se denomina seno A y se simboliza como **sen *A***,

$\frac{AC}{AB}$ se denomina coseno A y se simboliza como **cos *A***,

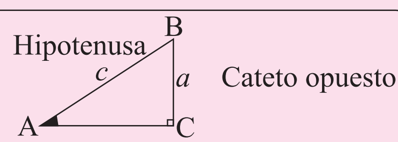
$\frac{BC}{AC}$ se denomina tangente A y se simboliza como **tan *A***,

donde A es la medida del ∡A.

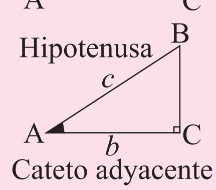


El seno, coseno y tangente se denominan en conjunto **razones trigonométricas**.

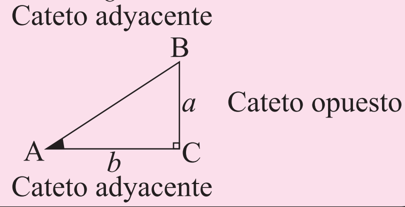
$$\text{sen } A=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{a}{c}$$



$$\cos A=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{b}{c}$$



$$\tan A=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{a}{b}$$

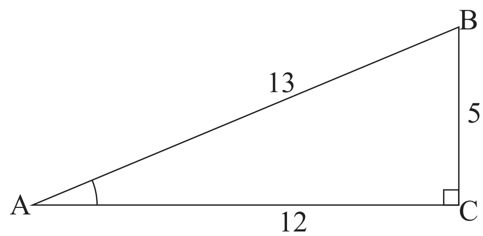


Ejemplo:

$$\text{sen } A = \frac{\text{(cateto opuesto)}}{\text{(hipotenusa)}} = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{\text{(cateto adyacente)}}{\text{(hipotenusa)}} = \frac{12}{13}$$

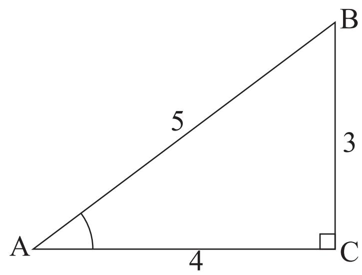
$$\tan A = \frac{\text{(cateto opuesto)}}{\text{(cateto adyacente)}} = \frac{5}{12}$$



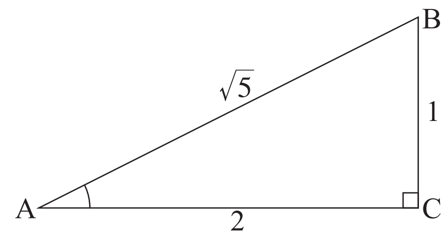
E

Calcule sen A, cos A y tan A de los siguientes triángulos rectángulos.

a.



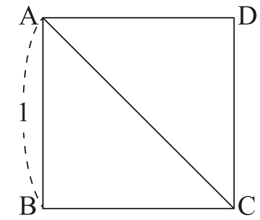
b.



Sección 8 Razones trigonométricas

Clase 2 Triángulos rectángulos especiales

P1 ¿Cuánto mide la diagonal CA del cuadrado ABCD, cuyos lados miden 1?
¿Cuánto miden los ángulos del $\triangle$ABC?



S1 La diagonal CA es la hipotenusa de los triángulos rectángulos ABC y ACD. Se aplica el teorema de Pitágoras a cualquiera de estos triángulos para encontrar la medida de la hipotenusa CA.

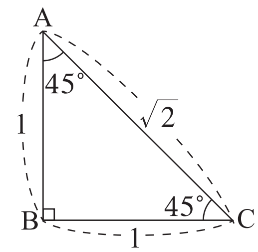
En el $\triangle$ABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2$

Al sustituir AB y BC por 1,

$CA^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

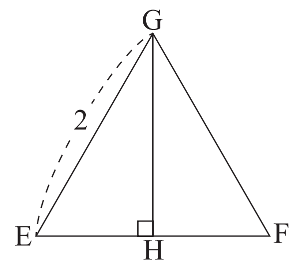
$CA = \sqrt{2}$ (por $CA > 0$)

Por tanto, la diagonal de ABCD es $\sqrt{2}$.



Como la diagonal CA del cuadrado ABCD es bisectriz del ∡DAB y el ∡BCD, entonces el ∡CAB y el ∡BCA del $\triangle$ABC miden 45°.

P2 ¿Cuánto mide la altura el triángulo equilátero GEF, cuyos lados miden 2?
¿Cuánto miden los ángulos del $\triangle$GEH?



S2 Como $\triangle GEH \equiv \triangle GFH$, EH = FH. Por tanto, EH = 1.

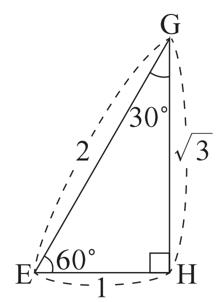
En el $\triangle$GEH: $EH^2 + HG^2 = GE^2$

Al sustituir GE por 2 y EH por 1,

$HG^2 = GE^2 - EH^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

$HG = \sqrt{3}$ (por $HG > 0$)

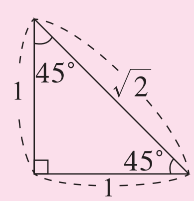
Por tanto, la altura de $\triangle$GEH es $\sqrt{3}$.



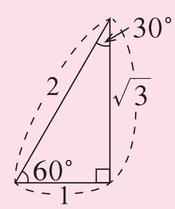
El ∡GEH = 60° debido a que el $\triangle$GEH es equilátero, mientras que el ∡HGE = 30° debido a que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

C En los triángulos rectángulos especiales, se encuentran las siguientes relaciones entre sus lados y sus ángulos por el teorema de Pitágoras.

1. La razón de los lados de un triángulo con ángulos de 90°, 45° y 45° es $1:1:\sqrt{2}$.

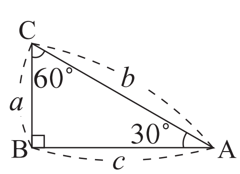


2. La razón de los lados de un triángulo con ángulos de 30°, 60° y 90° es $1:2:\sqrt{3}$.

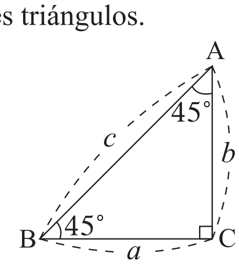


E Encuentre $a : b : c$ de los siguientes triángulos.

a.

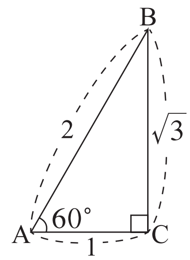


b.



Clase 3 Razones trigonométricas para ángulos especiales

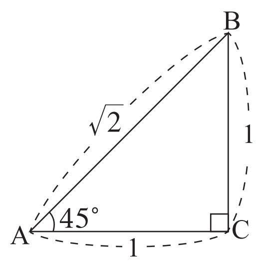
P1 Calcule sen 60°, cos 60° y tan 60°.



S1 $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

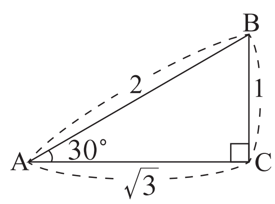
$\text{sen } A = \frac{BC}{AB}$, $\cos A = \frac{AC}{AB}$, $\tan A = \frac{BC}{AC}$

P2 Calcule sen 45°, cos 45° y tan 45°.



S2 $\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$

P3 Calcule sen 30°, cos 30° y tan 30°.



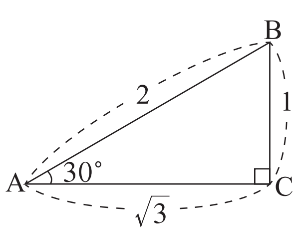
S3 $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

C

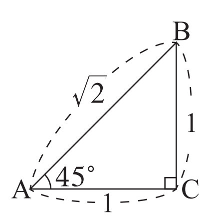
A	30°	45°	60°
sen A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

E Calcule sen A, cos A y tan A de los siguientes triángulos rectángulos.

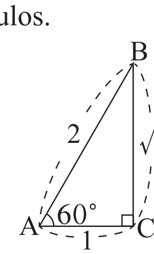
a.



b.



c.



Unidad 5
Geometría

Clase 4 Cálculo de medidas de razones trigonométricas por calculadora

P1 Calcule sen 35°, utilizando calculadora.

S1

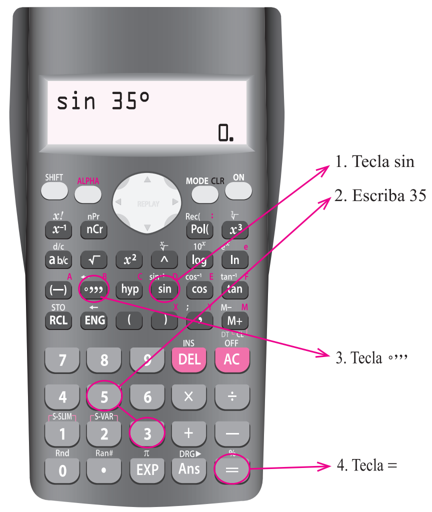
Paso 1. Oprima la tecla “sin (seno)”.

Paso 2. Escriba “35”.

Paso 3. Oprima la tecla“ ∘ ,,, ”.

Paso 4. Oprima la tecla “=”.

$$\text{sen } 35^\circ = 0.573576436$$



P2 Calcule la medida de un ángulo agudo A cuyo valor de sen A es 0.3420, utilizando calculadora.

S2

Paso 1. Oprima la tecla “Shift”.

Paso 2. Oprima la tecla “sin (seno)”.
Se activa la función inversa que en pantalla se muestra como $\sin^{-1}$.

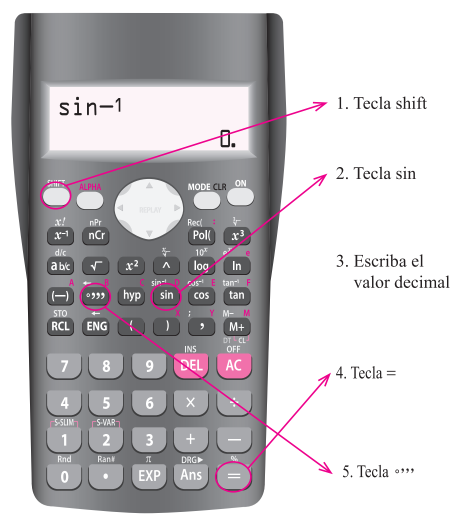
Paso 3. Escriba el valor decimal de “0.3420”.

Paso 4. Oprima la tecla “=”.

Paso 5. Oprima la tecla“ ∘ ,,, ”.

$$0.3420 = 19.99877181$$

$$\measuredangle A = 19.99877181$$



E

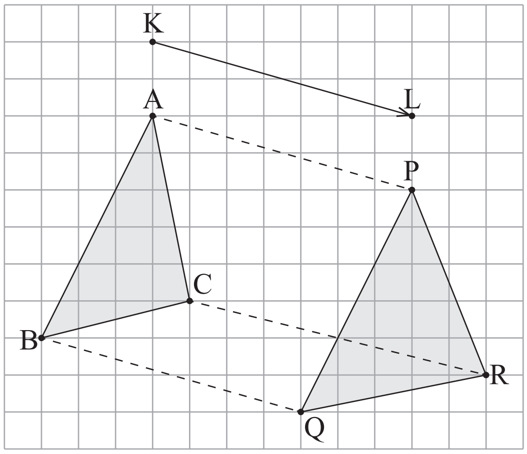
1. Calcule sen A, cos A y tan A utilizando calculadora.
   a. $\measuredangle A = 12^\circ$
   b. $\measuredangle A = 35^\circ$
   c. $\measuredangle A = 70^\circ$

2. Calcule la medida del ángulo agudo A, utilizando calculadora.
   a. sen $A = 0.6428$
   b. cos $A = 0.9563$
   c. tan $A = 1.4281$

Sección 9 Transformaciones

Clase 1 Traslación de figuras geométricas

P El △PQR es trasladado desde el △ABC en la dirección y longitud que marca la flecha KL.



¿Qué relación existe entre los segmentos AP, BQ y CR?

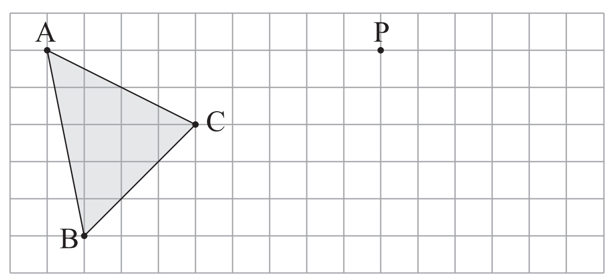
S Los segmentos AP, BQ y CR tienen la misma longitud que la flecha KL y son paralelos entre sí. Los puntos que forman los segmentos son correspondientes.

C Al proceso de mover cada punto de una figura de acuerdo a una misma regla dada sin cambiar su tamaño, se le llama **transformación**. Cada punto de la nueva figura corresponde exactamente a un punto de la figura original.

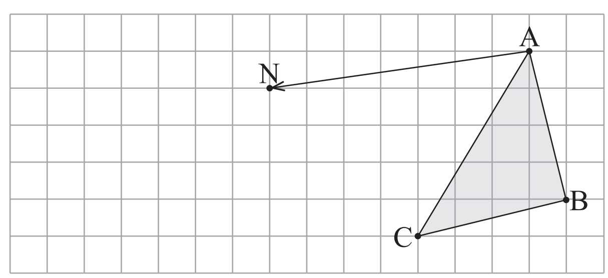
A la transformación que consiste en deslizar una figura tal que cada punto es movido la misma distancia en la misma dirección se le llama **traslación**. Los segmentos que conectan pares correspondientes de puntos en una figura trasladada tienen una longitud igual y son paralelos entre sí.

E

a. Construya el △PQR que es trasladado del △ABC donde el punto A se mueve al punto P.



b. Construya el △NOP que es trasladado del △ABC en la dirección de la flecha AN.



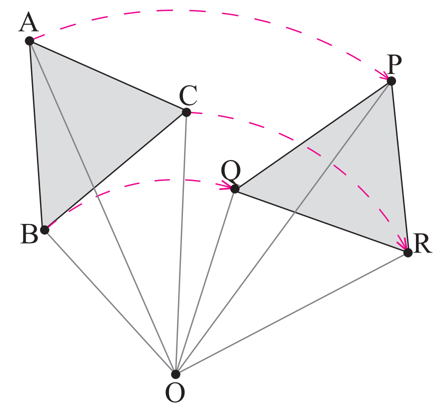
Unidad 5 Geometría

Sección 9 Transformaciones

Clase 2 Rotación de figuras geométricas

P

El $\triangle PQR$ es rotado 60° desde el $\triangle ABC$ a favor de las agujas del reloj alrededor del punto O.



a. Utilice una regla para medir los segmentos OP y OA, OR y OC, OQ y OB e indique qué relación hay entre cada pareja.

b. Utilice un trasportador para encontrar $\measuredangle POA$, $\measuredangle ROC$ y $\measuredangle QOB$ e indique qué relación existe entre ellos.

S

a. Los segmentos OP y OA tienen la misma medida.
Los segmentos OR y OC tienen la misma medida.
Los segmentos OQ y OB tienen la misma medida.

b. $\measuredangle POA = 60^\circ$, $\measuredangle ROC = 60^\circ$ y $\measuredangle QOB = 60^\circ$. Son iguales a la medida de rotación de la figura.

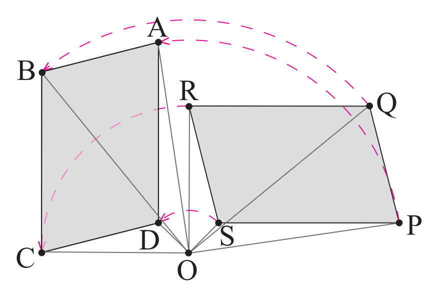
C

A la transformación de una figura a lo largo de un plano con cierto ángulo alrededor de un punto O se le llama **rotación**. Al ángulo girado entre cada pareja se le llama **ángulo de rotación** y al punto O **centro de rotación**.

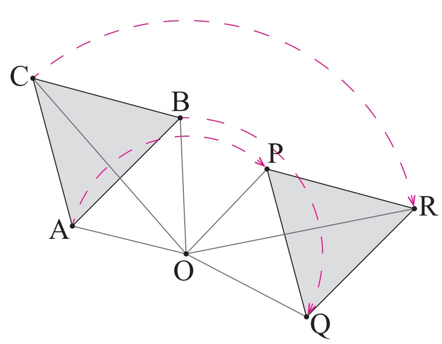
La longitud desde el centro de rotación a cada par de puntos correspondientes tiene la misma medida.

E

a. ¿A cuántos grados está rotado el paralelogramo PQRS hasta el paralelogramo ABCD con respecto al punto O? Tome en cuenta que la rotación es en contra de las agujas del reloj.



b. ¿A cuántos grados está rotado el $\triangle ABC$ hasta el $\triangle PQR$ con respecto al punto O? Tome en cuenta que la rotación es a favor de las agujas del reloj.



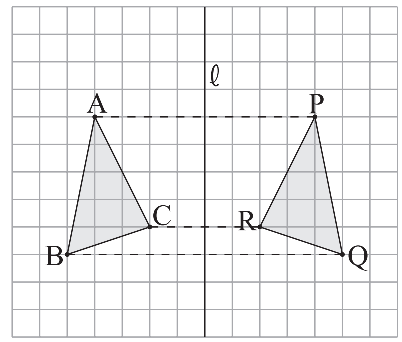
Unidad 5
Geometría

Clase 3 Reflexión de figuras geométricas

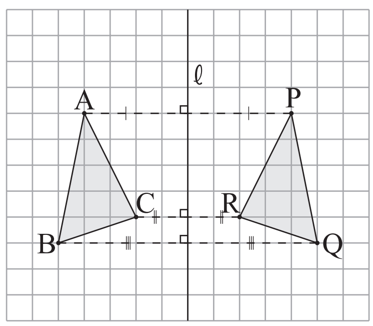
P

En la figura que está a la derecha, el $\triangle PQR$ es reflejado del $\triangle ABC$ a través de la línea ℓ.

¿Qué relación hay entre los segmentos AP, BQ y CR que unen los puntos correspondientes y atraviesan la línea ℓ?



S



Los segmentos AP, BQ Y CR intersecan perpendicularmente a la línea central ℓ.

Los puntos A y P son correspondientes, y la distancia del punto A a la línea central ℓ es igual a la distancia del punto P a la línea central ℓ.

Los puntos C y R son correspondientes, y la distancia del punto C a la línea central ℓ es igual a la distancia del punto R a la línea central ℓ.

Los puntos B y Q son correspondientes, y la distancia del punto B a la línea central ℓ es igual a la distancia del punto Q a la línea central ℓ.

C

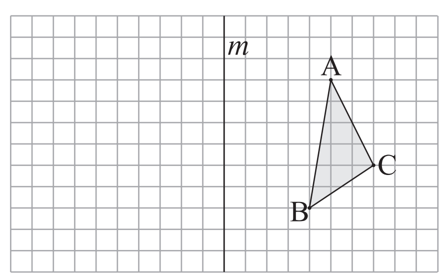
A la transformación de una figura al ser volteada a través de una recta central al otro lado se le llama **reflexión**. A la línea central se le llama **eje de reflexión**.

Una figura reflejada es simétrica con el eje de reflexión.

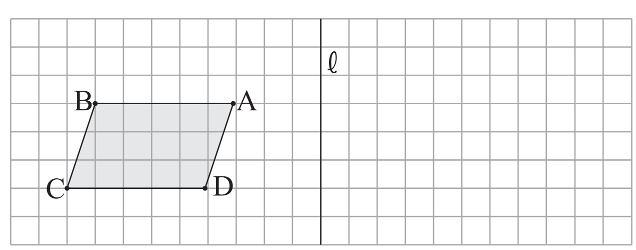
Los segmentos que conectan los puntos correspondientes intersecan el eje de reflexión perpendicularmente al punto que los divide en mitades.

E

a. Construya el $\triangle PQR$ que es reflejado del $\triangle ABC$ a través del eje de reflexión *m*.



b. Construya el paralelogramo PQRS que es reflejado del paralelogramo ABCD a través del eje de reflexión ℓ.



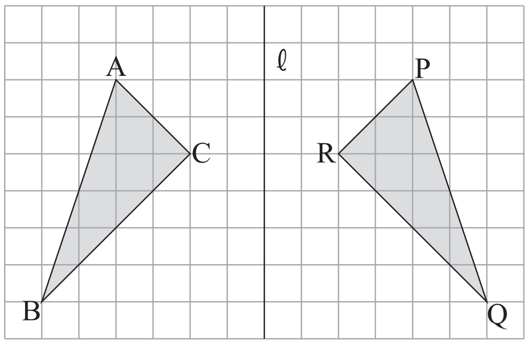
Sección 9 Transformaciones

Clase 4 Ejercicios de transformación de figuras geométricas

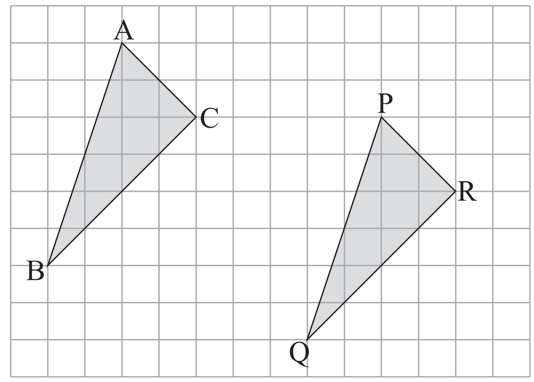
E

1. Escriba el tipo de transformación representada en cada inciso.

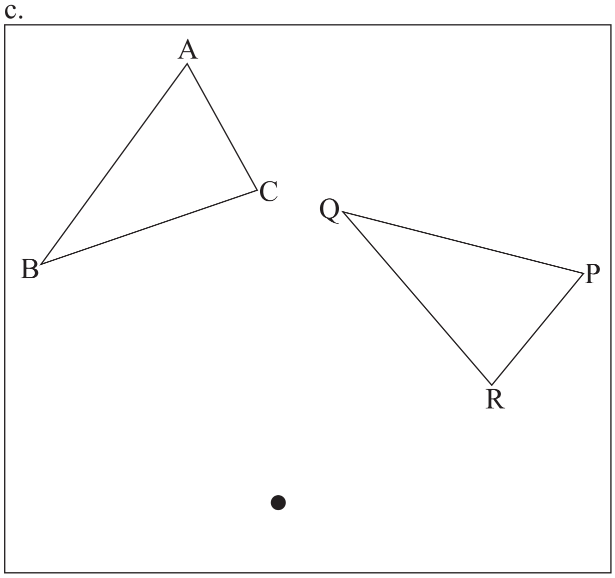
a.



b.

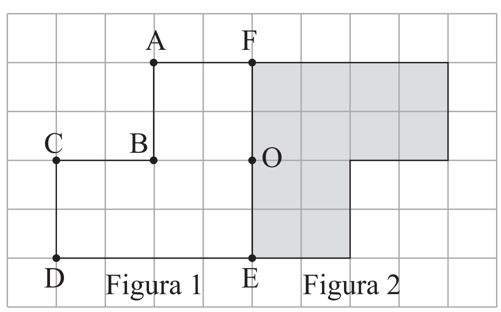


c.



Tipos de transformaciones:
Traslación
Rotación
Reflexión

2. Responda los siguientes incisos de acuerdo a las figuras que están abajo.



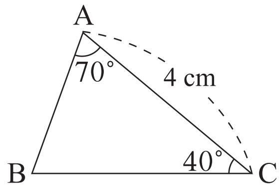
a. Si la figura 2 se ha obtenido de mover la figura 1, coloque los puntos A', C', D' y F' en la figura 2, de tal manera que sean correspondientes con los puntos A, C, D y F de la figura 1.

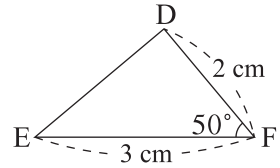
b. ¿Qué tipos de movimiento debe realizar la figura 1 para sobreponerse exactamente a la figura 2?

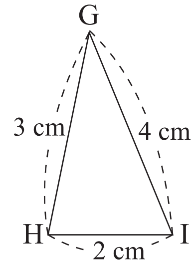
Unidad 5
Geometría

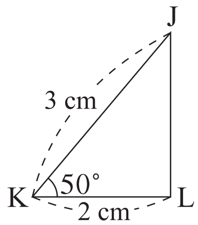
Ejercitación A

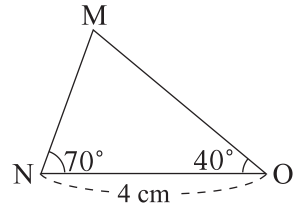
1. Identifique tres parejas de triángulos congruentes representándolas con el símbolo ≡. Indique la condición entre LLL, ALA y LAL por cada congruencia.

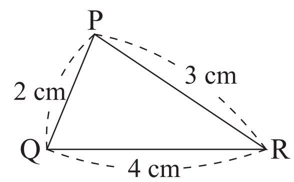
a.


b.


c.


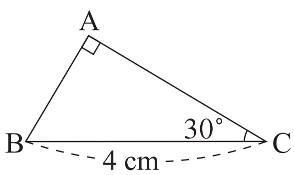
d.


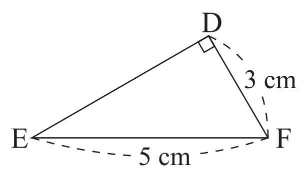
e.


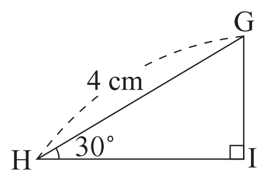
f.


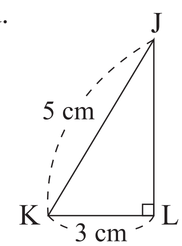
2. Clasifique las siguientes características para un triángulo isósceles o para un triángulo equilátero.
   a. La medida de los ángulos de la base es igual.
   b. Cada uno de los ángulos internos mide $60°$.
   c. La bisectriz entre los dos lados de igual longitud del triángulo es la mediatriz del lado opuesto.

3. Identifique dos parejas de triángulos rectángulos congruentes representándolas con el símbolo ≡. Indique la condición por cada congruencia.

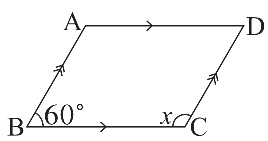
a.


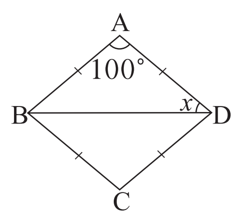
b.


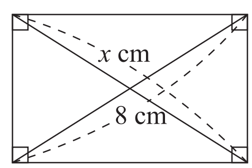
c.


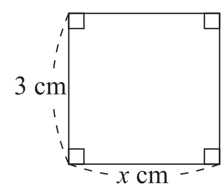
d.


4. Encuentre el valor de x.

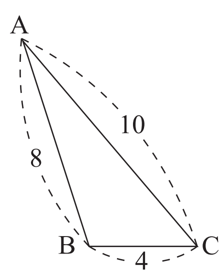
a. Paralelogramo


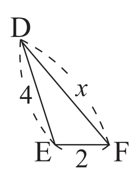
b. Rombo


c. Rectángulo


d. Cuadrado


5. Con base en la figura de abajo, cuando el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle DEF$:



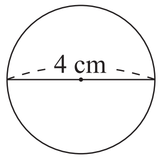


   a. Encuentre las razones de los lados correspondientes.
   b. Encuentre el valor de x.

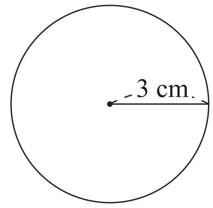
Unidad 5
Geometría

6. Encuentre el perímetro y el área.

a.

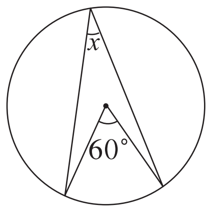


b.

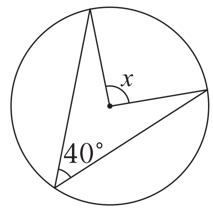


7. Encuentre la medida de x.

a.

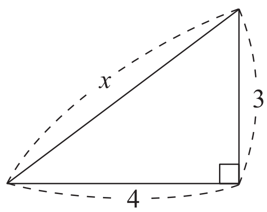


b.

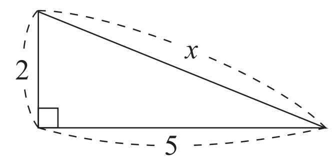


8. Encuentre el valor de x usando el teorema de Pitágoras.

a.

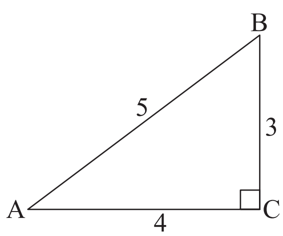


b.

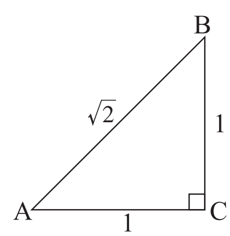


9. Calcule sen A, cos A y tan A de los siguientes triángulos rectángulos.

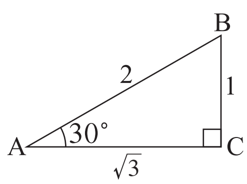
a.



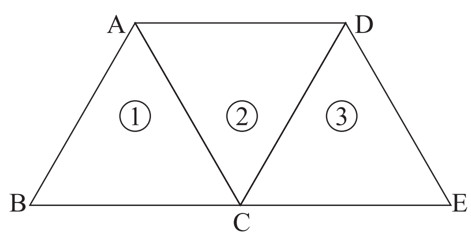
b.



10. Calcule sen $30°$, cos $30°$ y tan $30°$ del siguiente triángulo rectángulo.



11. Si los triángulos equiláteros ①, ② y ③ son congruentes:



a. Determine el triángulo que es trasladado del triángulo ①.
b. Determine el triángulo que es rotado del triángulo ① con respecto al punto C.
c. Determine el triángulo que es reflejado del triángulo ① con respecto al lado AC.

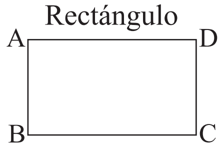
Unidad 5
Geometría

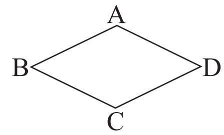
Ejercitación B

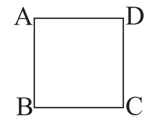
1. Determine la condición para que un paralelogramo ABCD sea un rectángulo, rombo o cuadrado.

a. AB = BC   b. AC = BD   c. ∡A = ∡B y AB = BC

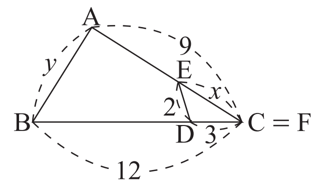
Rectángulo   Rombo   Cuadrado



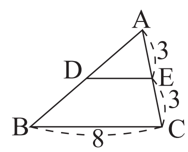




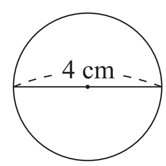
2. Con base en la figura de la derecha, cuando el △ABC es semejante al △DEF:
   a. Encuentre el valor de x.
   b. Encuentre el valor de y.



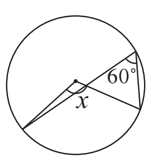
3. Con base en la figura de abajo, el lado DE es paralelo al lado BC. Encuentre la longitud del lado DE.

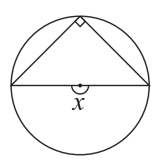


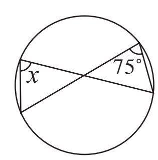
4. ¿Cuál es el cálculo para encontrar el área del siguiente círculo?
   a. $A = 4 \times \pi$
   b. $A = 4 \times 4 \times \pi$
   c. $A = 2 \times 2 \times \pi$



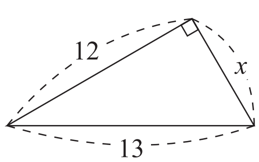
5. Encuentre la medida de x para cada caso.

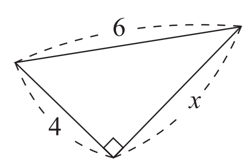
a.


b.


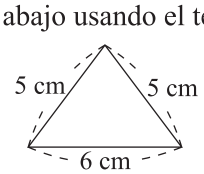
c.


6. Encuentre el valor de x usando el teorema de Pitágoras.

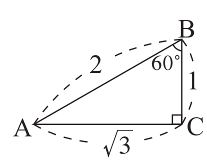
a.


b.


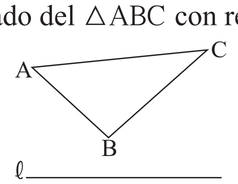
7. Encuentre el área del triángulo de abajo usando el teorema de Pitágoras.



8. Calcule sen B, cos B y tan B del triángulo rectángulo de la derecha.



9. Dibuje el △DEF que es reflejado del △ABC con respecto a la recta ℓ.



$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{número de posibles resultados de un evento}}{\text{número de elementos del espacio muestral}} = \frac{a}{n}$$

Clase	Frecuencia (f_i)	Marca de clase (X_i)	f
0–10	3		
10–20	6		
20–30	7		
30–40	12		
40–50	3		

Unidad 6

Estadística

Sección 1 Organización de datos agrupados
Clase 1 Tabla de frecuencias

P A continuación se muestra el peso (en libras) de 30 niños menores de tres años que fueron atendidos durante una jornada de control en el Centro de Salud de la comunidad La Esperanza.

16	10	17	19	20	12
13	15	21	16	14	22
29	19	27	17	23	30
21	18	13	16	25	17
32	19	20	28	15	14

Agrupación (peso)	Frecuencia (Número de niños)
Total	

a. Organice los datos en seis agrupaciones en una tabla.

b. Determine el total de datos en cada agrupación y anote el resultado en la tabla.

S a. Para organizar los datos, se calcula el tamaño de cada agrupación:

Paso 1. Identifique el valor mayor y el valor menor.
(Valor mayor) = 32 (Valor menor) = 10

Paso 2. Identifique la diferencia entre el valor mayor y el valor menor.
(Valor mayor) – (valor menor) = 32 – 10 = 22

Paso 3. Determine el tamaño de cada agrupación.
(Tamaño de cada agrupación)
= (diferencia) ÷ (número de agrupación) = $22 \div 6 \approx 4$

Luego de determinar el tamaño de cada agrupación, se procede a formar las agrupaciones comenzando con el valor menor hasta llegar al valor mayor. Las agrupaciones determinadas se muestran en la tabla que está a la derecha.

Agrupación (peso)
10−14
14−18
18−22
22−26
26−30
30−34

b. Se realiza el conteo de datos que quedan en cada agrupación y el resultado se escribe en la segunda columna.

Las agrupaciones incluyen el número del límite inferior, pero no el del límite superior. Por ejemplo, la agrupación “10−14” es mayor o igual que 10 y menor que 14.

Agrupación (peso)	Frecuencia (Número de niños)
10−14	4
14−18	10
18−22	8
22−26	3
26−30	3
30−34	2
Total	30

A una tabla en la que se organizan las agrupaciones de una serie de datos se le llama tabla de frecuencias. A cada agrupación de datos formada se le llama **clase**. Al total de datos que corresponden a cada clase se le llama **frecuencia**. La frecuencia se representa como f_i donde i describe la posición i-ésima que ocupa la clase.

Para organizar una serie de datos en una tabla de frecuencias:

Paso 1. Se organizan los datos en tantas clases como sean necesarias.
Paso 2. Se cuentan los datos que pertenecen a cada clase para determinar la frecuencia.

Al tamaño de una clase se le llama **ancho de clase**.
Para calcular el ancho de clase, se utiliza la ecuación:

Ancho de clase = **límite superior − límite inferior**

En las sucursales A y B de la tienda "El Caminito" venden bolsas de dulces y llevan un registro de las bolsas vendidas durante 30 días. A continuación, el registro diario de cada sucursal.
Sucursal A: 12 23 11 20 10 6 9 10 22 15 21 15 16 34 20 18 13 26 18 16 22 21 24 12 14 17 19 16 11 27
Sucursal B: 9 15 5 18 22 13 17 11 24 14 19 22 23 10 11 20 12 16 28 18 10 13 21 17 8 21 20 15 15 6

a. Organice los registros de la sucursal A en 6 clases y elabore la tabla de frecuencias.

b. Organice los registros de la sucursal B en 5 clases y elabore la tabla de frecuencias.

Unidad 6
Estadística

Sección 1 Organización de datos agrupados

Clase 2 Marca de clase

P

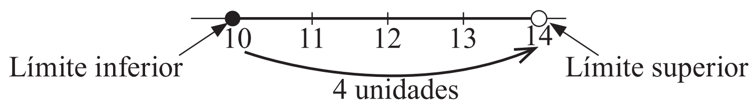
La tabla de frecuencias que está a la derecha muestra el peso (en libras) de 30 niños menores de tres años que fueron atendidos durante un día en el Centro de Salud de la comunidad La Esperanza. Las clases incluyen el número del límite inferior, pero no el del límite superior.

a. Determine el ancho de cada clase.
b. Encuentre el valor que está en el centro de clase.

Clase (peso)	Frecuencia (f_i) (Número de niños)
10−14	4
14−18	10
18−22	8
22−26	3
26−30	3
30−34	2
Total	30

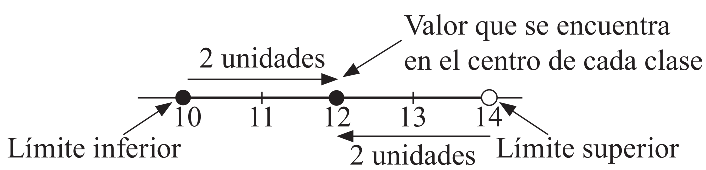
S

a. En la gráfica se observa que el ancho de la primera clase es igual a 4.



También se puede calcular restando el límite inferior del límite superior: 14 – 10 = 4.
Todas las clases tienen el mismo ancho.

b. El valor que está en el centro de cada clase se puede obtener gráficamente contando la misma cantidad de unidades desde el límite inferior y desde el límite superior.



También se puede calcular sumando el límite superior con el límite inferior y dividiendo el total entre 2.

$$\frac{14+10}{2} = \frac{24}{2}$$
$$= 12$$

Clase (peso)	Frecuencia (f_i) (Número de niños)	Marca de clase
10−14	4	12
14−18	10	16
18−22	8	20
22−26	3	24
26−30	3	28
30−34	2	32
Total	30	

C

A un valor que está en el centro de cada clase se le llama **marca de clase** o punto medio. La marca de clase se determina mediante la ecuación:

$$\text{Marca de clase} = \frac{\text{límite superior} + \text{límite inferior}}{2}$$

La marca de clase se representa como X_i donde $_i$ describe la posición i-ésima que ocupa la clase.

E

Calcule el valor de las marcas de clase en las siguientes tablas.

a.

Clase	Marca de clase (X_i)
145−149	
149−153	
153−157	
157−161	
161−165	
165−169	
169−173	

b.

Clase	Marca de clase (X_i)
45−50	
50−55	
55−60	
60−65	
65−70	
70−75	
75−80	

Sección 2 Medidas de tendencia central

Clase 1 Cálculo de media aritmética

P La tabla de frecuencias que está a la derecha muestra el registro del peso (en libras) de 30 niños menores de tres años que fueron atendidos durante un día en el Centro de Salud de la comunidad La Esperanza.

a. Calcule la marca de clase de cada clase.
b. Multiplique la frecuencia con su respectiva marca de clase y sume los resultados.
c. Divida la suma obtenida en el inciso b entre el número total de datos.

Clase (peso)	Frecuencia (f_i) (Número de niños)
10−14	4
14−18	10
18−22	8
22−26	3
26−30	3
30−34	2
Total	30

S a. Marca de clase $(X_i) = \dfrac{\text{límite superior} + \text{límite inferior}}{2}$

Ejemplo:
La marca de clase de la primera clase es:

$$X_i = \frac{14+10}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

b. Multiplicando la frecuencia de la primera clase por la marca de clase:

$$(\text{Frecuencia}) \times (\text{marca de clase}) = f_1 \times X_1 = 4 \times 12 = 48$$

Clase (peso)	Frecuencia (f_i) (Número de niños)	Marca de clase (X_i)	$f_i \times X_i$
10−14	4	12	48
14−18	10	16	160
18−22	8	20	160
22−26	3	24	72
26−30	3	28	84
30−34	2	32	64
Total	30		588

Multiplicando cada frecuencia con su respectiva marca de clase y sumando los resultados, se obtiene 588, como se presenta en la tabla que está arriba.

c. $$\frac{(\text{Suma de los productos de } f_i \times X_i)}{(\text{Número total de datos})} = \frac{588}{30} = 19.6$$

La media aritmética de los datos es 19.6 libras.

C Para encontrar la media aritmética de una serie de datos organizados en una tabla de frecuencias:

Media aritmética $(\overline{X}) = \dfrac{\text{suma de los productos de } f_i \times X_i}{\text{número de datos}}$

La media aritmética de datos agrupados es un valor aproximado.

E Complete la siguiente tabla y encuentre la media aritmética para datos agrupados.

Clase	Frecuencia (f_i)	Marca de clase (X_i)	$f_i \times X_i$
0−10	3		
10−20	6		
20−30	7		
30−40	12		
40−50	3		
50−60	5		
Total	36		

Sección 2 Medidas de tendencia central

Clase 2 Cálculo de mediana

P

La tabla de frecuencias que está a la derecha muestra el registro del peso (en libras) de 30 niños menores de tres años que fueron atendidos durante un día en el Centro de Salud de la comunidad La Esperanza.

Clase (peso)	Frecuencia (f_i) (Número de niños)
10−14	4
14−18	10
18−22	8
22−26	3
26−30	3
30−34	2
Total	30

a. Identifique la clase donde está el valor de la mediana.

La mediana es el valor que ocupa la posición central en una serie de datos.

b. Calcule la marca de clase del inciso a.

S

a. Al valor que divide el conjunto de datos en dos partes iguales se le llama **mediana**. Para identificar la clase donde se encuentra la mediana, se suman las frecuencias hasta obtener la mitad del total de los datos. Los resultados de la suma de frecuencias se ubican en la columna de **frecuencia acumulada**. Como el total de datos es 30, la posición central es $\frac{15+16}{2} = 15.5$. Entonces, la clase donde se encuentra la mediana es la tercera porque la frecuencia acumulada es: $4 + 10 + 8 = 22$, e incluye la posición central 15.5.

Clase (peso)	Frecuencia (f_i) (Número de niños)	Frecuencia acumulada
10−14	4	4
14−18	10	14
18−22	8	22
22−26	3	25
26−30	3	28
30−34	2	30
Total	30	

b. La marca de clase de la tercera clase es:

$$X_3 = \frac{22+18}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

La marca de clase de la clase donde se encuentra la mediana corresponde aproximadamente al valor de la mediana de la serie de datos.
La mediana de estos datos agrupados es 20 libras.

C

Para encontrar la mediana de una serie de datos organizados en una tabla de frecuencias:
Paso 1. Se identifica la clase donde se ubica el dato que ocupa la posición central.
Paso 2. El valor aproximado de la mediana será la marca de clase de la clase donde se ubica el valor de la posición central.

E

Encuentre el valor de la mediana con base en los datos de las siguientes tablas de frecuencias.

a.

Clase	Frecuencia (f_i)
46−48	1
48−50	2
50−52	4
52−54	3
54−56	2
56−58	1
Total	13

b.

Clase	Frecuencia (f_i)
48−53	2
53−58	4
58−63	7
63−68	9
68−73	5
73−78	4
78−83	3
83−88	2
Total	36

Sección 2 Medidas de tendencia central

Clase 3 Cálculo de moda

P

La tabla de frecuencias que está a la derecha muestra el registro del peso (en libras) de 30 niños menores de tres años que fueron atendidos durante un día en el Centro de Salud de la comunidad La Esperanza.

a. Identifique la clase que tiene la mayor frecuencia.
b. Calcule la marca de clase del inciso a.

Clase (peso)	Frecuencia (f_i) (Número de niños)
10–14	4
14–18	10
18–22	8
22–26	3
26–30	3
30–34	2
Total	30

S

a. La clase que tiene la mayor frecuencia corresponde a la segunda clase como se muestra en la tabla que está a la derecha. A esta clase se le llama **clase modal**.

b. La marca de clase de la segunda clase es:

$$X_2 = \frac{18+14}{2}$$
$$= \frac{32}{2}$$
$$= 16$$

La marca de clase de la clase donde se encuentra la frecuencia mayor se considera como moda. El valor aproximado de la moda de los datos es 16 libras.

Clase (peso)	Frecuencia (f_i) (Número de niños)
10–14	4
14–18	10
18–22	8
22–26	3
26–30	3
30–34	2
Total	30

C

Para encontrar la moda de una serie de datos organizados en una tabla de frecuencias:

Paso 1. Se identifica la clase modal.
Paso 2. Se encuentra la marca de clase de la clase modal, que es el valor aproximado de la moda.

E

Encuentre la moda para cada tabla de frecuencias.

a.

Clase	Frecuencia (f_i)
15–20	1
20–25	3
25–30	6
30–35	10
35–40	8
40–45	7
45–50	2
50–55	1
Total	38

b.

Clase	Frecuencia (f_i)
90–98	7
98–106	9
106–114	13
114–122	3
122–130	4
130–138	3
138–146	1
Total	40

c.

Clase	Frecuencia (f_i)
23–31	32
31–39	16
39–47	5
47–55	1
55–63	2
Total	56

Sección 3 Medidas de posición

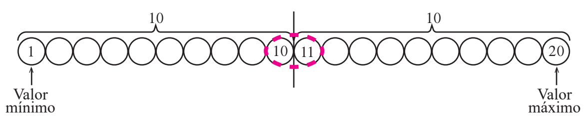
Clase 1 Cálculo e interpretación de cuartiles

P La tabla que está a la derecha muestra los datos de la estatura (en centímetros) de 20 personas. Las clases incluyen el número del límite inferior, pero no el del límite superior.

a. Identifique la clase donde se encuentra la mediana.
b. Encuentre la mediana de los datos.
c. Identifique la clase donde se encuentra la mediana de la primera mitad de los datos.
d. Encuentre la mediana de la primera mitad de los datos.
e. Identifique la clase donde se encuentra la mediana de la segunda mitad de los datos.
f. Encuentre la mediana de la segunda mitad de los datos.

Clase (Estatura)	Frecuencia (f_i) (Número de personas)
130−140	2
140−150	4
150−160	7
160−170	6
170−180	1
Total	20

S a. Al ordenar los 20 datos, la mediana se ubica en el centro del décimo y décimo primer dato.



Por tanto, la mediana se encuentra en la clase de la tercera fila de la tabla.

Clase (Estatura)	Frecuencia (f_i) (Número de personas)	Frecuencia acumulada
130−140	2	2
140−150	4	6
150−160	**7**	**13**
160−170	6	19
170−180	1	20
Total	20	

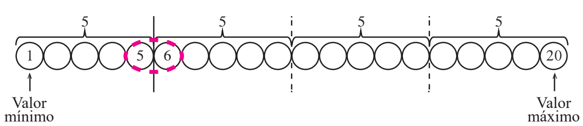
b. La marca de clase de la tercera clase:

$$X_3 = \frac{160+150}{2} = \frac{310}{2} = 155$$

La mediana es 155 cm.

La mediana es el valor que divide al conjunto de datos en dos partes iguales.

c. Como existen 20 datos, la cantidad de datos de la primera mitad es 10. Entonces, la mediana de la primera mitad de los datos se ubica entre el quinto y sexto dato.



Por tanto, el valor de un cuarto de los datos se encuentra en la segunda clase.

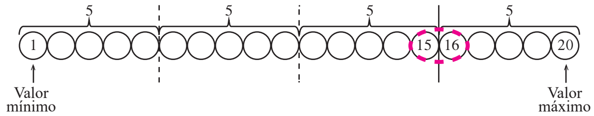
Clase (Estatura)	Frecuencia (f_i) (Número de personas)	Frecuencia acumulada
130−140	2	2
140−150	**4**	**6**
150−160	7	13
160−170	6	19
170−180	1	20
Total	20	

d. La mediana de la primera mitad de los datos es la marca de clase de la segunda clase.

$$X_2 = \frac{150+140}{2} = \frac{290}{2} = 145$$

La mediana de la primera mitad de los datos es 145 cm.

e. Como existen 20 datos, la cantidad de datos de la segunda mitad es 10, que son del décimo primer al vigésimo dato. Entonces, la mediana de la segunda mitad de los datos se ubica entre el décimo quinto y el décimo sexto dato.



Clase (Estatura)	Frecuencia (f_i) (Número de personas)	Frecuencia acumulada
130−140	2	2
140−150	4	6
150−160	7	13
160−170	**6**	**19**
170−180	1	20
Total	20	

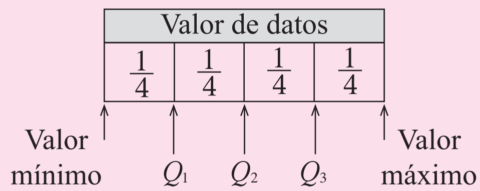
Por tanto, el valor de tres cuartos de los datos se encuentra en la cuarta clase.

f. La mediana de la segunda mitad de los datos es la marca de clase de la cuarta clase.

$$X_4 = \frac{170 + 160}{2}$$
$$= \frac{330}{2}$$
$$= 165$$

La mediana de la segunda mitad de los datos es 165 cm.

A los tres valores que dividen los datos, ordenados de menor a mayor, en cuatro partes iguales se les llama **cuartiles**.



El **primer cuartil** es el valor que separa el primer cuarto $\left(\frac{1}{4}\right)$ de datos del resto y se representa como Q_1.
El **segundo cuartil** es el valor que divide los datos en dos partes iguales y se representa como Q_2.
El **tercer cuartil** es el valor que separa tres cuartos $\left(\frac{3}{4}\right)$ de datos del resto desde el valor mínimo y se representa como Q_3.

Para determinar el valor del cuartil en datos agrupados:

Paso 1. Se identifica la clase donde se encuentra Q_1, Q_2 y Q_3.
Paso 2. El valor será la marca de clase identificada.

Dada la siguiente tabla del peso de 24 personas, encuentre los valores de Q_1, Q_2 y Q_3.

Clase (Peso)	Frecuencia (f_i) (Número de personas)
40−50	4
50−60	11
60−70	6
70−80	2
80−90	1
Total	24

Sección 3 Medidas de posición

Clase 2 Cálculo e interpretación de percentiles

P

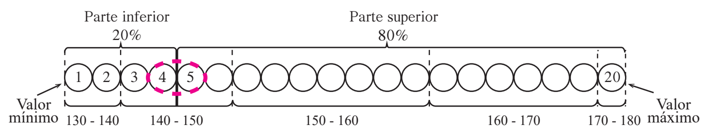
Con base en la tabla de la clase anterior de los datos de estatura (en centímetros) de 20 personas:

a. Identifique la clase donde se separan los datos en dos partes, tales que la parte inferior contiene el 20% de los datos y la parte superior contiene el 80% de los datos.
b. Encuentre la marca de clase del inciso a.

Clase (Estatura)	Frecuencia (f_i) (Número de personas)
130–140	2
140–150	4
150–160	7
160–170	6
170–180	1
Total	20

S

a. Se identifica la clase donde se separan los datos entre el 20% y el 80%. Es decir, se busca donde se separan los datos entre 4 y 16 porque el 20% de los 20 datos es 4. Entonces, es la segunda clase (o algún punto en la segunda clase) donde se separan los datos en 4 y 16.



Clase (Estatura)	Frecuencia (f_i) (Número de personas)	Frecuencia acumulada
130–140	2	2
140–150	**4**	**6**
150–160	7	13
160–170	6	19
170–180	1	20

Para separar los datos, se ordenan del valor mínimo al valor máximo.

b. Para encontrar la marca de clase de la segunda clase:

$$X_2 = \frac{150 + 140}{2} = \frac{290}{2} = 145$$

La marca de clase de la segunda clase es 145 cm.

C

A los valores que dividen los datos ordenados de menor a mayor en cien partes iguales, se les llama **percentiles**. El percentil se representa con la letra P. El percentil P_i indica el valor por debajo del cual se encuentra i porcentaje de los datos.

Para estimar el valor del percentil en datos agrupados:

Paso 1. Se busca la clase donde se separan los datos en dos partes tales que la parte inferior contiene i porcentaje de los datos y la parte superior contiene el resto de los datos $(100 - i)\%$.

Paso 2. El valor del P_i será la marca de clase identificada.

Ejemplo:

Clase (Punteo)	Frecuencia (f_i) (Número de alumnos)
50–60	6
60–70	10
70–80	8
80–90	5
90–100	1

Para determinar P_{30} de los resultados de las notas obtenidas por un grupo de 30 estudiantes, cuyo 30% corresponde a 9 estudiantes. Al ordenar los 30 datos del valor mínimo al valor máximo, el dato requerido es el noveno a partir del valor mínimo. El noveno dato se ubica en la segunda clase.

La marca de clase de la segunda clase corresponde a P_{30}.

$$X_2 = \frac{70+60}{2} = \frac{130}{2} = 65$$

Entonces, P_{30} es 65 puntos.

Clase (Estatura)	Frecuencia (f_i) (Número de personas)	Frecuencia acumulada
50–60	6	6
60–70	**10**	**16**
70–80	8	24
80–90	5	29
90–100	1	30

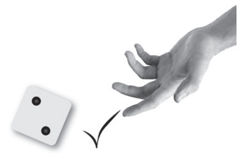
E

Para la misma tabla de datos del ejemplo, encuentre P_{10}, P_{50} y P_{90}.

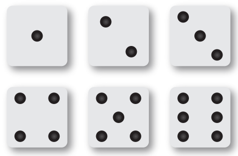
Unidad 6
Estadística

Clase 1 Espacio muestral

P Al lanzar un dado, ¿cuáles son los posibles resultados?



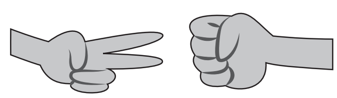
S 1, 2, 3, 4, 5, 6



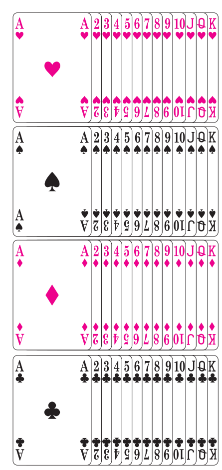
C A un conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se le llama **espacio muestral**.
El espacio muestral del problema de arriba es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

E
1. Identifique el espacio muestral en los siguientes casos.
   a. Al lanzar una moneda de un quetzal al aire.

   b. Las posibles opciones que Domingo tiene cuando juega "piedra, papel o tijera" con un amigo.



   c. Al sacar una carta de las 52 cartas que hay en una baraja.



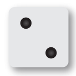
2. Considere si los siguientes enunciados expresan correctamente un espacio muestral.
   a. Al lanzar un dado una vez, el espacio muestral consiste en cinco posibles resultados.
   b. Al lanzar una moneda de 50 centavos (¢) una vez, el espacio muestral consiste en dos posibles resultados.
   c. Al elegir un líder entre cinco personas, A, B, C, D y E, el espacio muestral consiste en un posible resultado.

Sección 4 Probabilidades
Clase 2 Eventos simples y compuestos

Al lanzar un dado:

a. ¿Cuántas posibilidades existen de obtener el número 2?
b. ¿Cuántas posibilidades existen de obtener números pares?

a. Existe una posibilidad de obtener el número 2.

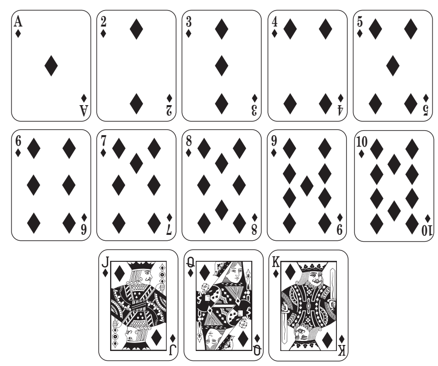


b. Existen tres posibilidades de obtener números pares, es decir, 2, 4 o 6.

A un evento formado por un solo resultado de un experimento aleatorio se le llama **evento simple**. A un evento formado por dos o más resultados de un experimento aleatorio se le llama **evento compuesto**.

1. Al sacar una carta de las trece cartas del símbolo ♦ (diamante), ¿cuántos posibles resultados existen para obtener la siguiente carta?

   a. Un número 10
   b. Un número impar
   c. Una con números
   d. Una con letras



2. Identifique si los siguientes eventos describen un evento simple o un evento compuesto.

   a. Al lanzar un dado, se obtiene el número 1.
   b. Al lanzar un dado, se obtiene un número par.
   c. Al lanzar una moneda de un quetzal, se obtiene el escudo.
   d. Al sacar una de las trece cartas del símbolo ♥ (corazón), se obtiene una carta con números.

Clase 3 Introducción a probabilidades

C

A una medida de la certidumbre asociada a un suceso o evento futuro se le llama **probabilidad**.

Cuando el número de elementos del espacio muestral es n y el número de posibles resultados de un evento A es a, la probabilidad de A es:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{número de posibles resultados de un evento}}{\text{número de elementos del espacio muestral}} = \frac{a}{n}$$

Ejemplo 1:

Al lanzar un dado, el número de elementos del espacio muestral es 6 y el número de posibles resultados en los que sale 2 es 1.

Entonces,

$$\frac{\text{(Posible resultado de un evento)}}{\text{(Número de elementos del espacio muestral)}} = \frac{1}{6}.$$

Por tanto, la probabilidad de que salga el número 2 es $\frac{1}{6}$.

Ejemplo 2:

Al lanzar un dado, el número de elementos del espacio muestral es 6 y el número de posibles resultados en los que sale un número impar es 3.

Entonces,

$$\frac{\text{(Posible resultado de un evento)}}{\text{(Número de elementos del espacio muestral)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, la probabilidad de que salga un número impar es $\frac{1}{2}$.

E

Resuelva.

a. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 6?
b. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número par?
c. Al lanzar una moneda de un quetzal, ¿cuál es la probabilidad de que salga cara?
d. Al elegir una persona aleatoriamente de siete personas, Alejandro, Andrea, Domingo, Elena, Juan, Leonardo y Marta, ¿cuál es la probabilidad de elegir a Marta?
e. Al sacar una de las trece cartas del símbolo ♣ (trébol), ¿cuál es la probabilidad de que salga un número impar?

Ejercitación

1. En un instituto, se realizó el examen de admisión para el año próximo. Los resultados se muestran en la tabla que está a la derecha.
   a. Calcule la marca de clase de cada clase.
   b. Multiplique la frecuencia con su respectiva marca de clase y sume los resultados.
   c. Divida la suma obtenida en el inciso b entre el número total de datos.
   d. Encuentre el valor de la mediana con base en los datos de la tabla.
   e. Encuentre la moda para la tabla.

Clase (Puntos)	Frecuencia (Número de niños) (f_i)	Marca de clase (X_i)	$f_i \times X_i$
0−10	1		
10−20	2		
20−30	8		
30−40	22		
40−50	28		
50−60	30		
60−70	15		
70−80	7		
80−90	5		
90−100	2		
Total	120		

2. La tabla que está a la derecha muestra los datos del registro de edad de personas atendidas en un día en una biblioteca pública.
   a. Encuentre el valor de Q_3.
   b. Encuentre el valor de P_{50}.

Clase (Edades)	Frecuencia (Número de personas)
10−20	4
20−30	3
30−40	5
40−50	6
50−60	2
Total	20

3. Al lanzar un dado:
   a. ¿Cuántas posibilidades existen de obtener 3?
   b. ¿Cuántas posibilidades existen de obtener un número impar?
   c. ¿Cuál es la probabilidad del inciso a?

Unidad 6 Estadística

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

$p \wedge q$

$p \vee q$

Unidad 7

Lógica

Sección 1 Conectivos lógicos y valores de verdad
Clase 1 Negación

P

Escriba la negación de las siguientes proposiciones.

a. Hoy es miércoles.
b. La raíz cuadrada de 16 es 4.

S

La negación de una proposición simple se puede escribir de cualquiera de las siguientes formas:

Forma 1

a. **No es verdad que** hoy es miércoles.

b. **No es verdad que** la raíz cuadrada de 16 es 4.

Forma 2

a. Hoy **no** es miércoles.

b. La raíz cuadrada de 16 **no** es 4.

Para negar una proposición simple, se le antepone la expresión "no es verdad que", "no es cierto que" o se incluye la palabra "no" al enunciado.

C

Una proposición simple se representa simbólicamente con una letra. Generalmente son utilizadas las letras p, q, r o s.
A la transformación de una proposición en otra con valor de verdad contrario se le llama **negación**. El símbolo para representar una negación es "$\sim$". La negación de una proposición p se representa como $\sim p$ y se lee como "no p".

Ejemplo:

p: Hoy es lunes.
q: 4 es divisor de 8.

Negación de la proposición	Representación simbólica de la negación
Hoy **no** es lunes.	$\sim p$
No es cierto que 4 es divisor de 8.	$\sim q$

E

Complete la siguiente tabla.

Proposiciones	Negación de la proposición	Representación simbólica de la negación
p: Ayer fue un día soleado.		
q: 5 es un número primo.		
r: Las arañas tienen 8 patas.		
s: 1 km es equivalente a 100 m.		
t: 7 es divisor de 24.		

Unidad 7
Lógica

Sección 1 Conectivos lógicos y valores de verdad
Clase 2 Valores de verdad de una negación

P

Dadas dos proposiciones simples:
p: 15 es múltiplo de 3.
q: 18 es múltiplo de 4.

a. Niegue las proposiciones p y q.
b. Determine si la negación de la proposición es verdadera o falsa.

S

a. $\sim p$: 15 no es múltiplo de 3.
$\sim q$: 18 no es múltiplo de 4.

b. La proposición "15 es múltiplo de 3" es verdadera, y su negación "15 no es múltiplo de 3" es falsa.
La proposición "18 es múltiplo de 4" es falsa, y su negación "18 no es múltiplo de 4" es verdadera.

C

Si una proposición es verdadera, entonces su negación es falsa.
Si una proposición es falsa, entonces su negación es verdadera.
Los valores de verdad de una proposición y su negación se presentan en la tabla de la derecha.

p	$\sim p$
V	F
F	V

E

Escriba la negación de las siguientes proposiciones y determine si es verdadera o falsa.
a. Las aves tienen cuatro patas.
b. $5 \times 8 = 40$
c. La medida del ángulo recto es $90°$.
d. No es verdad que la raíz cuadrada de 25 es 5.
e. Una semana tiene 7 días.
f. $6 \times 3 \neq 18$
g. Una hora tiene sesenta minutos.

"$\neq$" significa "no es igual".

A la negación de una negación se le llama doble negación, y la negación de $\sim p$ se representa por $\sim\sim p$.
$\sim\sim p$ es equivalente a p.

Los valores de verdad de la doble negación $\sim p$ son equivalentes a los valores de verdad de la proposición p.

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

Sección 1 Conectivos lógicos y valores de verdad

Clase 3 Conjunción

P

Una las dos proposiciones de cada inciso con el conectivo “y”.

a. p: 5 es un número par.
   q: El triángulo tiene tres lados.

b. r: Sonia es el nombre de una mujer.
   s: Javier es el nombre de un hombre.

S

Dos proposiciones simples se pueden combinar por medio del conectivo “y” para formar una proposición compuesta.

a. 5 es un número par **y** el triángulo tiene tres lados.

b. Sonia es el nombre de una mujer **y** Javier es el nombre de un hombre.

Las anteriores proposiciones pueden ser escritas simbólicamente:

$\boldsymbol{p \wedge q}$ $\boldsymbol{r \wedge s}$

C

A la unión de dos proposiciones simples con el conectivo “y” se le llama **conjunción**.
El símbolo para representar una conjunción es “∧”. La conjunción de las proposiciones p y q se representa como $p \wedge q$, y se lee “p y q”.

Ejemplo:

p: La Monja Blanca es la flor nacional.
q: El Quetzal es el ave nacional.

Conjunción	Representación simbólica
La Monja Blanca es la flor nacional y el Quetzal es el ave nacional.	$p \wedge q$

E

Complete la siguiente tabla.

Proposiciones simples	Conjunción	Representación simbólica
m: El rectángulo tiene 4 lados. n: El triángulo tiene 3 lados.		
o: El delfín es un pez. p: El conejo es un mamífero.		
q: $3 \times 2 = 6$ r: $18 \div 2 = 9$		

Clase 4 Valores de verdad de una conjunción

P

Dadas las proposiciones simples:
p: 5 es un número impar.
q: 8 es un número par.
r: 6 es un número impar.
s: 3 es un número par.

Construya las siguientes proposiciones compuestas y determine si cada una de ellas es verdadera o falsa.

a. $p \wedge q$ b. $p \wedge r$ c. $r \wedge q$ d. $r \wedge s$

S

a. 5 es un número impar y 8 es un número par.
b. 5 es un número impar y 6 es un número impar.
c. 6 es un número impar y 8 es un número par.
d. 6 es un número impar y 3 es un número par.

Para determinar si una proposición compuesta es verdadera o falsa, es necesario encontrar el valor de verdad de cada proposición simple de la proposición compuesta formada.

a. La proposición "5 es un número impar" es verdadera y "8 es un número par" es verdadera. Por tanto, la proposición compuesta "5 es un número impar y 8 es un número par" es verdadera.
b. La proposición "5 es un número impar" es verdadera y "6 es un número impar" es falsa. Por tanto, la proposición compuesta "5 es un número impar y 6 es un número impar" es falsa.
c. La proposición "6 es un número impar" es falsa y "8 es un número par" es verdadera. Por tanto, la proposición compuesta "6 es un número impar y 8 es un número par" es falsa.
d. La proposición "6 es un número impar" es falsa y "3 es un número par" es falsa. Por tanto, la proposición compuesta "6 es un número impar y 3 es un número par" es falsa.

C

Los valores de verdad de una conjunción de dos proposiciones simples se muestran en la tabla de la derecha.
A la tabla que muestra el valor de verdad de una proposición compuesta, con base en cada combinación de valores de verdad de las proposiciones simples que la forman, se le llama **tabla de verdad**.
La conjunción es verdadera cuando las dos proposiciones son verdaderas y es falsa en los otros casos.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo:

El lago de Atitlán está en Sololá y el volcán Tajumulco está en Quetzaltenango.

El valor de verdad de la proposición compuesta es falso, porque "El lago de Atitlán está en Sololá" es verdadero y "el volcán Tajumulco está en Quetzaltenango" es falso.

E

Determine el valor de verdad de cada proposición compuesta.

Proposición compuesta	Valor de verdad
5 es mayor que 3 y 5 es número par.	
Una semana tiene 4 días y un año tiene 12 meses.	
Una hora tiene 30 minutos y un minuto tiene 30 segundos.	

Clase 5 Disyunción

P

Una las dos proposiciones de cada inciso con el conectivo "o".

a. p: Juan practica atletismo.
   q: Juan practica karate.

b. r: 6 es raíz cuadrada de 36.
   s: 4 es raíz cuadrada de 16.

S

Dos proposiciones simples se pueden combinar por medio del conectivo "o" para formar una proposición compuesta.

a. Juan practica atletismo **o** karate.

b. 6 es raíz cuadrada de 36 **o** 4 es raíz cuadrada de 16.

Las anteriores proposiciones pueden ser escritas simbólicamente:

$\boldsymbol{p \vee q}$

$\boldsymbol{r \vee s}$

C

A la unión de dos proposiciones simples con el conectivo "o" se le llama **disyunción**.
El símbolo para representar una disyunción es "$\vee$". La disyunción de las proposiciones p y q se representa como $p \vee q$, y se lee como "p o q".

Ejemplo:

p: Viajo en avión.
q: Viajo en bus.

Disyunción	Representación simbólica
Viajo en avión o en bus.	$p \vee q$

E

Complete la siguiente tabla.

Proposiciones simples	Disyunción	Representación simbólica
a: Camino bajo la lluvia. b: Tomo un taxi.		
c: $5 - 5 = 0$ d: $5 + 5 = 10$		
e: La raíz cuadrada de 9 es 3. f: 3 es un número par.		

Clase 6 Valores de verdad de una disyunción

P

Con base en las siguientes proposiciones simples:
p: Guatemala es un país centroamericano.
q: El volcán Pacaya está en Sololá.
r: El fútbol es un deporte.
s: Un año tiene 10 meses.

Construya las siguientes proposiciones compuestas y determine si cada una de ellas es verdadera o falsa.

a. $p \vee r$ b. $p \vee q$ c. $s \vee r$ d. $q \vee s$

S

a. Guatemala es un país centroamericano o el fútbol es un deporte.
b. Guatemala es un país centroamericano o el volcán Pacaya está en Sololá.
c. Un año tiene 10 meses o el fútbol es un deporte.
d. El volcán Pacaya está en Sololá o un año tiene 10 meses.

Para determinar si una proposición compuesta es verdadera o falsa, es necesario encontrar el valor de verdad de cada proposición simple de la proposición compuesta formada.

a. La proposición "Guatemala es un país centroamericano" es verdadera y "El fútbol es un deporte" es verdadera. Por tanto, la proposición compuesta "Guatemala es un país centroamericano o el fútbol es un deporte" es verdadera.
b. La proposición "Guatemala es un país centroamericano" es verdadera y "El volcán Pacaya está en Sololá" es falsa. Por tanto, la proposición compuesta "Guatemala es un país centroamericano o el volcán Pacaya está en Sololá" es verdadera.
c. La proposición "Un año tiene 10 meses" es falsa y "El fútbol es un deporte" es verdadera. Por tanto, la proposición compuesta "Un año tiene 10 meses o el fútbol es un deporte" es verdadera.
d. La proposición "El volcán Pacaya está en Sololá" es falsa y "Un año tiene 10 meses" es falsa. Por tanto, la proposición compuesta "El volcán Pacaya está en Sololá o un año tiene 10 meses" es falsa.

C

Los valores de verdad de una disyunción de dos proposiciones simples se muestran en la tabla de la derecha.

La disyunción es verdadera cuando por lo menos una de las dos proposiciones simples es verdadera y es falsa cuando las dos proposiciones son falsas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:

El lago de Atitlán está en Sololá o el volcán Tajumulco está en Quetzaltenango.

El valor de verdad de la proposición compuesta es verdadero, porque "El lago de Atitlán está en Sololá" es verdadero y "El volcán Tajumulco está en Quetzaltenango" es falso.

E

Determine el valor de verdad de cada proposición compuesta.

Proposición compuesta	Valor de verdad
5 es mayor que 3 o 10 es número par.	
Una semana tiene 4 días o un año tiene 12 meses.	
Una hora tiene 30 minutos o un minuto tiene 30 segundos.	

Sección 1 Conectivos lógicos y valores de verdad

Clase 7 Implicación

P

Una las dos proposiciones con el conectivo "si…, entonces…".

a. p: Tengo dinero.
   q: Voy a un restaurante.

b. r: 27 es divisible entre 9.
   s: 27 es un múltiplo de 4.

El orden de dos proposiciones no afecta al significado en la conjunción y disyunción.
Sin embargo, el orden afecta al significado en la implicación.

S

Dos proposiciones simples se pueden combinar por medio del conectivo "si…, entonces…" para formar una proposición compuesta.

a. **Si** tengo dinero, **entonces** voy a un restaurante.
   Si voy a un restaurante, **entonces** tengo dinero.

b. **Si** 27 es divisible entre 9, **entonces** es un múltiplo de 4.
   Si 27 es un múltiplo de 4, **entonces** es divisible entre 9.

C

A la unión de dos proposiciones simples con el conectivo "si…, entonces…" se le llama **implicación** o **condicional**.
A la parte de la proposición que sigue de "Si" se le llama **antecedente** o **hipótesis**. A la parte que sigue de "entonces" se le llama **consecuente** o **conclusión**.
El símbolo para representar una implicación es "$\Rightarrow$". La implicación de las proposiciones p y q se representa como $p \Rightarrow q$, y se lee como "si p, entonces q".

Ejemplo:

p: La temperatura baja a 0°C.
q: El agua se congela.

Implicación	Representación simbólica
Si la temperatura baja a 0°C, **entonces** el agua se congela.	$p \Rightarrow q$
Si el agua se congela, **entonces** la temperatura baja a 0°C.	$q \Rightarrow p$

E

Complete la siguiente tabla.

Proposiciones simples	Implicación	Representación simbólica
p: El ángulo recto mide 90°. q: La circunferencia mide dos ángulos rectos.		
r: Hoy es un día soleado. s: Vamos a la piscina.		
t: 15 es múltiplo de 3. u: 15 es divisible entre 3.		

Sección 1 Conectivos lógicos y valores de verdad

Clase 8 Valores de verdad de una implicación

P

Dadas las siguientes proposiciones simples:

p: Hay buen clima.
q: Vamos al zoológico.

Construya la proposición compuesta $p \Rightarrow q$ y encuentre su valor de verdad.

S

La proposición compuesta es: "Si hay buen clima, entonces vamos al zoológico".

Para determinar los valores de verdad de una proposición compuesta, es necesario considerar todos los posibles casos de los valores de verdad de cada proposición simple de la proposición compuesta formada.

Hay cuatro combinaciones de los valores de verdad de dos proposiciones simples.

a. En el caso de que p y q sean verdaderas.
   Hay buen clima y vamos al zoológico. Como el antecedente es verdadero y el consecuente se cumple, por tanto la proposición compuesta es verdadera.
b. En el caso de que p sea verdadera y q sea falsa.
   Hay buen clima y no vamos al zoológico. Como el antecedente es verdadero y el consecuente no se cumple, por tanto, la proposición compuesta es falsa.
c. En el caso de que p sea falsa y q sea verdadera.
   No hay buen clima y vamos al zoológico. En esta situación, se puede concluir que la proposición compuesta es verdadera.
d. En el caso de que p y q sean falsas.
   No hay buen clima y no vamos al zoológico. En esta situación, se puede concluir que la proposición compuesta es verdadera.

Los casos de los incisos c y d podrían dar confusión. Sin embargo, el concepto en lógica de la proposición compuesta "Si hay buen clima, entonces vamos al zoológico" es considerado solo cuando hay buen clima. Así que, si no hay buen clima, la conclusión no importa; está bien que vayamos o no vayamos al zoológico. Es decir, la implicación de proposiciones es considerada verdadera cuando el antecedente es falso.

C

Los valores de verdad de una implicación de dos proposiciones simples se muestran en la tabla de la derecha.

La implicación es falsa, cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, y es verdadera en los otros casos.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo:

Si $5 \times 6 = 30$, entonces $30 \div 5 \neq 6$.

El valor de verdad de la proposición compuesta es falso, porque la primera proposición es verdadera y la segunda proposición es falsa.

E

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.

a. Si un minuto es equivalente a 60 segundos, entonces una hora tiene 600 segundos.
b. Si un triángulo tiene tres lados, entonces el triángulo tiene tres ángulos internos.
c. Si 7 es un número impar, entonces el cuadrado de 7 es un número par.

Clase 9 Doble implicación

P

Una las dos proposiciones con el conectivo "si y solo si".

a. p: Un estudiante puede ser promovido al siguiente grado.
q: El puntaje de la prueba es mayor que 60.

b. r: El cuadrado de un entero es impar.
s: El entero es impar.

S

Dos proposiciones se pueden combinar por medio del conectivo "si y solo si" para formar una proposición compuesta.

a. Un estudiante puede ser promovido al siguiente grado **si y solo si** el puntaje de la prueba es mayor que 60.

b. El cuadrado de un entero es impar **si y solo si** el entero es impar.

Las anteriores proposiciones pueden ser escritas simbólicamente:

$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$

$\boldsymbol{r \Leftrightarrow s}$

C

A la unión de dos proposiciones simples con el conectivo "si y solo si" se le llama **doble implicación** o **bicondicional.**
El símbolo para representar una doble implicación es "$\Leftrightarrow$". La doble implicación de las proposiciones p y q se representa como $p \Leftrightarrow q$, y se lee como "p si y solo si q".
Una doble implicación $p \Leftrightarrow q$ es una combinación de dos enunciados condicionales: $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$.

Ejemplo:

p: Este mes es octubre.
q: El mes anterior fue septiembre.

Doble implicación	Representación simbólica
Este mes es octubre **si y solo si** el mes anterior fue septiembre.	$p \Leftrightarrow q$

E

Complete la siguiente tabla.

Proposiciones simples	Doble implicación	Representación simbólica
u: $x + 2 = 5$ v: $x + 4 = 7$		
w: La figura es un cuadrilátero. x: La figura tiene 8 lados.		
y: Este mes es agosto. z: El mes anterior fue julio.		

Sección 1 Conectivos lógicos y valores de verdad
Clase 10 Valores de verdad de una doble implicación

Dadas las proposiciones simples:
p: Un polígono es un triángulo.
q: Un polígono tiene exactamente tres lados.

Construya la proposición compuesta $p \Leftrightarrow q$, y luego determine los valores de verdad de la proposición compuesta $p \Leftrightarrow q$.

La proposición compuesta es: "Un polígono es un triángulo si y solo si tiene exactamente tres lados".

Para determinar los valores de verdad de una proposición compuesta, es necesario considerar todas las posibles combinaciones de los valores de verdad de cada proposición simple de la proposición compuesta formada.

Piense en la doble implicación como una implicación en ambas direcciones.

a. En el caso de que p y q sean verdaderas.
En la dirección de p a q, "Si un polígono es un triángulo, entonces tiene exactamente tres lados" es verdadera, y en la dirección de q a p, "Si un polígono tiene exactamente tres lados, entonces es un triángulo" es verdadera. Por tanto, la doble implicación $p \Leftrightarrow q$ es verdadera.
b. En el caso de que p sea verdadera y q sea falsa.
En la dirección de p a q, "Si un polígono es un triángulo, entonces no tiene exactamente tres lados" es falsa. Por tanto, la doble implicación $p \Leftrightarrow q$ es falsa.
c. En el caso de que p sea falsa y q sea verdadera.
En la dirección de q a p, "Si un polígono tiene exactamente tres lados, entonces no es un triángulo" es falsa. Por tanto, la doble implicación $p \Leftrightarrow q$ es falsa.
d. En el caso de que p y q sean falsas.
Cuando el antecedente es falso, la implicación es verdadera. Como en ambas direcciones son verdaderas, se puede concluir que la doble implicación $p \Leftrightarrow q$ es verdadera.

Los valores de verdad de una doble implicación de dos proposiciones simples se presentan a la derecha.

La doble implicación de dos proposiciones es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas o cuando ambas son falsas, y es falsa en los otros casos.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo:

La raíz cuadrada de 25 es 5 si y solo si $5^2 = 25$.

El valor de verdad de la proposición compuesta es falso, porque la primera proposición es falsa y la segunda proposición es verdadera. En la doble implicación es falsa si una de las proposiciones es falsa.

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.
a. 8 es divisor de 24 si y solo si 24 es divisible entre 8.
b. 13 es un número compuesto si y solo si 13 tiene solo dos divisores.
c. El producto 3×3 es un número par si y solo si 3 es un número impar.

Sección 2 Interpretación de resultados de la tabla de verdad

Clase 1 Tabla de verdad de proposición compuesta

P Construya la tabla de verdad de $\sim(p \wedge q)$.

S

1. La proposición $\sim(p \wedge q)$ tiene dos proposiciones simples: p y q.
2. Hay dos operaciones lógicas: la primera es la conjunción de p y q, y la segunda es la negación del resultado de la conjunción.
3. Construya la tabla de verdad con cuatro columnas para las siguientes proposiciones: $p, q, p \wedge q$ y $\sim(p \wedge q)$.
4. Escriba todas las combinaciones de los valores de verdad de p y q. En este caso hay cuatro combinaciones, como se muestra en la tabla de abajo a la izquierda.
5. Escriba los valores de verdad de $p \wedge q$ aplicando el concepto de la conjunción, como se muestra en la tabla de abajo al centro.
6. Escriba los valores de verdad para $\sim(p \wedge q)$ aplicando el concepto de la negación, como se muestra en la tabla de abajo a la derecha.

La conjunción es verdadera cuando ambas proposiciones, p y q, son verdaderas, y es falsa en los otros casos.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	
V	F	F	
F	V	F	
F	F	F	

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

C

Para construir la tabla de verdad de una proposición compuesta:
Paso 1. Se determina el número de proposiciones simples.
Paso 2. Se determina el orden de las operaciones lógicas presentadas.
Paso 3. Se construye la tabla de verdad.
Paso 4. Se escriben todas las combinaciones de los valores de verdad de las proposiciones simples.
Paso 5. Se completa la tabla de izquierda a derecha.

Ejemplo:
Tabla de verdad de $\sim p \vee q$.

1. La proposición $\sim p \vee q$ tiene dos proposiciones simples p y q.
2. Hay dos operaciones lógicas: la primera es la negación de p y la segunda es la disyunción de $\sim p$ y q.
3. Construya la tabla de verdad con 4 columnas para las siguientes proposiciones: p, q, $\sim p$ y $\sim p \vee q$.
4. Escriba todas las combinaciones de los valores de verdad de p y q.
5. Escriba los valores de verdad de $\sim p$ que son opuestos a los valores de verdad de p.
6. Escriba los valores de verdad de $\sim p \vee q$.
   Es verdadera cuando al menos uno de los valores de $\sim p$ o q es verdadero.

La disyunción es verdadera cuando por lo menos una de las dos proposiciones simples es verdadera.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	
V	F	F	
F	V	V	
F	F	V	

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

E Construya la tabla de verdad de cada inciso.

a. $\sim p \vee \sim q$
b. $p \Rightarrow \sim q$

Clase 2 Tautología

P Construya la tabla de verdad de $(p \wedge q) \Rightarrow p$.

S

1. La proposición $(p \wedge q) \Rightarrow p$ tiene dos proposiciones simples: p y q.
2. Hay dos operaciones lógicas que son: conjunción de p y q y la implicación de $p \wedge q$ a p.
3. Construya la tabla de verdad con cuatro columnas para las proposiciones: p, q, $p \wedge q$ y $(p \wedge q) \Rightarrow p$.
4. Escriba todas las combinaciones de los valores de verdad de p y q. En este caso hay cuatro combinaciones (primera tabla de la derecha).
5. Escriba los valores de verdad para $p \wedge q$ aplicando el concepto de la conjunción (segunda tabla de la derecha).
6. Escriba los valores de verdad para $(p \wedge q) \Rightarrow p$ aplicando el concepto de la implicación (tercera tabla de la derecha).

El valor de verdad de $(p \wedge q) \Rightarrow p$ es siempre verdadero, independientemente del valor de verdad de p y q. Entonces, se dice que la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow p$ es una tautología (cuarta tabla de la derecha).

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	
V	F	F	
F	V	F	
F	F	F	

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

La conjunción es verdadera cuando ambas proposiciones, p y q, son verdaderas, y es falsa en los otros casos.
La implicación es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, y es verdadera en los otros casos.

C Se dice que una proposición compuesta es tautología, si esta es siempre verdadera, independientemente del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen.

E Determine si la proposición es tautología.

a. $p \wedge (p \vee q)$
b. $(p \wedge q) \Rightarrow p$
c. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
d. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

Sección 2 Interpretación de resultados de la tabla de verdad

Clase 3 Contradicción

P Construya la tabla de verdad de $(p \land q) \land\sim q$.

S

1. La proposición $(p \land q)\land\sim q$ tiene dos proposiciones simples: p y q.
2. Hay tres operaciones lógicas que son: conjunción de p y q, negación de q y conjunción de $(p \land q)$ y $\sim q$.
3. Construya la tabla de verdad con cinco columnas para las proposiciones: $p, q, p \land q, \sim q$ y $(p \land q) \land \sim q$.
4. Escriba todas las combinaciones de los valores de verdad p y q. En este caso hay cuatro combinaciones (primera tabla de la derecha).
5. Escriba los valores de verdad para $p \land q$ aplicando el concepto de la conjunción (segunda tabla de la derecha).
6. Escriba los valores de verdad para $\sim q$ aplicando el concepto de negación (tercera tabla de la derecha).
7. Escriba los valores de verdad para $(p \land q) \land \sim q$, aplicando el concepto de conjunción (cuarta tabla de la derecha).

El valor de verdad de $(p \land q) \land \sim q$ es siempre falso, independientemente de los valores de verdad de p y q. Entonces, se dice que la proposición $(p \land q) \land \sim q$ es una contradicción (quinta tabla de la derecha).

p	q	$p \land q$	$\sim q$	$(p \land q)\land\sim q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

p	q	$p \land q$	$\sim q$	$(p \land q)\land\sim q$
V	V	V		
V	F	F		
F	V	F		
F	F	F		

p	q	$p \land q$	$\sim q$	$(p \land q)\land\sim q$
V	V	V	F	
V	F	F	V	
F	V	F	F	
F	F	F	V	

p	q	$p \land q$	$\sim q$	$(p \land q)\land\sim q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	F	F	F
F	F	F	V	F

p	q	$p \land q$	$\sim q$	$(p \land q)\land\sim q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	F	F	F
F	F	F	V	F

La conjunción es verdadera cuando ambas proposiciones p y q son verdaderas, y es falsa en los otros casos.

C Se dice que una proposición compuesta es una contradicción, si siempre es falsa, independientemente del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen.

E Determine si la proposición es contradicción.

a. $q \land \sim(p \lor q)$
b. $(p \lor q) \Rightarrow q$
c. $q \lor (p \Rightarrow q)$
d. $(\sim p \land q) \land (\sim q \lor p)$

Sección 2 Interpretación de resultados de la tabla de verdad

Clase 4 Contingencia

P Construya la tabla de verdad para la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$.

S

1. La proposición $(p \wedge q) \wedge \sim q$ tiene dos proposiciones simples: p y q.
2. Hay tres operaciones lógicas que son: conjunción de p y q, negación de p y la implicación de $(p \wedge q)$ a $\sim p$.
3. Construya la tabla de verdad con cinco columnas para las proposiciones: p, q, $p \wedge q$, $\sim p$ y $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$.
4. Escriba todas las combinaciones de los valores de verdad de p y q. En este caso hay cuatro combinaciones (primera tabla de la derecha).
5. Escriba los valores de verdad para $p \wedge q$ aplicando el concepto de la conjunción (segunda tabla de la derecha).
6. Escriba los valores de verdad para $\sim p$ aplicando el concepto de negación (tercera tabla de la derecha).
7. Escriba los valores de verdad para $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$, aplicando el concepto de la implicación (cuarta tabla de la derecha).

Los valores de verdad de $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$ son verdaderos y falsos, dependiendo de la combinación de los valores de verdad p y q.
Entonces, se dice que la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$ es una contingencia (quinta tabla de la derecha).

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$
V	V	V		
V	F	F		
F	V	F		
F	F	F		

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$
V	V	V	F	
V	F	F	F	
F	V	F	V	
F	F	F	V	

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

La conjunción es verdadera cuando ambas proposiciones, p y q, son verdaderas, y es falsa en los otros casos.
La implicación es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, y es verdadera en los otros casos.

C Se dice que una proposición compuesta es una contingencia si no es tautología ni contradicción.

E Determine si las siguientes proposiciones compuestas son tautología, contradicción o contingencia.

a. $\sim(p \vee q) \wedge p$
b. $\sim q \vee (p \wedge q)$
c. $(p \Longleftrightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$
d. $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)$

Ejercitación A

1. Escriba la negación de las siguientes proposiciones y represéntelas simbólicamente.
   a. p: Una semana tiene diez días.
   b. q: El triángulo isósceles tiene los tres lados iguales.
   c. r: $6 \times 5 \neq 25$
   d. s: El triángulo no tiene tres lados.

2. Escriba la negación de las siguientes proposiciones y determine si es verdadera o falsa.
   a. Los tres poderes del Estado guatemalteco son: Ejecutivo, Legislativo y Judicial.
   b. La fórmula del cálculo de área de un triángulo es base por altura dividido entre dos.
   c. La raíz cuadrada de 49 es 5.
   d. Un kilómetro tiene 100 metros.

3. Forme una conjunción a partir de las proposiciones simples dadas y represéntela simbólicamente.
   a. p: 24 es un número compuesto.
      q: 5 es menor que 9.
   b. r: $12 \div 4 = 5$
      s: $5 \times 4 = 20$

4. Determine el valor de verdad de cada proposición compuesta.
   a. $8 < 10$ y $4 < 6$
   b. La luna es un satélite natural de la Tierra y un año tiene 360 días.
   c. El trapecio es un paralelogramo y el triángulo tiene cuatro ángulos.

5. Forme una disyunción a partir de las proposiciones simples dadas y represéntela simbólicamente.
   a. p: El lunes hace frío.
      q: El lunes hace calor.
   b. r: $6 \times 3 = 18$
      s: $6 \times 3 = 12$
   c. t: El lago de Atitlán se ubica en el departamento de Sololá.
      u: El lago de Atitlán se ubica en el departamento de Guatemala.

6. Determine el valor de verdad de cada proposición compuesta.
   a. $5 \times 3 = 15$ o $15 \div 3 = 5$.
   b. Los números pares son divisibles entre dos o 17 es divisible entre dos.
   c. Enero es el segundo mes del año o enero tiene 28 días.

7. Forme una implicación a partir de las proposiciones simples dadas y represéntela simbólicamente.
   a. p: Marzo tiene 31 días.
      q: Marzo es el tercer mes del año.
   b. r: 10 es divisible entre 5.
      s: 10 es un número compuesto.
   c. t: Mazatenango es la cabecera departamental de Suchitepéquez.
      u: Mazatenango es un municipio de Sololá.

8. Determine el valor de verdad de cada proposición compuesta.
   a. Si la Tierra gira alrededor del sol, entonces el sol es el centro del sistema solar.
   b. Si $5 + 3 = 8$, entonces $8 - 3 = 10$.
   c. Si $9 \times 3 = 27$, entonces $27 \div 3 = 9$.

9. Forme una doble implicación a partir de las proposiciones simples dadas y represéntela simbólicamente.
   a. p: 9 es un múltiplo de 3.
      q: $3 \times 3 = 9$
   b. r: 11 es un número primo.
      s: 11 tiene únicamente dos divisores.
   c. t: Flores es la cabecera departamental de Petén.
      u: Flores es un municipio de Petén.

10. Construya la tabla de verdad de cada inciso.
   a. $p \wedge \sim q$
   b. $\sim p \Rightarrow q$

11. Determine si las siguientes proposiciones son tautología, contradicción o contingencia.
   a. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$
   b. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
   c. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

Ejercitación B

1. Complete la tabla.

Proposición	Negación	Valor de verdad de la negación
a. $10 - 9 + 2 = 3$		
b. Guatemala no se encuentra en Centroamérica.		
c. 10 es menor que 18.		
d. 50 es un número primo.		

2. A partir de las siguientes proposiciones simples, forme proposiciones compuestas con el conectivo indicado.
   p: Un triángulo isósceles tiene dos lados de igual longitud.
   q: En todos los triángulos isósceles la medida de los ángulos de la base son iguales.

   a. Conjunción
   b. Implicación
   c. Disyunción
   d. Doble implicación.

3. Determine el valor de verdad de las proposiciones compuestas formadas en el inciso 2.

4. Construya la tabla de verdad de las siguientes proposiciones e indique si son tautología, contradicción o contingencia.
   a. $(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim q$
   b. $p \Rightarrow (p \vee \sim q)$
   c. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
   d. $\sim p \Rightarrow (q \vee p)$