



GOBIERNO *de*
GUATEMALA
DR. ALEJANDRO GIAMMATTEI

MINISTERIO DE
EDUCACIÓN

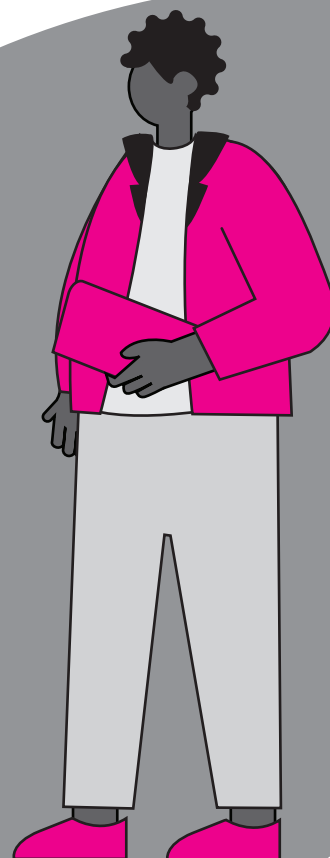
Matemática

Nivel de Educación Media

Ciclo Básico

3

Texto para el estudiante



Claudia Patricia Ruíz Casasola de Estrada
Ministra de Educación

Edna Portales de Núñez
Viceministra Técnica de Educación

María del Rosario Balcarcel Minchez
Viceministra Administrativa de Educación

Carmelina Espantzay Serech de Rodríguez
Viceministra de Educación Bilingüe e Intercultural

Vilma Lorena León Oliva de Hernández
Viceministra de Educación Extraescolar y Alternativa

Autores

Cayetano Salvador Salvador
Alejandro Asijtuj Simón
Andrea Marisol Morales Rabanales
Agustín Pelicó Pérez
José Alfredo Marroquín Azurdía

Digecade/Mineduc- Coordinador del equipo de expertos matemáticos.
Digecade/Mineduc
Digecade/Mineduc
Digebi/Mineduc
Digebi/Mineduc

Diseño de portada

Lucía Alejandra Morales González

Con el apoyo de autoría y edición del Equipo de Expertos Matemáticos de la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media -EFPEM-.

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)
Este documento se puede reproducir total o parcialmente, siempre y cuando se cite al Ministerio de Educación (Mineduc) como fuente de origen y que no sea para usos comerciales.

©Ministerio de Educación (Mineduc)
6ª calle 1-87 zona 10.
Teléfono: (502) 24119595
www.mineduc.gob.gt

**Cuarta edición
Impresión 2023**

**Documento de apoyo para estudiantes de
Liceo Pierre de Fermat**

Queridos estudiantes:

El presente texto fue elaborado por el Ministerio de Educación en coordinación con la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media (EFPEM) de la Universidad de San Carlos de Guatemala y el apoyo técnico de la Agencia de Cooperación Internacional de Japón (JICA), por medio del "proyecto de mejoramiento de la calidad de la educación matemática en el ciclo básico".

Es un recurso educativo que favorecerá el desarrollo del pensamiento analítico y reflexivo, a través de las diferentes actividades de aprendizaje. Está diseñado para que puedan trabajar de manera autónoma.

Los invito a continuar estudiando con responsabilidad y dedicación para lograr sus metas y construir un futuro mejor. ¡Juntos saldremos adelante!

Atentamente,



M.Sc. Claudia Ruiz Casasola de Estrada
Ministra de Educación

Presentación del Texto

En cada página del Texto se desarrolla una clase que tiene diferentes momentos y se identifican con las siguientes letras:



La letra P representa el problema inicial. En este momento tiene que leer, comprender el problema y buscar soluciones, tomando en cuenta lo aprendido en clases anteriores. En algunas páginas aparece la letra P con un subíndice, lo que indica que hay más de un problema.



La letra S representa la solución del problema inicial. En algunas páginas aparece la letra S con un subíndice, lo que indica que la solución corresponde al problema con el mismo subíndice.



La letra C representa la conclusión. En la conclusión se le presenta la idea principal de la clase, tales como una definición o un procedimiento. En algunas páginas aparece la letra C con un subíndice que la relaciona con los subíndices del problema y la solución.



La letra E representa los ejercicios. Es para reforzar lo aprendido. Se presentan ejercicios con diferentes niveles de dificultad. En algunas páginas aparece la letra E con un subíndice, lo que indica que hay más de un grupo de ejercicios.

Información complementaria

En el Texto se utilizan íconos que indican lo siguiente.



El Quetzal le indica conceptos nuevos e importantes para comprender el tema de la clase.

La mano le recuerda los conceptos aprendidos en clases anteriores.



Índice

Unidad 1	
Álgebra	5 - 52
Unidad 2	
Función	53 - 76
Unidad 3	
Etnomatemática	77 - 91
Unidad 4	
Geometría	92 - 130
Unidad 5	
Lógica	131 - 147
Unidad 6	
Estadística	148 - 163
Unidad 7	
Aritmética	164 - 177
Unidad 8	
Avanzado	178 - 200

$$+bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Unidad 1 •

Álgebra

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 1 Repaso de producto notable de la forma

$$(x + a)(x + b)$$



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x + 5)(x + 3)$
- b. $(x - 3)(x - 2)$
- c. $(x + 2)(x - 5)$
- d. $(x - 1)(x + 4)$



$$\begin{aligned} \text{a. } (x + 5)(x + 3) &= x^2 + (5 + 3)x + 5 \times 3 \\ &= x^2 + 8x + 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (x - 3)(x - 2) &= x^2 + (-3 - 2)x + (-3) \times (-2) \\ &= x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } (x + 2)(x - 5) &= x^2 + (2 - 5)x + 2 \times (-5) \\ &= x^2 - 3x - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } (x - 1)(x + 4) &= x^2 + (-1 + 4)x + (-1) \times 4 \\ &= x^2 + 3x - 4 \end{aligned}$$



Un producto notable se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x + 3)(x + 4)$
- b. $(x - 2)(x - 4)$
- c. $(x - 2)(x + 5)$
- d. $(x + 1)(x - 4)$
- e. $(x - 1)(x + 5)$
- f. $(x - 6)(x - 2)$
- g. $(x + 5)(x + 6)$
- h. $(x + 3)(x - 1)$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 2 Repaso de productos notables de las formas

$(x + a)^2$, $(x - a)^2$ y $(x + a)(x - a)$



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x + 4)^2$
- b. $(x - 5)^2$
- c. $(x + 3)(x - 3)$
- d. $(x - 6)(x + 6)$



$$\begin{aligned} \text{a. } (x + 4)^2 &= x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 \\ &= x^2 + 8x + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (x - 5)^2 &= x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2 \\ &= x^2 - 10x + 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } (x + 3)(x - 3) &= x^2 - 3^2 \\ &= x^2 - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } (x - 6)(x + 6) &= x^2 - 6^2 \\ &= x^2 - 36 \end{aligned}$$



Los siguientes productos notables se desarrollan:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

$$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$$



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x + 3)^2$
- b. $(x - 4)^2$
- c. $(x + 7)(x - 7)$
- d. $(x - 9)(x + 9)$
- e. $(x - 2)^2$
- f. $(x - 8)(x + 8)$
- g. $(x + 5)^2$
- h. $(x + 2)(x - 2)$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 3 Producto de la forma $(ax + by)^2$



Desarrolle la siguiente expresión.

$$(2x + 3y)^2$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$



$$\begin{aligned}(2x + 3y)^2 &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2 \\ &= 2^2 \times x^2 + 12xy + 3^2 \times y^2 \\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

Se aplica el exponente al coeficiente y a la variable.



El producto de la forma $(ax + by)^2$ es el cuadrado de un binomio y se desarrolla:

$$\begin{aligned}(ax + by)^2 &= (ax)^2 + 2 \times ax \times by + (by)^2 \\ &= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2\end{aligned}$$

Al resultado del cuadrado de un binomio se le llama trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^2 &= (3a)^2 + 2 \times 3a \times 4b + (4b)^2 \\ &= 3^2 \times a^2 + 24ab + 4^2 \times b^2 \\ &= 9a^2 + 24ab + 16b^2\end{aligned}$$



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(2x + 4y)^2$ b. $(3a + 2x)^2$ c. $(2a + 5b)^2$ d. $(4x + 3y)^2$ e. $(5x + 2y)^2$
- f. $(5a + 3b)^2$ g. $(6x + 3y)^2$ h. $(4x + 6y)^2$ i. $(3x + 6y)^2$ j. $(7a + 4b)^2$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 4 Producto de la forma $(ax - by)^2$



Desarrolle la siguiente expresión.

$$(2x - 3y)^2$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$



$$\begin{aligned}(2x - 3y)^2 &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2 \\ &= 2^2 \times x^2 - 12xy + 3^2 \times y^2 \\ &= 4x^2 - 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

Se aplica el exponente al coeficiente y a la variable.



El producto de la forma $(ax - by)^2$ es el cuadrado de un binomio y se desarrolla:

$$\begin{aligned}(ax - by)^2 &= (ax)^2 - 2 \times ax \times by + (by)^2 \\ &= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2\end{aligned}$$

Al resultado del cuadrado de un binomio se le llama trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(4a - 5b)^2 &= (4a)^2 - 2 \times 4a \times 5b + (5b)^2 \\ &= 4^2 \times a^2 - 40ab + 5^2 \times b^2 \\ &= 16a^2 - 40ab + 25b^2\end{aligned}$$



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(2x - 5y)^2$ b. $(4a - 2b)^2$ c. $(3x - 6y)^2$ d. $(2a - 8b)^2$ e. $(5a - 6x)^2$
- f. $(5x - 3y)^2$ g. $(6x - 4y)^2$ h. $(7a - 3b)^2$ i. $(4x - 5y)^2$ j. $(6a - 7b)^2$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 5 Producto de la forma $(ax + by)(ax - by)$



Desarrolle la siguiente expresión.

$$(3x + 4y)(3x - 4y)$$

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$



$$\begin{aligned}(3x + 4y)(3x - 4y) &= (3x)^2 - (4y)^2 \\ &= 3^2 \times x^2 - 4^2 \times y^2 \\ &= 9x^2 - 16y^2\end{aligned}$$

Se eleva al cuadrado cada uno de los términos.

Se aplica el exponente al coeficiente y a la variable.



El producto de la forma $(ax + by)(ax - by)$ es una suma por la diferencia de binomios y se desarrolla:

$$\begin{aligned}(ax + by)(ax - by) &= (ax)^2 - (by)^2 \\ &= a^2x^2 - b^2y^2\end{aligned}$$

Al resultado de la suma por la diferencia de binomios se le llama diferencia de cuadrados.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(2x + 5y)(2x - 5y) &= (2x)^2 - (5y)^2 \\ &= 2^2 \times x^2 - 5^2 \times y^2 \\ &= 4x^2 - 25y^2\end{aligned}$$



Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(2x + 4y)(2x - 4y)$

b. $(4a - 2b)(4a + 2b)$

c. $(3x + 6y)(3x - 6y)$

d. $(2x - 7y)(2x + 7y)$

e. $(5a + 6b)(5a - 6b)$

f. $(8a - 7b)(8a + 7b)$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 6 Combinación de productos notables



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x + 2)(x + 1) - (x + 4)^2$
b. $(y - 3)^2 + (y - 2)(y + 5)$



- a. Los productos son de la forma $(x + a)(x + b)$ y cuadrado de un binomio. Desarrolle cada producto y reduzca los términos semejantes.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 1) - (x + 4)^2 &= x^2 + (2 + 1)x + 2 \times 1 - (x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2) \\ &= x^2 + 3x + 2 - (x^2 + 8x + 16) \\ &= x^2 + 3x + 2 - x^2 - 8x - 16 \\ &= -5x - 14\end{aligned}$$

- b. Los productos son cuadrado de un binomio y producto de la forma $(x + a)(x - b)$. Desarrolle cada producto y reduzca los términos semejantes.

$$\begin{aligned}(y - 3)^2 + (y - 2)(y + 5) &= y^2 - 2 \times 3 \times y + 3^2 + y^2 + (-2 + 5)y + (-2) \times 5 \\ &= y^2 - 6y + 9 + y^2 + 3y - 10 \\ &= 2y^2 - 3y - 1\end{aligned}$$



Para desarrollar combinaciones de productos notables:

Paso 1. Se identifican los productos notables en la expresión.

Paso 2. Se encuentran los productos teniendo en cuenta los signos.

Paso 3. Se reducen los términos semejantes, si hay.



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x + 1)(x + 3) - (x - 2)^2$ b. $(y + 6)^2 + (y + 3)(y - 8)$
c. $(x + 2)(x - 2) + (x + 3)^2$ d. $(2y - 1)^2 - (y - 3)(y + 4)$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 7 Operaciones usando productos notables



Si $a^2 + b^2 = 10$ y $ab = 3$, ¿cuál es el valor numérico de $(a + b)^2$?



Observe que $a^2 + b^2$ y ab están en el desarrollo del cuadrado de un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \quad \text{Se agrupa } a^2 + b^2.$$

$$= 10 + 2 \times 3 \quad \text{Se sustituyen los valores.}$$

$$= 16$$

Respuesta: el valor numérico de $(a + b)^2$ es 16.



Calcule la siguiente expresión usando productos notables.

$$99 \times 101$$



Los números 99 y 101 pueden escribirse como $100 - 1$ y $100 + 1$, respectivamente. Es un producto de la suma y la diferencia de binomios:

$$99 \times 101 = (100 - 1)(100 + 1)$$

$$= 100^2 - 1^2$$

$$= 10,000 - 1$$

$$= 9,999$$

En una multiplicación, el orden de los factores no altera el producto:

$$(100 - 1)(100 + 1) = (100 + 1)(100 - 1)$$



1. Resuelva.

a. Si $a^2 + b^2 = 13$ y $ab = 6$, ¿cuál es el valor numérico de $(a + b)^2$?

b. Si $a^2 + b^2 = 17$ y $ab = 4$, ¿cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$?

2. Calcule las siguientes expresiones usando productos notables.

a. 97×103

b. 102^2

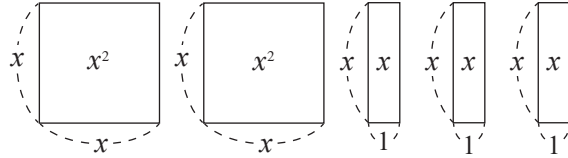
c. 98^2

Sección 2 Factorización

Clase 1 Factorización de polinomios



Se quiere construir un rectángulo con las siguientes piezas.
Dos cuadrados de lado x y tres rectángulos de base 1 y altura x .



- Si se suman las cinco figuras, ¿cuál es el área total?
- ¿Cómo se forma un solo rectángulo con las figuras?
- Expresa el área total del rectángulo formado en el inciso b, como el producto de la base y la altura.

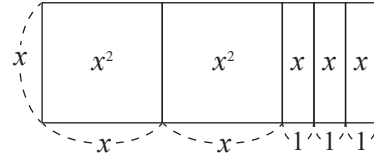


- El área de cada cuadrado es x^2 y de cada rectángulo es x . Por tanto, el área total se calcula:

$$x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$$

Respuesta: el área total es $2x^2 + 3x$.

- El rectángulo puede formarse:



- Las medidas de la base y altura del rectángulo formado son:

Base $\longrightarrow 2x + 3$

Altura $\longrightarrow x$

Por tanto, el área del rectángulo es:

$$(2x + 3) \times x = x(2x + 3)$$

Las expresiones de los incisos a y c muestran el área del rectángulo.

Se puede formar un solo rectángulo de diferentes formas dando como resultado un área equivalente.



A expresar un polinomio como el producto de sus factores se le llama **factorizar**. En este caso, el polinomio $2x^2 + 3x$ tiene como factores x y $2x + 3$. Una factorización puede describirse como el proceso inverso del desarrollo del producto de factores.

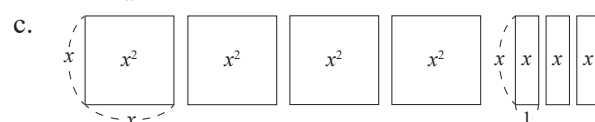
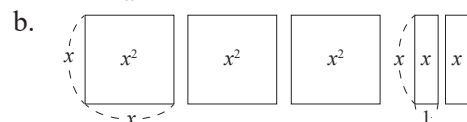
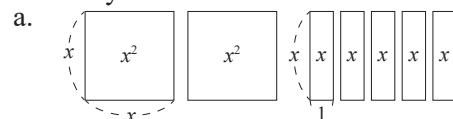
Factorizar $\longrightarrow$

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3)$$

$\longleftarrow$ Desarrollar el producto



En cada inciso forme un rectángulo con las figuras dadas y exprese el área total como el producto de su base y la altura.



Sección 2 Factorización

Clase 2 Factor común



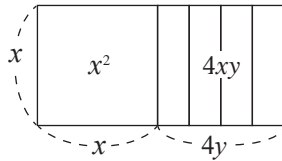
Factorice la siguiente expresión.

$$x^2 + 4xy$$



$x^2 + 4xy$ se expresa como el producto de sus factores. Se forma un rectángulo con un cuadrado de lado x y cuatro rectángulos de base y y altura x . El área del rectángulo es:

$$x^2 + 4xy$$



Para factorizar la expresión se representa cada término del polinomio en forma de multiplicación.

$$x^2 = x \times x$$

$$4xy = 4 \times x \times y$$

$x^2 + 4xy = \underline{x} \times x + \underline{x} \times 4y$ Se identifica el factor común en cada término del polinomio.

$$= x(x + 4y) \quad \text{Se aplica la propiedad distributiva.}$$

Propiedad distributiva:
 $ab + ac = a(b + c)$



Si todos los términos del polinomio tienen un factor común, entonces se factoriza el polinomio aplicando la propiedad distributiva y teniendo el factor como uno de los factores. El otro factor se obtiene dividiendo el polinomio entre el factor común.

Ejemplo:

$$5b^2 - 10ab$$

Identifique el factor común en cada término del polinomio.

$$5b^2 = 5 \times b \times b$$

$$10ab = 2 \times 5 \times a \times b$$

$5b^2 - 10ab = \underline{5} \times \underline{b} \times b - 2 \times \underline{5} \times a \times \underline{b}$ Se identifica el factor común en cada término del polinomio.

$$= 5b(b - 2a)$$

Se divide el polinomio entre $5b$ y se aplica la propiedad distributiva.

El factor común de los coeficientes es el máximo común divisor entre ellos.



Factorice las siguientes expresiones.

a. $3x^2 + 4x$

b. $5x - 4x^2$

c. $2x + 2$

d. $6ab + 12a$

e. $x^2y - xy^2$

f. $5xy^2 - 5x^2y + 10xy$

g. $7y + 14xy - 21y^2$

Sección 2 Factorización

Clase 3 Ejercicios de factor común



Factorice las siguientes expresiones.

a. $3x + 9$

b. $8x + 12$

c. $42x + 54$

d. $36x + 63$

e. $35x + 28$

f. $2ab - 6ac$

g. $3xy - 12xz$

h. $12ab + 9bc$

i. $18ax - 12bx$

j. $8abc + 6ab$

k. $2x^2 - 3x$

l. $x^3 - x$

m. $4a^2 + 12ab$

n. $3x^4 - 7x^2$

o. $5y^3 + 15y^4$

p. $3ax^2 + 6ay$

q. $3x^2y - 4xy^2$

r. $2x^2y^2 - 6xy^3$

s. $a^3b^2 + 3a^2b^3$

t. $a^3bc - abc^3$

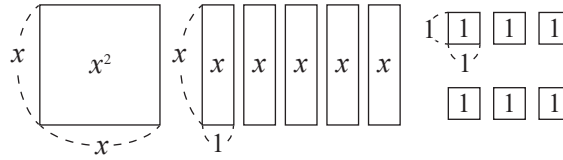
Sección 2 Factorización

Clase 4 Factorización de trinomio de la forma

$$x^2 + (a + b)x + ab \text{ (1)}$$



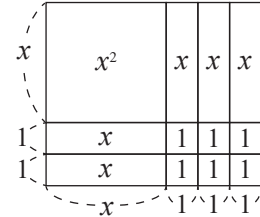
Las siguientes piezas tienen un área total de $x^2 + 5x + 6$.



- ¿Es posible formar un solo rectángulo con todas las piezas?
- Expresa el área total del rectángulo formado en el inciso a, como el producto de la base y la altura.
- ¿Cómo se factoriza $x^2 + 5x + 6$?



- Puede formarse un rectángulo como la figura que está a la derecha.
- El área del rectángulo formado se obtiene con los factores $(x + 2)(x + 3)$ o $(x + 3)(x + 2)$.
- El producto notable $(x + 2)(x + 3)$ es de la forma $(x + a)(x + b)$ y puede desarrollarse de la siguiente manera:



$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

suma a y b

producto a y b

En este caso, se tiene que $ab = 6$ y $a + b = 5$. Ahora se buscan dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 5.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab = 6$ y $a + b = 5$?
1 y 6	6	7	No
-1 y -6	6	-7	No
2 y 3	6	5	Sí
-2 y -3	6	-5	No

Del cuadro se nota que $a = 2$ y $b = 3$ cumplen con ambas condiciones. Entonces, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.



Un trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ se expresa como el producto notable $(x + a)(x + b)$, encontrando dos números a y b cuyo producto sea el término independiente y cuya suma sea el coeficiente de x .

Ejemplo:

$$y^2 + 13y + 42$$

Busque dos números cuyo producto sea 42 y cuya suma sea 13.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab = 42$ y $a + b = 13$?
1 y 42	42	43	No
-1 y -42	42	-43	No
2 y 21	42	23	No
-2 y -21	42	-23	No
3 y 14	42	17	No
-3 y -14	42	-17	No
6 y 7	42	13	Sí
-6 y -7	42	-13	No

Por tanto, $y^2 + 13y + 42 = (y + 6)(y + 7)$.



Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2 + 4x + 3$

b. $x^2 + 6x + 8$

c. $x^2 + 9x + 20$

d. $a^2 + 7a + 10$

e. $c^2 + 8c + 15$

f. $x^2 + 11x + 30$

g. $b^2 + 14b + 48$

h. $x^2 + 10x + 21$

i. $y^2 + 15y + 36$

Sección 2 Factorización

Clase 5 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ (1)



Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2 + 9x + 18$

b. $x^2 + 8x + 15$

c. $x^2 + 15x + 54$

d. $x^2 + 13x + 42$

e. $x^2 + 10x + 16$

f. $x^2 + 11x + 18$

g. $x^2 + 15x + 56$

h. $x^2 + 12x + 32$

i. $x^2 + 11x + 24$

j. $x^2 + 16x + 63$

k. $x^2 + 11x + 28$

l. $x^2 + 17x + 72$

m. $x^2 + 14x + 45$

n. $x^2 + 13x + 36$

o. $x^2 + 13x + 40$

p. $x^2 + 9x + 14$

q. $x^2 + 10x + 24$

r. $x^2 + 8x + 12$

s. $x^2 + 12x + 27$

t. $x^2 + 7x + 12$

Sección 2 Factorización

Clase 6 Factorización de trinomio de la forma

$$x^2 + (a + b)x + ab \quad (2)$$



Factorice las siguientes expresiones.

- a. $x^2 - 15x + 54$
b. $y^2 - 6y - 40$



- a. Busque dos números cuyo producto sea 54 y cuya suma sea -15. Como la suma es negativa y el producto es positivo, ambos números deben ser negativos.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab = 54$ y $a + b = -15$?
-1 y -54	54	-55	No
-2 y -27	54	-29	No
-3 y -18	54	-21	No
-6 y -9	54	-15	Sí

$$\begin{aligned} x^2 - 15x + 54 &= [x + (-6)][x + (-9)] \\ &= (x - 6)(x - 9) \end{aligned}$$

- b. Para el trinomio $y^2 - 6y - 40$ se buscan dos números cuyo producto sea -40 y cuya suma sea -6. Como el producto es negativo, entonces uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab = -40$ y $a + b = -6$?
-1 y 40	-40	39	No
1 y -40	-40	-39	No
-2 y 20	-40	18	No
2 y -20	-40	-18	No
-4 y 10	-40	6	No
4 y -10	-40	-6	Sí

$$\begin{aligned} y^2 - 6y - 40 &= [y + (+4)][y + (-10)] \\ &= (y + 4)(y - 10) \end{aligned}$$

En la tabla faltan las parejas 5, -8 y -5, 8 porque ya se han encontrado los números que satisfacen la condición.



Forma	Procedimiento
$x^2 + ax + b$	Se buscan dos números cuyo producto sea un número positivo y cuya suma también sea un número positivo.
$x^2 - ax + b$	Se buscan dos números cuyo producto sea un número positivo y cuya suma sea un número negativo.
$x^2 + ax - b$	Se buscan dos números cuyo producto sea un número negativo y cuya suma sea un número positivo.
$x^2 - ax - b$	Se buscan dos números cuyo producto sea un número negativo y cuya suma también sea un número negativo.



Factorice las siguientes expresiones.

- a. $x^2 - 7x + 10$ b. $x^2 - x - 12$ c. $a^2 - 7a + 6$
d. $b^2 - 2b - 15$ e. $y^2 - 11y + 10$ f. $c^2 - 9c + 18$
g. $z^2 - z - 30$ h. $x^2 - 9x + 14$ i. $x^2 - 5x - 36$

Sección 2 Factorización

Clase 7 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ (2)



Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2 - 9x + 18$

b. $x^2 - 3x - 54$

c. $x^2 + 2x - 48$

d. $x^2 - 10x + 24$

e. $x^2 - 6x - 27$

f. $x^2 - 4x - 21$

g. $x^2 - 15x + 56$

h. $x^2 - 13x + 42$

i. $x^2 - 14x + 48$

j. $x^2 - 7x + 12$

k. $x^2 - 8x + 12$

l. $x^2 - x - 42$

m. $x^2 + 5x - 36$

n. $x^2 - 4x - 45$

o. $x^2 + 4x - 32$

p. $x^2 - x - 56$

q. $x^2 + 3x - 54$

r. $x^2 + 6x - 16$

s. $x^2 - 16x + 63$

t. $x^2 - 12x + 27$

Sección 2 Factorización

Clase 8 Factorización de diferencia de cuadrados



Factorice la siguiente expresión.

$$x^2 - 25$$



$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= x^2 - 5^2 \\ &= (x + 5)(x - 5) \end{aligned}$$

$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$
 $(x + a)(x - a) = (x - a)(x + a)$
 Porque la multiplicación es conmutativa.



Una diferencia de cuadrados se factoriza como el producto de la suma y la diferencia de la raíz cuadrada de cada uno de los términos que conforman la expresión.

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{a. } a^2 - 36 &= a^2 - 6^2 \\ &= (a + 6)(a - 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 4x^2 - 9 &= (2x)^2 - 3^2 \\ &= (2x + 3)(2x - 3) \end{aligned}$$

$$4x^2 = 2^2 \times x^2 = (2x)^2$$



Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2 - 4$

b. $a^2 - 16$

c. $y^2 - 49$

d. $b^2 - 64$

e. $9a^2 - 4b^2$

f. $4y^2 - 16z^2$

g. $9a^2 - 36b^2$

h. $25x^2 - 100y^2$

Sección 2 Factorización

Clase 9 Ejercicios de factorización de diferencia de cuadrados



Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2 - 1$

b. $x^2 - 9$

c. $x^2 - 16$

d. $x^2 - 36$

e. $x^2 - 49$

f. $x^2 - 64$

g. $x^2 - 81$

h. $x^2 - 100$

i. $x^2 - 121$

j. $x^2 - 144$

k. $x^2 - 169$

l. $x^2 - 196$

m. $x^2 - 225$

n. $x^2 - 400$

o. $x^2 - 900$

p. $x^2 - 1,600$

q. $x^2 - 2,500$

r. $x^2 - 3,600$

Sección 2 Factorización

Clase 10 Factorización de trinomio cuadrado perfecto



Factorice las siguientes expresiones.

- a. $x^2 + 8x + 16$
b. $a^2 - 10a + 25$



a. Forma 1.

Para factorizar $x^2 + 8x + 16$, se buscan dos números positivos cuyo producto sea +16 y cuya suma sea +8.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen ambas condiciones?
16 y 1	16	17	No
8 y 2	16	10	No
4 y 4	16	8	Sí

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 16 &= (x + 4)(x + 4) \\ &= (x + 4)^2 \end{aligned}$$

Forma 2.

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & + & 8x & + & 16 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & 2 \times 4 & & 4^2 & \end{array}$$

En la expresión, se observa $8 = 2 \times 4$ y $16 = 4^2$. Es decir, la expresión es un trinomio cuadrado perfecto.

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 16 &= x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 \\ &= (x + 4)^2 \end{aligned}$$

b. Forma 1.

Para factorizar $a^2 - 10a + 25$, se buscan dos números negativos cuyo producto sea +25 y cuya suma sea -10.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen ambas condiciones?
-1 y -25	25	-26	No
-5 y -5	25	-10	Sí

$$\begin{aligned} a^2 - 10a + 25 &= (a - 5)(a - 5) \\ &= (a - 5)^2 \end{aligned}$$

Forma 2.

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\begin{array}{ccc} a^2 & - & 10a & + & 25 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & 2 \times 5 & & 5^2 & \end{array}$$

En la expresión, se observa $10 = 2 \times 5$ y $25 = 5^2$. Es decir, la expresión es un trinomio cuadrado perfecto.

$$\begin{aligned} a^2 - 10a + 25 &= a^2 - 2 \times 5 \times a + 5^2 \\ &= (a - 5)^2 \end{aligned}$$



A un trinomio de la forma $x^2 + 2ax + a^2$ o $x^2 - 2ax + a^2$ se le llama trinomio cuadrado perfecto. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax + a^2 &= (x + a)^2 \\ x^2 - 2ax + a^2 &= (x - a)^2 \end{aligned}$$



Factorice las siguientes expresiones.

- a. $x^2 + 18x + 81$ b. $a^2 + 2a + 1$ c. $y^2 - 6y + 9$ d. $x^2 - 16x + 64$
e. $b^2 + 12b + 36$ f. $z^2 - 14z + 49$ g. $x^2 + 10x + 25$ h. $c^2 - 8c + 16$

Sección 2 Factorización

Clase 11 Ejercicios de factorización de trinomio cuadrado perfecto



Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2 + 4x + 4$

b. $x^2 + 6x + 9$

c. $x^2 - 8x + 16$

d. $x^2 - 10x + 25$

e. $x^2 + 12x + 36$

f. $x^2 - 2x + 1$

g. $x^2 - 4x + 4$

h. $x^2 + 20x + 100$

i. $x^2 - 20x + 100$

j. $x^2 + 16x + 64$

k. $x^2 - 14x + 49$

l. $x^2 + 2x + 1$

m. $x^2 - 18x + 81$

n. $x^2 - 12x + 36$

o. $x^2 - 6x + 9$

p. $x^2 + 14x + 49$

Sección 2 Factorización

Clase 12 Factorización de trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$



Factorice la siguiente expresión.

$$3x^2 + 9x + 6$$



$$\begin{aligned} 3x^2 + 9x + 6 &= 3 \times x^2 + 3 \times 3 \times x + 3 \times 2 \\ &= 3(x^2 + 3x + 2) \end{aligned}$$

Se identifica el factor común del polinomio.

¡El factor $x^2 + 3x + 2$ también puede factorizarse!



$$= 3(x + 1)(x + 2)$$

Se factoriza $x^2 + 3x + 2$ de la forma $(x + a)(x + b)$. Se encuentran dos números positivos a y b cuyo producto sea $+2$ y cuya suma sea $+3$. En este caso, los números son 1 y 2.



Para factorizar un polinomio, primero se verifica si sus términos tienen un factor común. Si lo tienen, se extrae este factor. Luego, se factoriza el resto de la expresión utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores, si es posible.



Factorice las siguientes expresiones.

a. $2x^2 + 18x + 40$

b. $5x^2 + 50x + 45$

c. $4x^2 + 24x + 32$

d. $6x^2 + 30x + 36$

e. $7x^2 + 63x + 56$

f. $5x^2 + 35x + 60$

g. $2x^2 + 12x + 10$

h. $4x^2 + 32x + 60$

i. $6x^2 + 48x + 42$

Sección 2 Factorización

Clase 13 Factorización de trinomio de la forma $ax^2 + bx - c$



Factorice la siguiente expresión.

$$2x^2 + 2x - 12$$



$$2x^2 + 2x - 12 = 2 \times x^2 + 2 \times x - 2 \times 6$$

$$= 2(x^2 + x - 6)$$

$$= 2(x - 2)(x + 3)$$

Se identifica el factor común del polinomio.

Se factoriza $x^2 + x - 6$ de la forma $(x + a)(x + b)$. Se encuentran los números a y b cuyo producto sea -6 y cuya suma sea $+1$. En este caso, los números son -2 y 3 .



Para factorizar un polinomio, primero se verifica si sus términos tienen un factor común. Si lo tienen, se extrae este factor. Luego, se factoriza el resto de la expresión utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores, si es posible.



Factorice las siguientes expresiones.

a. $2x^2 + 2x - 4$

b. $2x^2 - 14x + 24$

c. $4x^2 - 16x + 12$

d. $3x^2 - 21x + 30$

e. $4x^2 - 4x - 24$

f. $2x^2 - 4x - 30$

g. $5x^2 + 15x - 50$

h. $3x^2 - 3x - 60$

i. $2x^2 - 4x - 70$

Sección 2 Factorización

Clase 14 Factorización de binomio de la forma $ax^2 - b$



Factorice la siguiente expresión.

$$4x^2 - 16$$

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$



$$4x^2 - 16 = 4(x^2 - 4)$$

Se identifica el factor común del polinomio.

$$= 4(x^2 - 2^2)$$

$$= 4(x + 2)(x - 2)$$

Se factoriza $(x^2 - 4)$ de la forma $(x + a)(x - a)$.



Para factorizar un polinomio, primero se verifica si sus términos tienen un factor común. Si lo tienen, se extrae este factor. Luego, se factoriza el resto de la expresión utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores, si es posible.



Factorice las siguientes expresiones.

a. $2x^2 - 8$

b. $4x^2 - 36$

c. $3x^2 - 75$

d. $2x^2 - 32$

e. $5x^2 - 180$

f. $4x^2 - 64$

g. $6x^2 - 24$

h. $5x^2 - 500$

i. $8x^2 - 32$

Sección 2 Factorización

Clase 15 Factorizaciones combinadas



Factorice las siguientes expresiones.

- a. $-3x^2 + 36x - 108$
b. $196 - 4x^2$



a. $-3x^2 + 36x - 108$

$$= -3 \times x^2 + (-3) \times (-12x) + (-3) \times 36$$

$$= -3(x^2 - 12x + 36)$$

$$= -3(x - 6)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Se identifica el factor común del polinomio.

Se factoriza.

b. $196 - 4x^2 = 4(49 - x^2)$

$$= 4(7 + x)(7 - x)$$

Se identifica el factor común del polinomio.

Se factoriza.



Para factorizar un polinomio, primero se verifica si sus términos tienen un factor común. Si lo tienen, se extrae este factor. Luego, se factoriza el resto de la expresión utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores, si es posible.



Factorice las siguientes expresiones.

- | | | |
|-----------------------|-----------------|-----------------------|
| a. $2x^2 - 2x - 40$ | b. $3x^2 - 75$ | c. $5x^2 - 40x + 80$ |
| d. $3x^2 - 39x + 126$ | e. $18 - 2x^2$ | f. $3x^2 - 18x + 27$ |
| g. $-4x^2 - 36x - 72$ | h. $125 - 5t^2$ | i. $-6x^2 - 36x + 96$ |

Sección 2 Factorización

Clase 16 Operaciones aritméticas usando factorización



Factorice las siguientes expresiones.

- $45^2 - 25^2$
- $101^2 - 1$



a. La expresión es una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 45^2 - 25^2 &= (45 + 25)(45 - 25) \\ &= 70 \times 20 \\ &= 1,400 \end{aligned}$$

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$



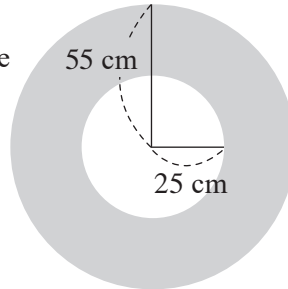
b. La expresión es una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 101^2 - 1 &= (101 + 1)(101 - 1) \\ &= 102 \times 100 \\ &= 10,200 \end{aligned}$$

$$1^2 = 1$$



Encuentre el área de la región sombreada. Expresé el resultado en términos de π .



Cuando dos circunferencias tienen el mismo centro se llaman **concéntricas**. A la región delimitada por dos circunferencias concéntricas se le llama **corona circular**.



El círculo mayor tiene radio 55 cm. Entonces, el área se encuentra:

$$\pi \times 55^2 = 55^2 \pi$$

El círculo menor tiene radio 25 cm. Entonces, el área se encuentra:

$$\pi \times 25^2 = 25^2 \pi$$

Por tanto, el área de la región sombreada es:

$$\begin{aligned} 55^2 \pi - 25^2 \pi &= (55^2 - 25^2) \pi && \text{Se extrae el factor común } \pi. \\ &= (55 + 25)(55 - 25) \pi && \text{Se factoriza como diferencia de cuadrados.} \\ &= 80 \times 30 \times \pi && \text{Se multiplican los factores.} \\ &= 2,400 \pi && \text{Se expresa el resultado en términos de } \pi. \end{aligned}$$

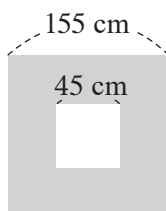
Respuesta: el área de la región sombreada es $2,400\pi \text{ cm}^2$.



1. Calcule las siguientes expresiones utilizando factorización.

- $35^2 - 25^2$
- $45^2 - 35^2$
- $99^2 - 1$

2. Encuentre el área de la región sombreada. Ambos cuadriláteros son cuadrados.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

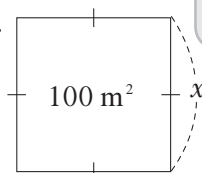
Clase 1 Sentido y definición de ecuación de segundo grado



Don Antonio tiene un terreno de forma cuadrada para cultivar maíz. Si el terreno tiene 100 m^2 de área, ¿cómo se puede encontrar la medida de sus lados? Plantee una ecuación.



Represente gráficamente la situación:
Utilice x para simbolizar la longitud del lado.



Área de un cuadrado = lado $\times$ lado



El área del terreno es de 100 m^2 . Entonces, se puede plantear la ecuación:

$$x^2 = 100$$

Para determinar la medida de los lados del terreno, resuelva la ecuación planteada.

Si se transpone el 100, la ecuación se puede expresar como $x^2 - 100 = 0$, donde la incógnita está elevada al cuadrado.

Respuesta: la medida de los lados se puede encontrar resolviendo la ecuación $x^2 - 100 = 0$.



A una ecuación, en la que el grado de la incógnita x es 2, se le llama **ecuación de segundo grado**.

En general, se define una ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b, c son números racionales y $a \neq 0$.

Las siguientes expresiones son ejemplos de ecuaciones de segundo grado:

$$2x^2 - 3 = 0, 9x^2 - 3 = 0, (x + 5)^2 - 16 = 0, x^2 + 4x + 1 = 0$$

A una ecuación de segundo grado también se le llama **ecuación cuadrática**.



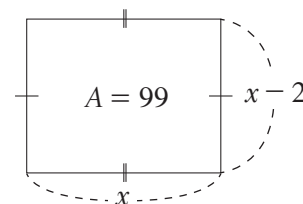
Ejemplo:

Don Luis tiene un terreno rectangular cuya altura tiene 2 m menos que la base y cuya área es de 99 m^2 . Entonces, la ecuación del área donde la base es x se representa:

$$(\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}) \quad x(x - 2) = 99$$

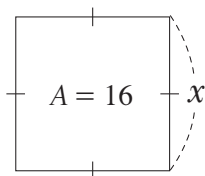
$$x^2 - 2x = 99$$

$$x^2 - 2x - 99 = 0$$

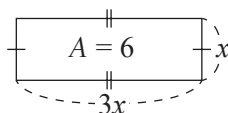


Plantee la ecuación para encontrar la longitud desconocida en cada figura.

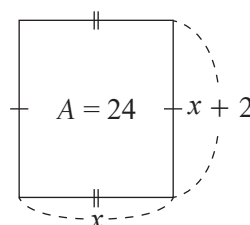
a.



b.



c.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 2 Solución de una ecuación de segundo grado



Determine cuáles de los siguientes números son solución de cada ecuación, -4 , -3 , 3 , 4 .

a. $3x = 12$

b. $x^2 - x - 12 = 0$

Sustituya la variable x por los valores indicados y confirme si el valor del miembro izquierdo es igual al valor del miembro derecho. Si los valores de los miembros son iguales, el valor utilizado en la variable x es solución de la ecuación. Si no son iguales, no es solución.



Sustituya x por -4 en el miembro izquierdo.

a. $3 \times (-4) = -12$

b. $(-4)^2 - (-4) - 12$
 $= 16 + 4 - 12$
 $= 8$

-4 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Sustituya x por -3 en el miembro izquierdo.

a. $3 \times (-3) = -9$

b. $(-3)^2 - (-3) - 12$
 $= 9 + 3 - 12$
 $= 0$

-3 es solución solo de la ecuación b.

Sustituya x por 3 en el miembro izquierdo.

a. $3 \times 3 = 9$

b. $3^2 - 3 - 12$
 $= 9 - 3 - 12$
 $= -6$

3 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Sustituya x por 4 en el miembro izquierdo.

a. $3 \times 4 = 12$

b. $4^2 - 4 - 12$
 $= 16 - 4 - 12$
 $= 0$

4 es la solución de ambas ecuaciones.

Por tanto, la ecuación de primer grado (a) tiene una solución (4) y la ecuación de segundo grado (b) tiene dos soluciones (4 o -3).



A los valores de la incógnita que cumplen una ecuación de segundo grado se les llama soluciones.

El proceso de resolver una ecuación de segundo grado es encontrar las soluciones de ella. En la ecuación de segundo grado se pueden encontrar hasta dos soluciones.

Una ecuación de primer grado tiene una solución.



Encuentre las soluciones de cada ecuación entre los números en los paréntesis.

a. $x^2 - 4 = 0$ $(-2, -1, 1, 2)$

b. $x^2 + x - 6 = 0$ $(-3, -2, 2, 3)$

c. $x^2 - 2x - 3 = 0$ $(-3, -1, 1, 3)$

d. $x^2 + 2x - 8 = 0$ $(-4, -2, 2, 4)$

e. $x^2 - 9 = 0$ $(-3, -2, 2, 3)$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 3 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 = b$



Resuelva la siguiente ecuación.

$$x^2 = 100$$



Para resolver esta ecuación se utiliza la idea de las raíces cuadradas de un número.

$x^2 = 100$ significa que al elevar x al cuadrado da como resultado 100.

Entonces, $x = \pm\sqrt{100}$.

Es decir, $x = \pm 10$.

Elevar un número al cuadrado da el mismo resultado que elevar el negativo del número al cuadrado:
 $3^2 = (-3)^2 = 9$



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 = b$:

Paso 1. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de b .
 $x = \pm\sqrt{b}$, se lee como “ x es igual a más o menos la raíz cuadrada de b ”.

Paso 2. Se expresa la raíz cuadrada sin el símbolo radical.

$x = \pm\sqrt{b}$ muestra que $x = \sqrt{b}$ o $x = -\sqrt{b}$ son soluciones de la ecuación $x^2 = b$.



Ejemplo:

a. $x^2 - 81 = 0$

$$x^2 = 0 + 81$$

Se traslada 81 al miembro derecho de la ecuación.

$$x^2 = 81$$

$$x = \pm\sqrt{81}$$

Se resuelve la ecuación.

$$x = \pm 9$$

Se expresa la raíz cuadrada sin el símbolo radical.

b. $x^2 = 9$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 = 16$

b. $x^2 - 4 = 0$

c. $x^2 = 36$

d. $x^2 - 25 = 0$

e. $x^2 - 64 = 0$

f. $x^2 = 49$

g. $x^2 - 121 = 0$

h. $x^2 = 144$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 4 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = b$



Rosa y Luis juegan a los desafíos. Rosa le dice a Luis: “estoy pensando un número que multiplicado por su triple da como resultado 12”. ¿Cómo puede determinar Luis el número que está pensando Rosa?



Si representa el número que está pensando Rosa como x , el triple del número sería $3x$.

Un número multiplicado por su triple es 12.

$$x \times 3x = 12$$

Se plantea la ecuación con las condiciones dadas.

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 3.

$$x = \pm\sqrt{4}$$

Se resuelve la ecuación.

$$x = \pm 2$$

Se expresa la raíz cuadrada sin el símbolo radical.

Respuesta: el número que está pensando Rosa podría ser $+2$ o -2 .



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = b$:

Paso 1. Ambos miembros de la ecuación se dividen entre a .

$$ax^2 = b \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{b}{a}$$

Paso 2. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas.

$$x^2 = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Paso 3. Se expresa la raíz cuadrada sin el símbolo radical o se simplifica a su mínima expresión.

$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Observe que si a y b tienen signo diferente, el resultado de $\frac{b}{a}$ sería negativo. Entonces, la ecuación no tendría solución, porque las raíces cuadradas de números negativos no están definidas.



Ejemplo:

$$2x^2 = 72$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $2x^2 = 32$

b. $-3x^2 = -27$

c. $2x^2 = 10$

d. $2x^2 - 18 = 0$

e. $5x^2 = 75$

f. $3x^2 - 6 = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 5 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x + m)^2 = n$ (1)



Resuelva la siguiente ecuación.

$$(x + 1)^2 = 25$$



$$(x + 1)^2 = 25$$

$$Y^2 = 25$$

$$Y = \pm\sqrt{25}$$

$$Y = \pm 5$$

Se sustituye $x + 1$ por Y .

Se resuelve la ecuación.

Sustituya Y por la expresión inicial.

$$x + 1 = \pm 5$$

$$x + 1 = 5 \quad \text{o} \quad x + 1 = -5$$

$$x = 5 - 1$$

$$x = 4$$

$$x = -5 - 1$$

$$x = -6$$

$x + 1 = \pm 5$ significa $x + 1 = +5$ o $x + 1 = -5$.



Se sustituye el valor de Y por $x + 1$ y se resuelve para x .

Se resta 1 en cada miembro de la ecuación.

Respuesta: $x = 4$ o -6



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $(x + m)^2 = n$:

Paso 1. Se sustituye $x + m$ por Y .

$$Y^2 = n$$

Paso 2. Se resuelve la ecuación de la forma $x^2 = c$.

$$Y = \pm\sqrt{n}$$

Paso 3. Se sustituye Y por la expresión inicial.

$$x + m = \pm\sqrt{n}$$

Paso 4. Se resuelve para x .

$$x = -m \pm \sqrt{n}$$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $(x + 2)^2 = 9$

b. $(x - 3)^2 = 36$

c. $(x - 4)^2 = 25$

d. $(x + 3)^2 = 16$

e. $(x - 5)^2 = 4$

f. $(x + 4)^2 = 49$

g. $(x - 6)^2 = 16$

h. $(x + 5)^2 = 25$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 6 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x + m)^2 = n$ (2)



Resuelva la siguiente ecuación.

$$(x - 3)^2 = 7$$



$$(x - 3)^2 = 7$$

$$Y^2 = 7$$

$$Y = \pm\sqrt{7}$$

Se sustituye $x - 3$ por Y .

Se resuelve la ecuación.

Sustituya Y por la expresión inicial.

$$x - 3 = \pm\sqrt{7}$$

$$x = 3 \pm\sqrt{7}$$

Se sustituye el valor de Y por $x - 3$ y se resuelve para x .

Se suma 3 en cada miembro de la ecuación.

$3 \pm \sqrt{7}$ significa $3 + \sqrt{7}$
o $3 - \sqrt{7}$.



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $(x + m)^2 = n$:

Paso 1. Se sustituye $x + m$ por Y .

$$Y^2 = n$$

Paso 2. Se resuelve la ecuación de la forma $x^2 = c$.

$$Y = \pm\sqrt{n}$$

Paso 3. Se sustituye Y por la expresión inicial.

$$x + m = \pm\sqrt{n}$$

Paso 4. Se resuelve para x .

$$x = -m \pm \sqrt{n}$$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $(x + 2)^2 = 5$

b. $(x - 4)^2 = 2$

c. $(x + 1)^2 - 7 = 0$

d. $(x - 4)^2 - 3 = 0$

e. $(x + 3)^2 = 6$

f. $(x - 5)^2 = 11$

g. $(x + 6)^2 - 6 = 0$

h. $(x - 5)^2 - 13 = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 7 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$



Resuelva la siguiente ecuación.

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$



Transforme a la forma $(x + m)^2 = n$ y aplique lo visto en las clases anteriores.

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$x^2 + 8x = 0 + 20$$

$$x^2 + 8x = 20$$

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2 \times 1}\right)^2 = 20 + \left(\frac{8}{2 \times 1}\right)^2$$

Se suma la expresión $\left(\frac{8}{2 \times 1}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación para completar un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 8x + 4^2 = 20 + 4^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = 36$$

La expresión del miembro izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 = 36$$

$$(x + 4)^2 = 36$$

Se factoriza como binomio al cuadrado.

$$x + 4 = \pm \sqrt{36}$$

$$x = \pm 6 - 4$$

Se traslada 4 al miembro derecho de la ecuación.

$$x = 6 - 4 \text{ o } x = -6 - 4$$

$$x = 2 \quad x = -10$$

Respuesta: $x = 2$ o -10

En el desarrollo del cuadrado de un binomio se obtiene la siguiente expresión:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

El término a^2 puede obtenerse al dividir el coeficiente que acompaña a x entre 2 y elevarlo al cuadrado: $\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$:

Paso 1. Se traslada el término c al miembro derecho de la ecuación.

Paso 2. Se completa la expresión para que el miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto.

Paso 3. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$.

A este procedimiento para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática, se le llama **completación de cuadrados**.



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 6x - 7 = 0$

b. $x^2 - 4x - 5 = 0$

c. $x^2 + 4x - 3 = 0$

d. $x^2 + 2x - 4 = 0$



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 8 Fórmula general de una ecuación de segundo grado



Encuentre la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.



Divida toda la ecuación entre a para transformarla a la forma $x^2 + bx + c = 0$ y aplique lo visto en la clase anterior.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$\frac{3x^2 + 5x + 1}{3} = \frac{0}{3}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

Se dividen ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de x^2 , para que el coeficiente de x sea 1.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$$

Se traslada $\frac{c}{a}$ del miembro izquierdo al miembro derecho.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Se completa $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros para que sea un trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$$

Se expresa el miembro izquierdo como el cuadrado de un binomio.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-12 + 25}{36}$$

Se calcula el miembro derecho.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{5}{6} = \pm \sqrt{\frac{13}{36}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x + \frac{5}{6} = \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$$

Se simplifica el miembro derecho.

$$x = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{13}}{6} - \frac{5}{6} \quad \text{Se traslada } \frac{b}{2a} \text{ al miembro derecho.}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6} \quad \text{Se simplifica el miembro derecho de la ecuación.}$$



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le llama **fórmula general de la ecuación de segundo grado**.

Para encontrar la solución de una ecuación de segundo grado, se sustituyen los valores de a , b y c en la fórmula.

Ejemplo:

Para resolver $3x^2 + 5x + 1 = 0$,

se sustituye $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$ en la fórmula general:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6} \end{aligned}$$



Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.

a. $2x^2 + 3x - 1 = 0$ b. $2x^2 - 7x + 1 = 0$

c. $x^2 - 3x - 3 = 0$ d. $2x^2 + 5x - 1 = 0$



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 9 Aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado



Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.

a. $2x^2 - x - 6 = 0$

b. $4x^2 + 2x - 1 = 0$



Determine los valores de a , b y c en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

a. $2x^2 - x - 6 = 0$

$a = 2, b = -1, c = -6$

Sustituya los valores en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6)}}{2 \times 2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} \\ &= \frac{1 \pm 7}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1+7}{4} & \text{o} & & x &= \frac{1-7}{4} \\ &= \frac{8}{4} & & & &= -\frac{6}{4} \\ &= 2 & & & &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

b. $4x^2 + 2x - 1 = 0$

$a = 4, b = 2, c = -1$

Sustituya los valores en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 4 \times (-1)}}{2 \times 4} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 5}}{8} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{-2^1 \pm 2^1\sqrt{5}}{8_4} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Se simplifica.



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Paso 1. Se determinan los valores de a , b y c en la ecuación.

Paso 2. Se sustituyen los valores en la fórmula general, teniendo en cuenta sus signos.

Paso 3. Se calcula.

Paso 4. Se simplifica si es posible.



Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.

a. $2x^2 + x - 1 = 0$ b. $4x^2 + 3x - 1 = 0$

c. $4x^2 - 4x - 1 = 0$ d. $x^2 - 6x + 7 = 0$



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 10 Ejercicios de aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado



Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.

a. $2x^2 + x - 2 = 0$

b. $3x^2 - x - 3 = 0$

c. $x^2 + 3x - 3 = 0$

d. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

e. $3x^2 + 4x - 2 = 0$

f. $x^2 - 4x - 7 = 0$

g. $2x^2 - 2x - 3 = 0$

h. $x^2 - 7x + 4 = 0$

i. $2x^2 + 5x - 4 = 0$

j. $x^2 + 8x + 6 = 0$

k. $3x^2 - 2x - 4 = 0$

l. $4x^2 + 2x - 1 = 0$

m. $2x^2 - 6x + 3 = 0$

n. $4x^2 + x - 2 = 0$

o. $2x^2 + 4x - 3 = 0$

p. $4x^2 + 6x + 1 = 0$

q. $3x^2 + 5x - 1 = 0$

r. $2x^2 - 4x + 1 = 0$

s. $4x^2 - 7x + 2 = 0$

t. $4x^2 - 5x + 1 = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 11 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$



Resuelva la siguiente ecuación.

$$x^2 + 5x = 0$$



La siguiente propiedad se cumple para cualquier número real A, B :
Si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

La expresión $x^2 + 5x = 0$ se puede factorizar obteniendo x como factor común.

$$x^2 + 5x = 0$$

$$x(x + 5) = 0 \quad \text{Se factoriza la expresión.}$$

$$x = 0 \text{ o } x + 5 = 0$$

Observe que x representa un número real y $x + 5$ representa otro número real. Por tanto, si $x(x + 5) = 0$, entonces $x = 0$ o $x + 5 = 0$.

$$x + 5 = 0 \quad \text{Se resuelve la ecuación.}$$

$$x = 0 - 5$$

$$x = -5$$

Respuesta: $x = 0$ o -5



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión extrayendo el factor común.

$$x^2 + bx = 0$$

$$x(x + b) = 0$$

Paso 2. Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

$$x = 0 \text{ o } x + b = 0$$

Paso 3. Se resuelve la ecuación de primer grado.

$$x + b = 0$$

$$x = 0 - b$$

$$x = -b$$

Respuesta: $x = 0$ o $-b$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 4x = 0$

b. $x^2 - 5x = 0$

c. $x^2 - 6x = 0$

d. $x^2 + 2x = 0$

e. $x^2 - 3x = 0$

f. $x^2 + 6x = 0$

g. $x^2 - 8x = 0$

h. $x^2 + 7x = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 12 Ejercicios de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 3x = 0$

b. $x^2 - 4x = 0$

c. $x^2 - 7x = 0$

d. $x^2 + 8x = 0$

e. $x^2 + 10x = 0$

f. $x^2 - 12x = 0$

g. $x^2 + 9x = 0$

h. $x^2 - 13x = 0$

i. $2x^2 + 4x = 0$

j. $3x^2 + 8x = 0$

k. $2x^2 - 3x = 0$

l. $4x^2 + 6x = 0$

m. $3x^2 - 4x = 0$

n. $2x^2 + x = 0$

o. $x^2 + 11x = 0$

p. $2x^2 + 7x = 0$

q. $3x^2 + 9x = 0$

r. $2x^2 - 10x = 0$

s. $3x^2 - 7x = 0$

t. $2x^2 + 9x = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 13 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x + a)(x + b) = 0$



Resuelva la siguiente ecuación.

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$



$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ o } x - 3 = 0$$

Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

$$x - 2 = 0$$

Se resuelve la ecuación.

$$x = 0 + 2$$

$$x = 2$$

$$x - 3 = 0$$

Se resuelve la ecuación.

$$x = 0 + 3$$

$$x = 3$$

Respuesta: $x = 2$ o 3



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $(x + a)(x + b) = 0$:

Paso 1. Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

Si $(x + a)(x + b) = 0$, entonces $x + a = 0$ o $x + b = 0$.

Paso 2. Se resuelven las ecuaciones de primer grado.

$$x + a = 0$$

$$x = 0 - a$$

$$x = -a$$

$$x + b = 0$$

$$x = 0 - b$$

$$x = -b$$

Respuesta: $x = -a$ o $-b$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $(x + 1)(x + 3) = 0$

b. $(x - 4)(x - 5) = 0$

c. $(x - 2)(x + 4) = 0$

d. $(x + 5)(x + 6) = 0$

e. $(x - 3)(x - 6) = 0$

f. $(x + 7)(x - 2) = 0$

g. $(x + 4)(x + 7) = 0$

h. $(x - 9)(x - 5) = 0$

i. $(x - 6)(x + 1) = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 14 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$



Resuelva la siguiente ecuación.

$$x^2 - 9 = 0$$



$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

Se factoriza la expresión.

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

$$x + 3 = 0 \text{ o } x - 3 = 0$$

Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

$$x + 3 = 0 \quad \text{Se resuelve la ecuación.}$$

$$x = 0 - 3$$

$$x = -3$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{Se resuelve la ecuación.}$$

$$x = 0 + 3$$

$$x = 3$$

Respuesta: $x = -3$ o 3



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión aplicando diferencia de cuadrados.

$$x^2 - c^2 = 0$$

$$(x + c)(x - c) = 0$$

Paso 2. Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

$$x + c = 0 \text{ o } x - c = 0$$

Paso 3. Se resuelven las ecuaciones de primer grado.

$$x = 0 - c$$

$$x = -c$$

$$x = 0 + c$$

$$x = c$$

Respuesta: $x = -c$ o c



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 - 25 = 0$

b. $x^2 - 36 = 0$

c. $x^2 - 16 = 0$

d. $x^2 - 49 = 0$

e. $2x^2 - 32 = 0$

f. $3x^2 - 12 = 0$

g. $4x^2 - 64 = 0$

h. $2x^2 - 72 = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 15 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 - 1 = 0$

b. $x^2 - 4 = 0$

c. $2x^2 - 18 = 0$

d. $3x^2 - 48 = 0$

e. $x^2 - 64 = 0$

f. $x^2 - 81 = 0$

g. $2x^2 - 50 = 0$

h. $2x^2 - 98 = 0$

i. $x^2 - 100 = 0$

j. $3x^2 - 108 = 0$

k. $x^2 - 121 = 0$

l. $x^2 - 144 = 0$

m. $x^2 - 169 = 0$

n. $x^2 - 196 = 0$

o. $x^2 - 225 = 0$

p. $x^2 - 400 = 0$

q. $x^2 - 900 = 0$

r. $x^2 - 1,600 = 0$

s. $x^2 - 2,500 = 0$

t. $x^2 - 3,600 = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 16 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$



Resuelva la siguiente ecuación.

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$



$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = 0 - 2$$

$$x = -2$$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.

Se extraen las raíces cuadradas de ambos miembros de la ecuación.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

Si $A^2 = 0$, entonces $A = 0$.



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión utilizando trinomio cuadrado perfecto.

$$(x + a)^2 = 0$$

Paso 2. Se extraen las raíces cuadradas en ambos miembros de la ecuación.

$$x + a = 0$$

Paso 3. Se encuentra la solución de la ecuación de primer grado.

$$x = 0 - a$$

$$x = -a$$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 8x + 16 = 0$

b. $x^2 - 4x + 4 = 0$

c. $x^2 + 12x + 36 = 0$

d. $x^2 - 6x + 9 = 0$

e. $x^2 + 10x + 25 = 0$

f. $x^2 - 14x + 49 = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 17 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 - 2x + 1 = 0$

b. $x^2 - 18x + 81 = 0$

c. $x^2 + 14x + 49 = 0$

d. $x^2 - 16x + 64 = 0$

e. $x^2 + 20x + 100 = 0$

f. $x^2 + 18x + 81 = 0$

g. $x^2 - 12x + 36 = 0$

h. $x^2 + 16x + 64 = 0$

i. $x^2 - 20x + 100 = 0$

j. $x^2 + 2x + 1 = 0$

k. $x^2 - 8x + 16 = 0$

l. $x^2 - 10x + 25 = 0$

m. $x^2 + 6x + 9 = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 18 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$



Resuelva la siguiente ecuación.

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$



$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ o } x + 3 = 0$$

Se factoriza la expresión.

Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$



$$x + 2 = 0$$

Se resuelve la ecuación.

$$x = 0 - 2$$

$$x = -2$$

$$x + 3 = 0$$

Se resuelve la ecuación.

$$x = 0 - 3$$

$$x = -3$$

Respuesta: $x = -2$ o -3



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión.

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Paso 2. Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

Si $(x + a)(x + b) = 0$, entonces $x + a = 0$ o $x + b = 0$.

Paso 3. Se resuelven las ecuaciones de primer grado.

$$x + a = 0$$

$$x = 0 - a$$

$$x = -a$$

$$x + b = 0$$

$$x = 0 - b$$

$$x = -b$$

Respuesta: $x = -a$ o $-b$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 7x + 12 = 0$

b. $x^2 + 3x - 4 = 0$

c. $x^2 - 8x + 12 = 0$

d. $x^2 + 12x + 35 = 0$

e. $x^2 + 3x - 10 = 0$

f. $x^2 - 4x - 5 = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 19 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 6x + 8 = 0$

b. $x^2 - 9x + 18 = 0$

c. $x^2 + 14x + 48 = 0$

d. $x^2 + 4x - 32 = 0$

e. $x^2 - x - 42 = 0$

f. $x^2 + 17x + 72 = 0$

g. $x^2 + 5x - 36 = 0$

h. $x^2 + 12x + 27 = 0$

i. $x^2 + 2x - 48 = 0$

j. $x^2 - 15x + 56 = 0$

k. $x^2 + 12x + 32 = 0$

l. $x^2 - 9x + 14 = 0$

m. $x^2 - 4x - 21 = 0$

n. $x^2 + 11x + 24 = 0$

o. $x^2 + 3x - 54 = 0$

p. $x^2 - 13x + 42 = 0$

q. $x^2 + 6x - 16 = 0$

r. $x^2 - 6x - 27 = 0$

s. $x^2 - 5x - 36 = 0$

t. $x^2 - 10x + 24 = 0$



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 20 Métodos para resolver una ecuación de segundo grado



Resuelva la ecuación de segundo grado con el uso de la factorización, fórmula general y la completación de cuadrados.

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$



Factorización:

Busque dos números tales que su producto sea 12 y su suma sea 7.

$$(x + 3)(x + 4) = 0$$

Aplique la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

$$x + 3 = 0 \text{ o } x + 4 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = 0 - 3$$

$$x = -3$$

$$x + 4 = 0$$

$$x = 0 - 4$$

$$x = -4$$

Respuesta: $x = -3$ o -4

Fórmula general:

Determine los valores de a, b y c .

$$a = 1, b = 7, c = 12$$

Sustituya los valores en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

y resuelva.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{-7 + 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x = \frac{-7 - 1}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Completación de cuadrados:

Reste 12 de ambos miembros de la ecuación.

$$x^2 + 7x = 0 - 12$$

$$= -12$$

Sume el valor que equivale a la expresión $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación, tomando $a = 1, b = 7$.

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

Factorice como el cuadrado de un binomio.

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-48 + 49}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Extraiga las raíces y resuelva.

$$x + \frac{7}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x + \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{2} - \frac{7}{2}$$

$$x = +\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

Observe que los resultados coinciden en los tres métodos.



Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, existen varios métodos. Para elegir el más efectivo tome en cuenta:

1. Factorice la expresión.
2. Si no es posible factorizar, utilice otro método.
3. Cualquier método que utilice da los mismos resultados.



Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 4x = 0$

b. $3x^2 - 27 = 0$

c. $x^2 - x - 2 = 0$

d. $5x^2 - 7x + 2 = 0$

Ejercitación A

1. Desarrolle las siguientes expresiones.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a. $(2x + 5y)^2$ | b. $(4a - 2b)^2$ |
| c. $(4x + 3y)^2$ | d. $(5x - 3y)^2$ |
| e. $(2a - 6b)(2a + 6b)$ | f. $(7x + 2y)(7x - 2y)$ |
| g. $(x + 2)^2 + (x + 3)(x + 4)$ | h. $(x - 5)^2 + (x - 2)(x + 3)$ |
| i. $(x + 5)(x + 2) - (x + 1)^2$ | j. $(x + 3)(x - 3) - (x + 4)^2$ |

2. Resuelva.

- a. Si $a^2 + b^2 = 25$ y $ab = 12$, ¿cuál es el valor numérico de $(a + b)^2$?
 b. Si $a^2 + b^2 = 13$ y $ab = 6$, ¿cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$?

3. Factorice las siguientes expresiones.

- | | | |
|-------------------|--------------------|----------------------|
| a. $x^2 + 8x$ | b. $3ab + 9a$ | c. $5x^2 - 10y^2$ |
| d. $x^2 + 4x + 3$ | e. $x^2 + x - 2$ | f. $x^2 - 6x + 8$ |
| g. $x^2 - 2x - 3$ | h. $x^2 - 9$ | i. $x^2 + 4x + 4$ |
| j. $x^2 - 6x + 9$ | k. $2x^2 + 4x + 2$ | l. $3x^2 - 24x + 48$ |
| m. $4x^2 - 64$ | n. $100 - x^2$ | o. $-x^2 + 81$ |

4. Calcule las siguientes expresiones usando factorización.

- a. $81^2 - 1$ b. $55^2 - 45^2$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones.

- | | | |
|------------------|---------------------|---------------------|
| a. $x^2 = 4$ | b. $x^2 - 81 = 0$ | c. $2x^2 = 8$ |
| d. $-2x^2 = -32$ | e. $4x^2 - 100 = 0$ | f. $-5x^2 + 20 = 0$ |

6. Resuelva las siguientes ecuaciones.

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a. $(x - 1)^2 = 4$ | b. $(x + 3)^2 = 9$ |
| c. $(x - 2)^2 = 16$ | d. $(x + 5)^2 = 36$ |

7. Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula general.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a. $3x^2 + 5x - 2 = 0$ | b. $2x^2 - 5x + 2 = 0$ |
|------------------------|------------------------|

8. Resuelva las siguientes ecuaciones.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a. $x^2 + 6x = 0$ | b. $x^2 - 4x = 0$ |
| c. $x^2 - 16 = 0$ | d. $2x^2 - 18 = 0$ |
| e. $x^2 + 10x + 25 = 0$ | f. $x^2 - 8x + 16 = 0$ |
| g. $(x + 2)(x + 1) = 0$ | h. $(x - 2)(x - 3) = 0$ |
| i. $(x + 4)(x - 1) = 0$ | j. $(x - 5)(x + 3) = 0$ |
| k. $x^2 + 6x + 5 = 0$ | l. $x^2 - 2x - 8 = 0$ |
| m. $x^2 + 4x - 12 = 0$ | n. $x^2 - 5x - 14 = 0$ |

Ejercitación B

1. Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(2x + 1)^2 + (x + 2)(x + 1)$

b. $(x + 4)(x - 4) + (3x + 2)^2$

c. $(3x - 2y)^2 + (2x + y)^2$

d. $(3x + 4y)^2 - (5x - y)(5x + y)$

2. Resuelva.

a. Si la respuesta de la ecuación cuadrática $x^2 + ax + b = 0$ es $x = 3$ o 5 , determine el valor de a y b .

b. Si la respuesta de la ecuación cuadrática $x^2 + ax + b = 0$ es $x = 2$ o -4 , determine el valor de a y b .

3. Factorice las siguientes expresiones.

a. $18x^2y^2z + 9xy^2z^2$

b. $7a^2b^3 - 28a^3b^2$

c. $x^2 + 13x + 42$

d. $x^2 + 5x - 24$

e. $x^2 - 11x + 30$

f. $16x^2 - 9y^2$

g. $x^2 + 18x + 81$

h. $x^2 - 14x + 49$

i. $3x^2 + 24x + 45$

j. $5x^2 + 20x - 60$

k. $4x^2 - 44x + 112$

l. $6x^2 - 96$

m. $-2x^2 - 20x - 50$

n. $-x^2 - 7x - 12$

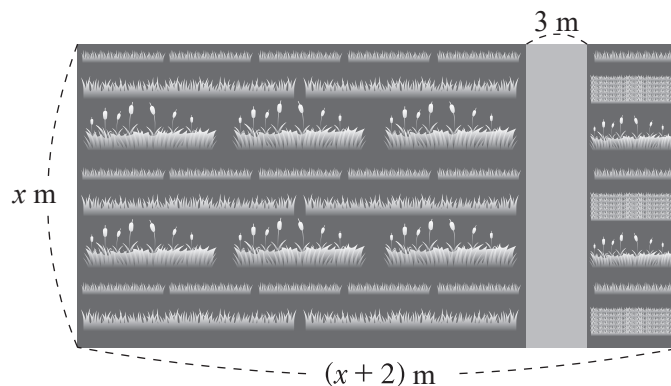
o. $72 - 2x^2$

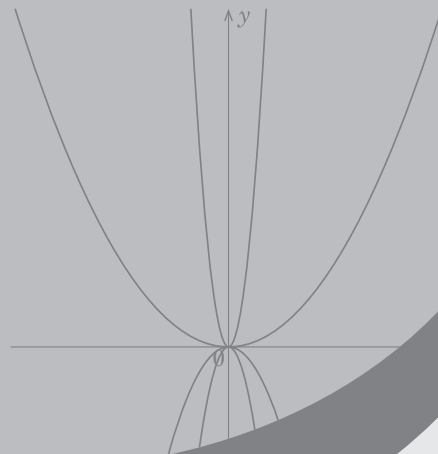
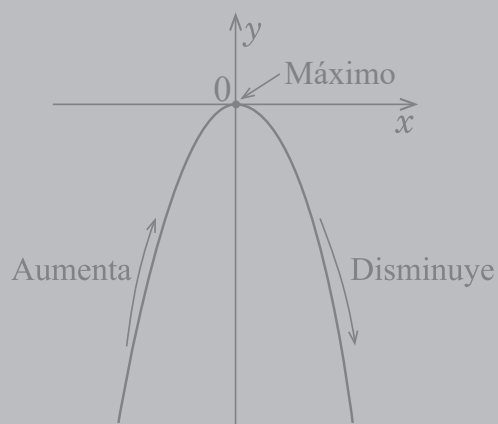
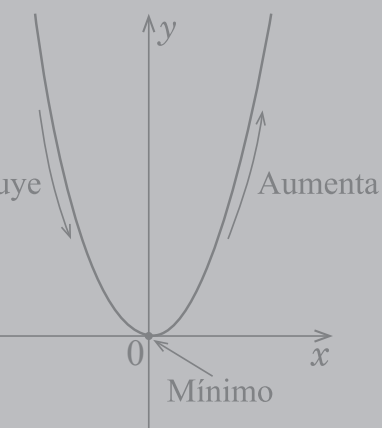
p. $400 - 4x^2$

4. Si la suma de los números a y a^2 es 30 y $a > 0$, determine el valor de a .

5. Si se forma un rectángulo con una altura 3 cm más larga que la base y el área del rectángulo es 28 cm^2 , determine la longitud de la base y la altura.

6. El siguiente dibujo muestra un jardín rectangular. El pasillo rectangular mide 3 m de ancho. Determine el área del jardín en m^2 .





Unidad 2 ..

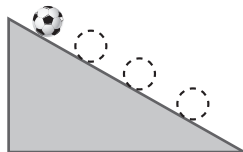
Función

Sección 1 Función cuadrática

Clase 1 Introducción al concepto de función cuadrática



Una pelota rueda por una rampa.



Se midió la distancia recorrida en cada segundo. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

x (tiempo en s)	0	1	2	3	4	5
y (distancia en cm)	0	2	8	18	32	50

Analice la relación entre la distancia recorrida y el tiempo, es decir, la relación entre x y y .



Establezca la relación entre las variables x y y .

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
y	0	2	8	18	32	50

$2 \times$

Observe que los valores de y son el resultado de multiplicar x^2 por 2. Entonces, $y = 2x^2$.

Por tanto, y es directamente proporcional a x^2 .

La relación entre x y y se puede expresar como ecuación.



Si una magnitud y es directamente proporcional al cuadrado de otra magnitud x , entonces $y = ax^2$, donde a es una constante.



1. Complete el valor de y en la tabla para la función $y = 3x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27						

2. Escriba una ecuación que represente la relación entre x y y para cada uno de los siguientes incisos.

- Un cuadrado con x cm de lado y y cm² de área.
- Un círculo con x cm de radio y y cm² de área, utilizando π .

Sección 1 Función cuadrática

Clase 2 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = 1$



Con base en la función $y = x^2$, complete la tabla y ubique los pares ordenados (x, y) en un plano cartesiano.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16								16



Cada valor de y es igual a elevar al cuadrado su valor correspondiente de x . Teniendo cuidado con el signo, por ejemplo: $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$. Complete la tabla.

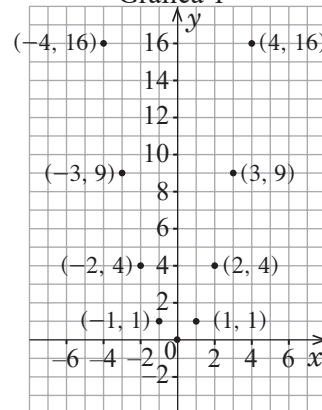
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Se ubican los pares ordenados encontrados en la tabla en el plano cartesiano como en la Gráfica 1.

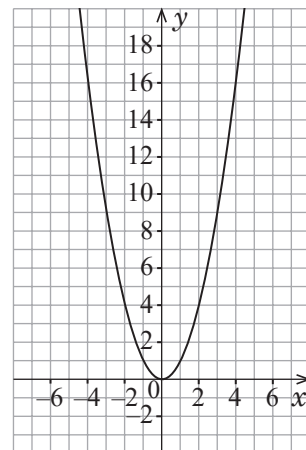
La Gráfica 2 muestra la gráfica de la función $y = x^2$. A la función de la forma $y = ax^2$ se le llama **función cuadrática**. Para graficar una función cuadrática, es importante tomar en cuenta que no se deben unir con una línea recta sino utilizar una línea curva.

Cuando se toman más pares ordenados, la gráfica que se forma será una curva, tal como se muestra en la Gráfica 2.

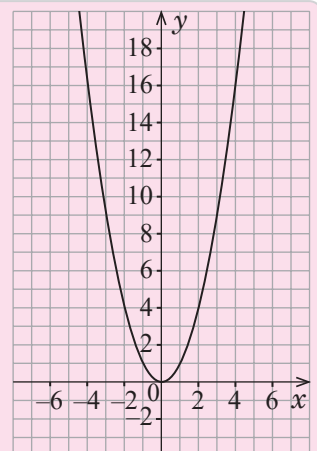
Gráfica 1



Gráfica 2



A la gráfica de una función $y = x^2$ se le llama **parábola**. La gráfica pasa por el origen $(0, 0)$.



Con base en los resultados encontrados en la tabla del planteamiento, ¿qué relación hay entre los valores de y cuando $x = -1$ y $x = 1$? ¿Ocurre lo mismo cuando $x = -2$ y $x = 2$?



Sección 1 Función cuadrática

Clase 3 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a > 1$



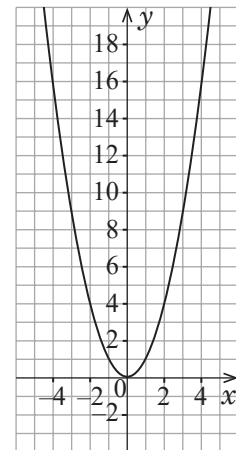
Con base en la gráfica de $y = x^2$:

- a. Complete la tabla y grafique la función $y = 2x^2$ en el mismo plano cartesiano que se muestra a la gráfica de $y = x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18						

- b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. ¿Qué ocurre?
- c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = 2x^2$?

$y = x^2$

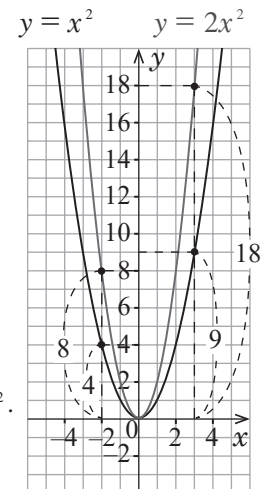


- a. Los valores de $y = 2x^2$ son el resultado de multiplicar los valores de $y = x^2$ por 2.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

La gráfica de $y = 2x^2$ se presenta al lado derecho, en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de la función $y = x^2$.

- b. Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = 2x^2$ es el doble del valor de $y = x^2$ cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. Generalmente, el valor de y en la función $y = 2x^2$ es el doble del valor de y en la función $y = x^2$.
- c. Similitud: ambas gráficas pasan por el origen $(0, 0)$, el eje y es su eje de simetría, abren hacia arriba, están ubicadas arriba del eje x y son parábolas. Diferencia: el ancho de las gráficas cambia de acuerdo al valor de a .



Si a es un número mayor que 1 ($a > 1$), entonces todos los valores de $y = x^2$ se multiplican por a en la gráfica de $y = ax^2$.



Grafique las siguientes funciones con base en la gráfica de $y = x^2$.

- a. $y = 3x^2$
- b. $y = 4x^2$

Sección 1 Función cuadrática

Clase 4 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $0 < a < 1$

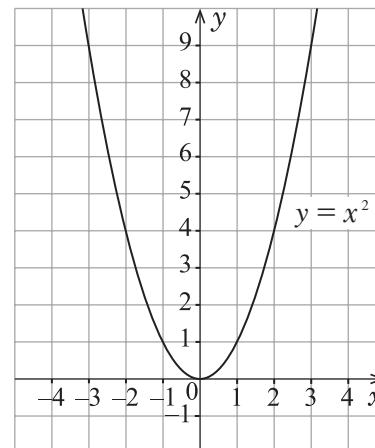


Con base en la gráfica de $y = x^2$:

- a. Complete la tabla y grafique la función $y = \frac{1}{2}x^2$ en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de $y = x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5						

- b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 3$. ¿Qué ocurre?
- c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$?

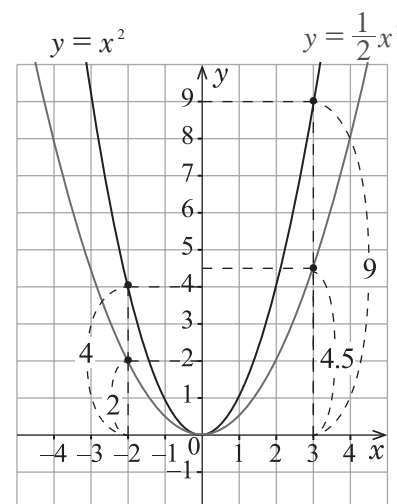


- a. Los valores de $y = \frac{1}{2}x^2$ son el resultado de multiplicar los valores de $y = x^2$ por $\frac{1}{2}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

La gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ se presenta al lado derecho, en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de la función $y = x^2$.

- b. Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = \frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de $y = x^2$ cuando $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 3$. Generalmente, el valor de $y = \frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de $y = x^2$.
- c. Similitud: ambas gráficas pasan por el origen $(0, 0)$, el eje y es su eje de simetría, abren hacia arriba, están ubicadas arriba del eje x y son parábolas.
Diferencia: el ancho de las gráficas cambia de acuerdo al valor de a .



Si a es un número mayor que cero y menor que 1 ($0 < a < 1$), entonces todos los valores de $y = x^2$ se multiplican por a en la gráfica de $y = ax^2$.



Grafique las siguientes funciones con base en la gráfica de $y = x^2$.

- a. $y = \frac{1}{3}x^2$
- b. $y = \frac{1}{4}x^2$



Sección 1 Función cuadrática

Clase 5 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = -1$

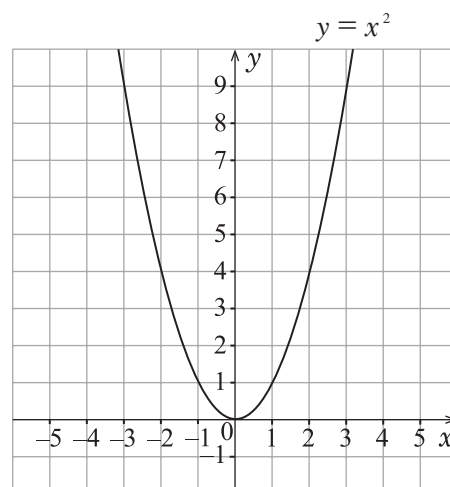


Con base en la gráfica de $y = x^2$:

- a. Complete la tabla y grafique la función $y = -x^2$ en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de $y = x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	-9						

- b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. ¿Qué ocurre?
- c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$?

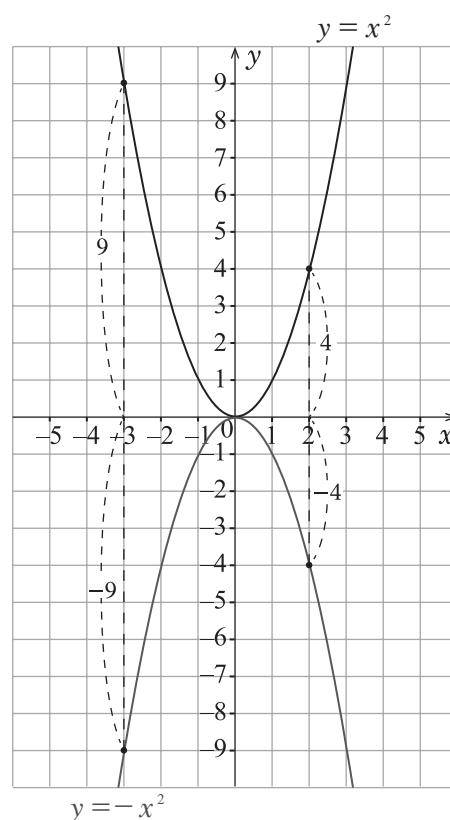


- a. Los valores de $y = -x^2$ son el resultado de multiplicar los valores de $y = x^2$ por -1 .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

La gráfica de $y = -x^2$ se presenta en el mismo plano que se muestra la gráfica de la función $y = x^2$.

- b. Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = -x^2$ es el opuesto del valor de $y = x^2$ cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.
- c. Similitud: ambas gráficas pasan por el origen $(0, 0)$, el eje y es su eje de simetría y son parábolas.
Diferencia: la gráfica de la función $y = x^2$ abre hacia arriba y está sobre el eje x . Por otro lado, la gráfica de la función $y = -x^2$ abre hacia abajo y está debajo del eje x .





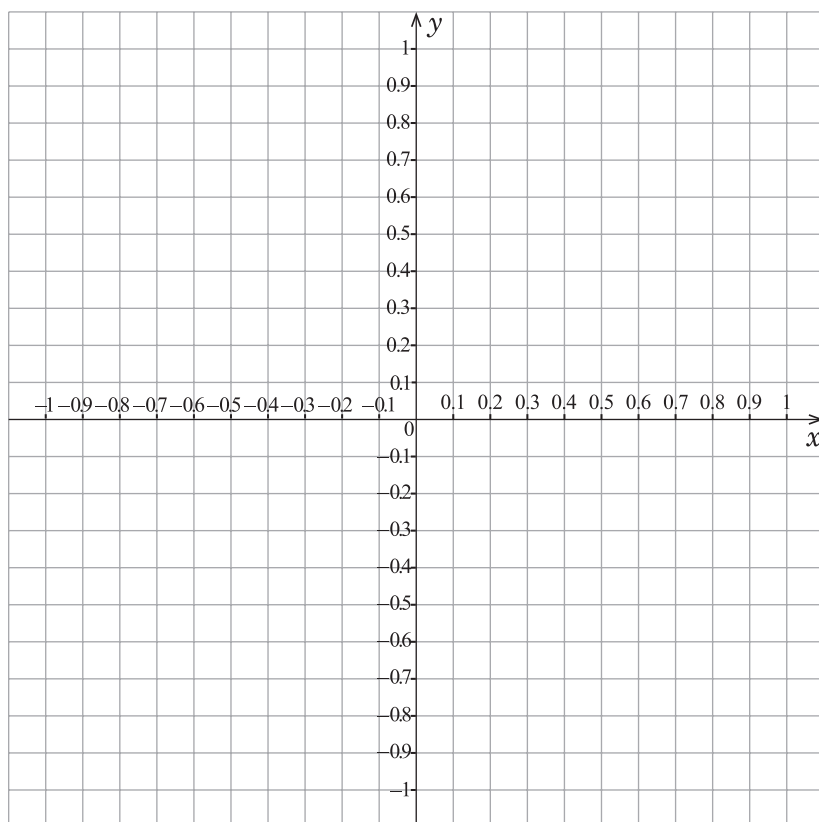
Si a es un número igual a -1 ($a = -1$), entonces todos los valores de $y = x^2$ se multiplican por -1 en la gráfica de $y = -x^2$.

La función $y = -x^2$ es una reflexión de la función $y = x^2$ respecto al eje x .



Para la función $y = -x^2$, complete la siguiente tabla y ubique los pares ordenados en el plano cartesiano. ¿Cómo es la gráfica que se forma?

x	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	-1										0										-1



Sección 1 Función cuadrática

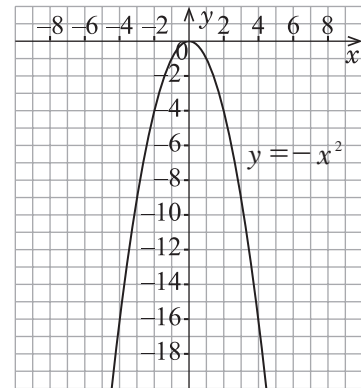
Clase 6 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a < -1$

P

Con base en la gráfica de $y = -x^2$:

- a. Complete la tabla y grafique la función $y = -2x^2$ en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de $y = -x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-2x^2$	-18						



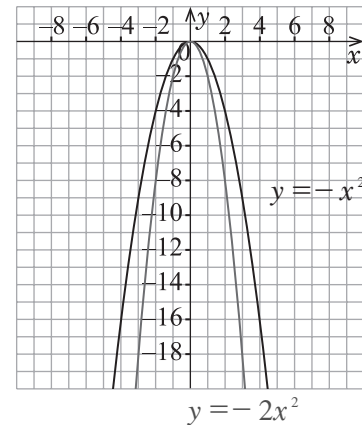
- b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. ¿Qué ocurre?
- c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = -x^2$ y $y = -2x^2$?

S

- a. Los valores de $y = -2x^2$ son el resultado de multiplicar los valores de la función $y = -x^2$ por 2.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

La gráfica de $y = -2x^2$ se presenta al lado derecho, en el mismo plano que se muestra la gráfica de la función $y = -x^2$.



- b. Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = -2x^2$ es el doble del valor de $y = -x^2$ cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. Generalmente, el valor de la función $y = -2x^2$ es el doble del valor de la función $y = -x^2$.
- c. Similitud: ambas gráficas pasan por el origen $(0,0)$, el eje y es su eje de simetría, abren hacia abajo, están ubicadas debajo del eje x y son parábolas.

Diferencia: la gráfica de $y = -2x^2$ es más cerrada que la gráfica de $y = -x^2$.

C

Si a es un número menor que -1 ($a < -1$), entonces todos los valores de $y = x^2$ se multiplican por a en la gráfica de $y = ax^2$.

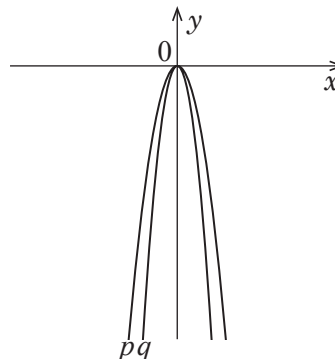
Mientras $|a|$ sea mayor, la parábola será más cerrada al eje y .

Mientras $|a|$ sea menor (cercana a cero), la parábola será más abierta al eje y .

E

A cada función de la izquierda asígnele su respectiva gráfica de la derecha. Justifique su respuesta.

- a. $y = -4x^2$
- b. $y = -3x^2$



Sección 1 Función cuadrática

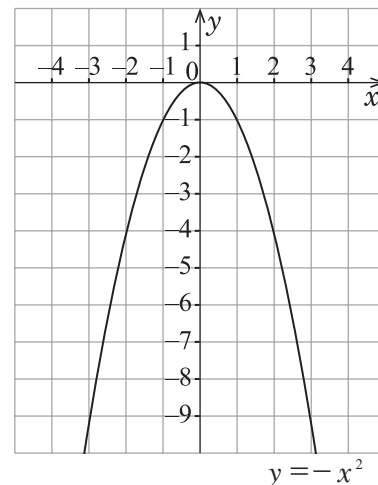
Clase 7 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $-1 < a < 0$



Con base en la gráfica de $y = -x^2$:

- a. Complete la tabla y grafique la función $y = -\frac{1}{2}x^2$ en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de $y = -x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-\frac{1}{2}x^2$	-4.5						



- b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 3$. ¿Qué ocurre?
- c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = -x^2$ y $y = -\frac{1}{2}x^2$?

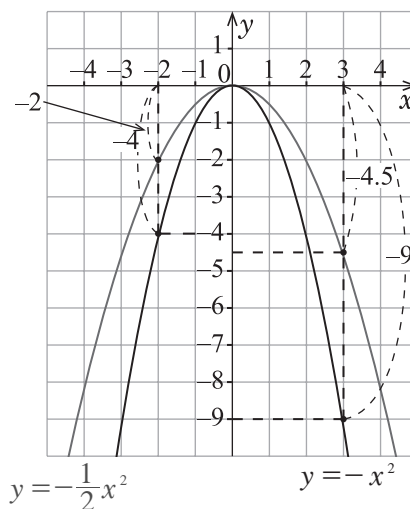


- a. Los valores de $y = -\frac{1}{2}x^2$ son el resultado de multiplicar los valores de $y = -x^2$ por $\frac{1}{2}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-\frac{1}{2}x^2$	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5

La gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ se presenta al lado derecho, en el mismo plano que se muestra la gráfica de la función $y = -x^2$.

- b. Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = -\frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de $y = -x^2$ cuando $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 3$. Generalmente, el valor de y en la función $y = -\frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de la función $y = -x^2$.



- c. Similitud: ambas gráficas pasan por el origen (0, 0), el eje y es su eje de simetría, abren hacia abajo, están ubicadas debajo del eje x y son parábolas.
- Diferencia: la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ está más abierta que la gráfica de $y = -x^2$.



Si a es un número mayor que -1 y menor que 0 ($-1 < a < 0$), entonces todos los valores de $y = x^2$ se multiplican por a en la gráfica de $y = ax^2$.



Grafique las siguientes funciones con base en la gráfica de $y = -x^2$.

- a. $y = -\frac{2}{3}x^2$
- b. $y = -\frac{1}{4}x^2$

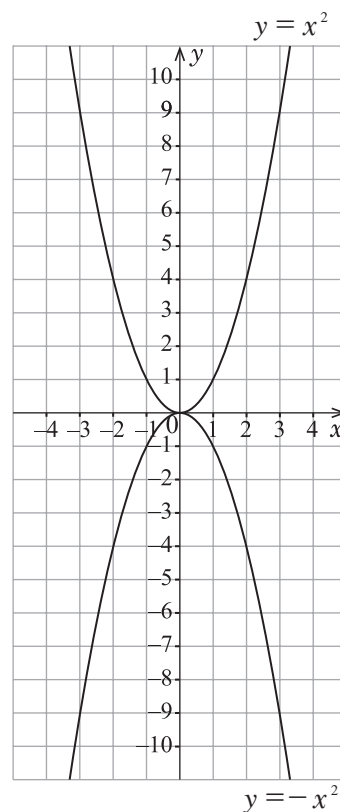
Sección 1 Función cuadrática

Clase 8 Características de la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2$

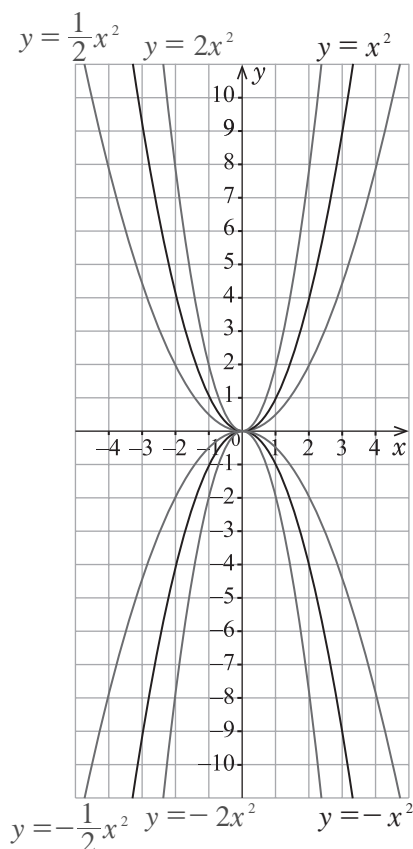


Con base en las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$:

- Grafique en el mismo plano cartesiano las funciones:
 $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = -\frac{1}{2}x^2$.
- Si a es cualquier número diferente de 0, escriba las características de la gráfica de la función $y = ax^2$.



- La gráfica de la función $y = -2x^2$ es una reflexión de la gráfica $y = 2x^2$ respecto al eje x . De la misma forma, la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ es una reflexión de la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ respecto al eje x .
- Características de la función $y = ax^2$:
Sin importar el valor de a , la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola que pasa por el origen $(0, 0)$ y el eje y es eje de simetría.
Si el valor absoluto de a es mayor que 1, entonces la parábola se acerca al eje y . Mientras que si el valor absoluto de a está entre 0 y 1, entonces la parábola se aleja del eje y .
Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

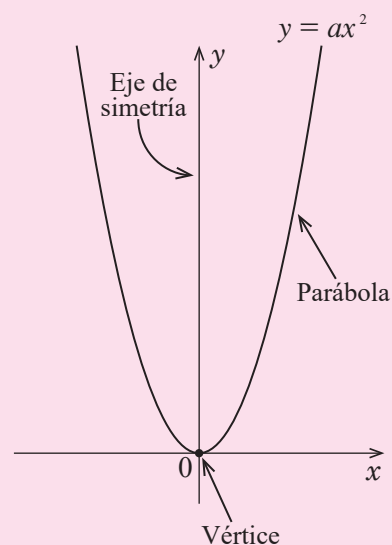




A la gráfica de una función $y = ax^2$ se le llama parábola. La gráfica tiene el eje y como **eje de simetría**. Al punto de intersección entre la parábola y su eje de simetría se le llama **vértice**. En el caso de $y = ax^2$, el vértice coincide con el origen $(0, 0)$.

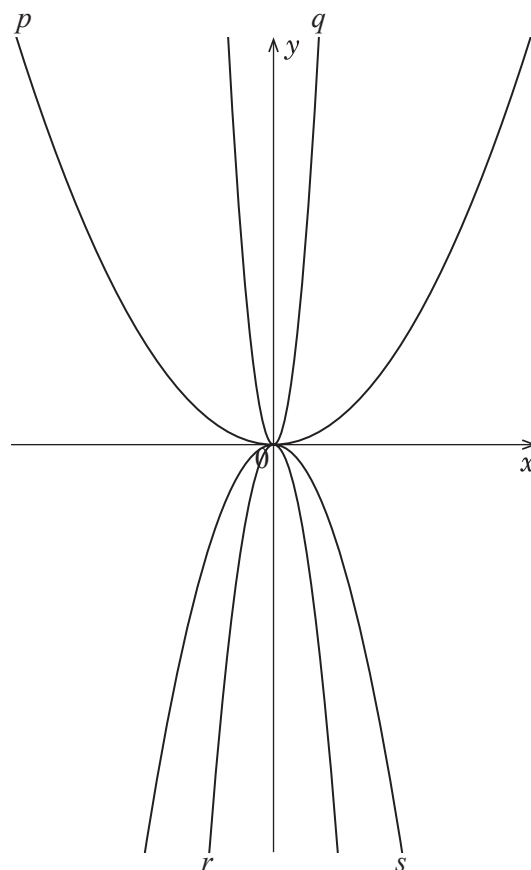
Si el valor absoluto de a es mayor que 1, entonces la parábola se acerca al eje y . Mientras que si el valor absoluto de a está entre 0 y 1, entonces la parábola se aleja del eje y .

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.



Identifique cada función de la izquierda con su respectiva gráfica de la derecha.

- a. $y = 4x^2$
- b. $y = -\frac{1}{2}x^2$
- c. $y = -2x^2$
- d. $y = \frac{1}{8}x^2$



Sección 1 Función cuadrática

Clase 9 Comportamiento de la gráfica $y = ax^2$

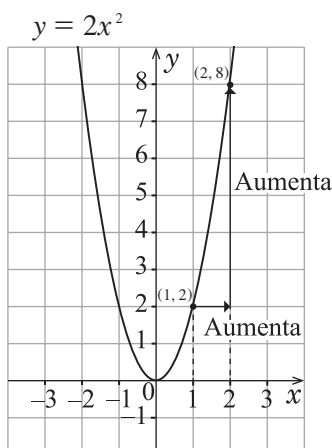
P₁

Con base en la gráfica de $y = 2x^2$:

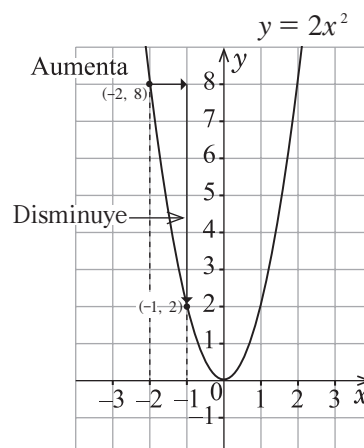
- Cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y ?
- Cuando el valor de x aumenta de -2 a -1 , ¿cómo cambia el valor de y ?

S₁

- Al observar la gráfica de $y = 2x^2$, cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, el valor de y aumenta de 2 a 8.



- Al observar la gráfica de $y = 2x^2$, cuando el valor de x aumenta de -2 a -1 , el valor de y disminuye de 8 a 2.



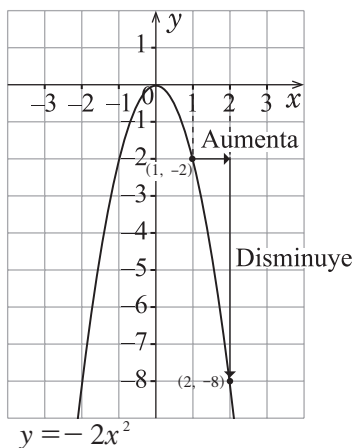
P₂

Con base en las gráficas de $y = -2x^2$:

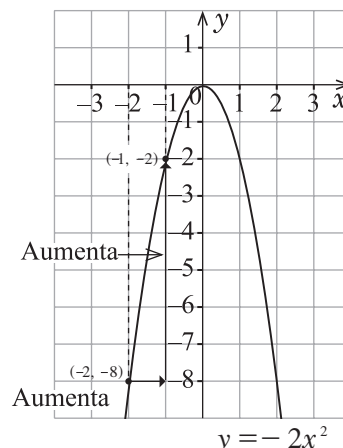
- Cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y ?
- Cuando el valor de x aumenta de -2 a -1 , ¿cómo cambia el valor de y ?

S₂

- Al observar la gráfica de $y = -2x^2$, cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, el valor de y disminuye de -2 a -8 .



- Al observar la gráfica de $y = -2x^2$, cuando el valor de x aumenta de -2 a -1 , el valor de y aumenta de -8 a -2 .

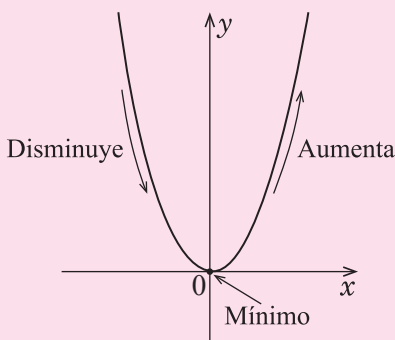




Dada una función $y = ax^2$ ($a \neq 0$), cuando el valor de x aumenta:

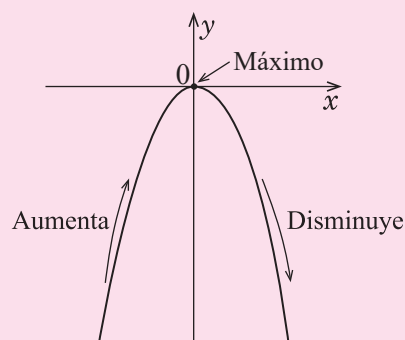
$$a > 0$$

- El valor de y disminuye en el caso de $x < 0$.
- El valor de y aumenta en el caso de $x > 0$.
- El valor de y es igual a 0 en el caso de $x = 0$, que es el valor mínimo de la función $y = ax^2$.

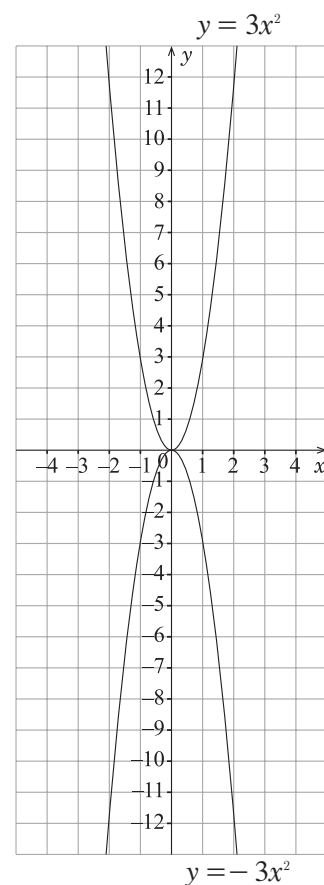


$$a < 0$$

- El valor de y aumenta en el caso de $x < 0$.
- El valor de y disminuye en el caso de $x > 0$.
- El valor de y es igual a 0 en el caso de $x = 0$, que es el valor máximo de la función $y = ax^2$.



- Con base en la gráfica de $y = 3x^2$, cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y ?
- Con base en la gráfica de $y = 3x^2$, cuando el valor de x aumenta de -2 a -1, ¿cómo cambia el valor de y ?
- Con base en la gráfica de $y = -3x^2$, cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y ?
- Con base en la gráfica de $y = -3x^2$, cuando el valor de x aumenta de -2 a -1, ¿cómo cambia el valor de y ?



Sección 1 Función cuadrática

Clase 10 Rango de una función $y = ax^2$

P₁

En la función $y = x^2$, si el valor de x se encuentra desde -1 hasta 2 ($-1 \leq x \leq 2$), ¿entre qué números se encuentra el valor de y ?

S₁

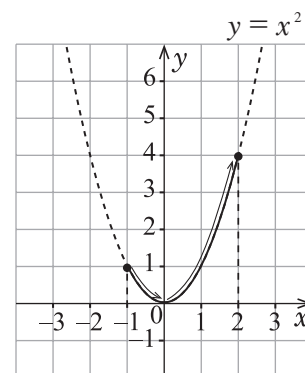
Para determinar los valores de y , se trazan segmentos verticales. El primer segmento va desde $x = -1$ hasta la parábola y el segundo va desde $x = 2$ hasta la parábola.

Se observa lo siguiente:

El valor mínimo que toma y es 0 (cuando $x = 0$).

El valor máximo que toma y es 4 (cuando $x = 2$).

Por tanto, el valor de y se encuentra desde 0 hasta 4 ($0 \leq y \leq 4$).



P₂

En la función $y = -x^2$, si el valor de x se encuentra desde -2 hasta 1 ($-2 \leq x \leq 1$), ¿desde qué número hasta qué número se encuentra el valor de y ?

S₂

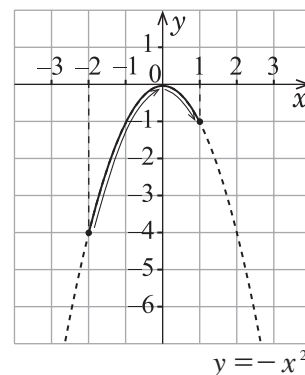
Para determinar los valores de y , se trazan segmentos verticales. El primer segmento va desde $x = -2$ hasta la parábola y el segundo va desde $x = 1$ hasta la parábola.

Se observa lo siguiente:

El valor mínimo que toma y es -4 (cuando $x = -2$).

El valor máximo que toma y es 0 (cuando $x = 0$).

Por tanto, el valor de y se encuentra desde -4 hasta 0 ($-4 \leq y \leq 0$).



C

A los valores que toma la variable x se les llama **dominio** y a los valores que toma y se les llama **rango**.

E

Con base en la función $y = 2x^2$, encuentre el rango en los siguientes casos.

- x se encuentra desde 1 hasta 3 ($1 \leq x \leq 3$).
- x se encuentra desde -2 hasta 2 ($-2 \leq x \leq 2$).
- x se encuentra desde -3 hasta -1 ($-3 \leq x \leq -1$).

Sección 1 Función cuadrática

Clase 11 Razón de cambio para una función $y = ax^2$



Con base en las tablas de la función lineal $y = x + 1$ y la función cuadrática $y = x^2$, complete los cuadros en blanco con el incremento de y . ¿Qué diferencia puede observar en el incremento de y entre las dos funciones?

$$y = x + 1$$

		+1	+1	+1	+1
x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5
		+1			

$$y = x^2$$

		+1	+1	+1	+1
x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16
		+1			



$$y = x + 1$$

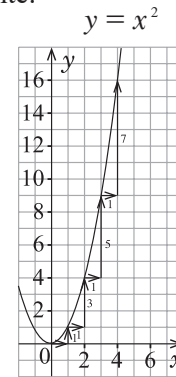
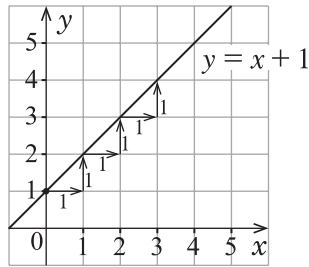
		+1	+1	+1	+1
x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5
		+1	+1	+1	+1

$$y = x^2$$

		+1	+1	+1	+1
x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16
		+1	+3	+5	+7

En la función lineal de $y = x + 1$, la razón de cambio es siempre 1 y constante.

En la función cuadrática de $y = x^2$, cuando el valor de x incrementa en 1, el valor de y incrementa de la siguiente manera: 1, 3, 5, 7..., y no es constante.



En una función $y = ax^2$, la razón de cambio no es constante y se determina:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{variación en } y}{\text{variación en } x}$$

Ejemplo:

En la función $y = x^2$:

Cuando $x = 1$, $y = 1$.

Cuando $x = 3$, $y = 9$.

Entonces, la razón de cambio cuando el valor de x incrementa de 1 a 3 es:

$$\frac{(\text{Variación en } y)}{(\text{Variación en } x)} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$


Con base en la función $y = 2x^2$, resuelva.

a. Complete los cuadros en blanco con el incremento de y .

x	0	1	2	3	4
y	0	2	8	18	32

b. Cuando el valor de x es 2 y 4, encuentre los valores del incremento de y .

c. Encuentre la razón de cambio cuando el valor de x incrementa de 2 a 4.

Sección 1 Función cuadrática

Clase 12 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c > 0$

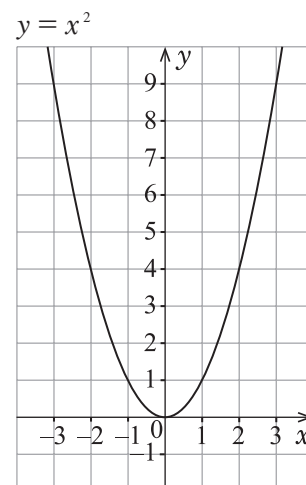


Con base en la gráfica de $y = x^2$:

- a. Complete la tabla y grafique la función $y = x^2 + 2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6				

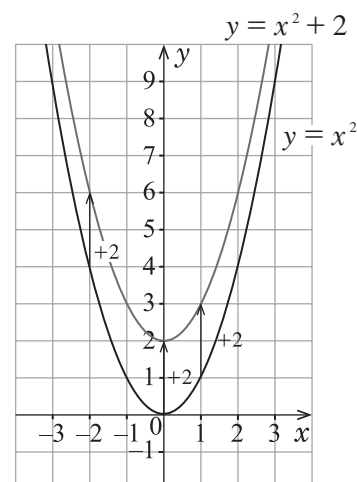
- b. Describa con sus palabras, ¿qué cambio se observa a la gráfica de $y = x^2$ para obtener la gráfica de $y = x^2 + 2$?
- c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 + 2$?



- a. Los valores de $y = x^2 + 2$ son el resultado de sumar 2 a los valores de $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6

- b. La gráfica de $y = x^2$ se desplazó 2 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $y = x^2 + 2$.
- c. Similitud: en ambas gráficas, el eje y es el eje de simetría. Ambas abren hacia arriba, están ubicadas arriba del eje x y son parábolas. Diferencia: el vértice en $y = x^2$ es $(0, 0)$ mientras que en $y = x^2 + 2$ es $(0, 2)$; se encuentra 2 unidades arriba.



Si a es cualquier número diferente de 0 y c es un número positivo ($c > 0$), entonces la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un desplazamiento vertical de c unidades hacia arriba de la gráfica $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y , y su vértice es $(0, c)$.



Grafique las siguientes funciones.

- a. $y = x^2 + 3$
- b. $y = -2x^2 + 2$

Sección 1 Función cuadrática

Clase 13 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c < 0$

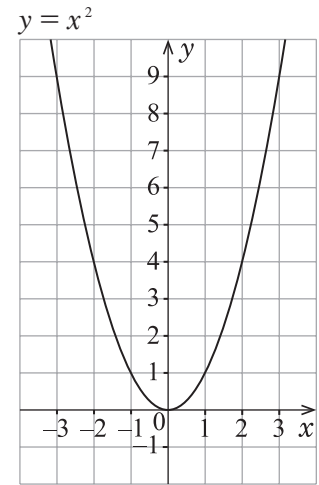


Con base en la gráfica de $y = x^2$:

- a. Complete la tabla y grafique la función $y = x^2 - 2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2				

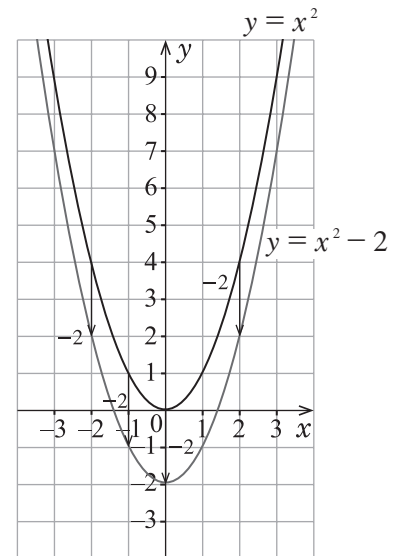
- b. Describa con sus palabras, ¿qué cambio se observa a la gráfica de $y = x^2$ para obtener la gráfica de $y = x^2 - 2$?
- c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 - 2$?



- a. Los valores de $y = x^2 - 2$ son el resultado de restar 2 a los valores de $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2

- b. La gráfica de $y = x^2$ se desplazó 2 unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $y = x^2 - 2$.
- c. Similitud: ambas gráficas son parábolas y su eje y es eje de simetría.
Diferencia: el vértice en $y = x^2$ es $(0, 0)$ mientras que en $y = x^2 - 2$ es $(0, -2)$; se encuentra 2 unidades abajo.



Si a es cualquier número diferente de 0 y c es un número negativo ($c < 0$), entonces la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un desplazamiento vertical del valor absoluto de c unidades hacia abajo de la gráfica $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y , y su vértice es $(0, c)$.



Grafique las siguientes funciones.

- a. $y = 2x^2 - 3$
b. $y = -x^2 - 3$

Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa

Clase 1 Función inyectiva

P₁

Complete los valores de y en las siguientes tablas. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

Tabla 1. $y = x + 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Tabla 2. $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

S₁

Tabla 1. $y = x + 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	0	1	2	3	4	5

Tabla 2. $y = x^2$

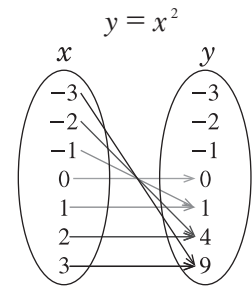
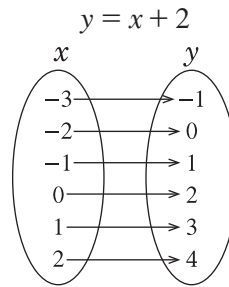
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

P₂

Observe los valores de y en las dos tablas de S₁. ¿Qué diferencia se encuentra?

S₂

En la función $y = x + 2$, cada elemento distinto del dominio tiene una imagen distinta en el contradominio; mientras que en la función $y = x^2$, dos elementos distintos del dominio tienen la misma imagen en el contradominio. Por tanto, a la función $y = x + 2$ se le dice **inyectiva** y a la función $y = x^2$, no.



En la tabla 1, todos los valores de y son diferentes. En la tabla 2, hay valores de y repetidos.

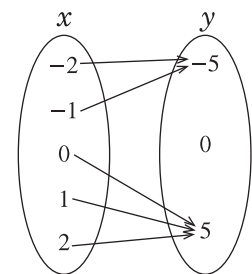
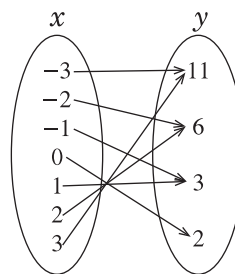
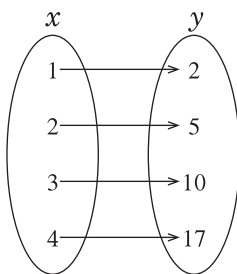
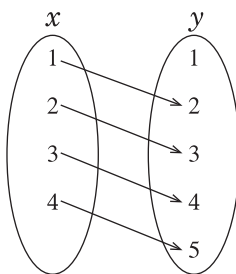


C

A una función en la que cada uno de los distintos elementos del dominio tiene una sola imagen distinta en el contradominio se le llama **función inyectiva**.

E

a. Determine cuál o cuáles de las siguientes funciones son inyectivas.



- b. Determine si la función $y = x - 2$ es inyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.
- c. Determine si la función $y = 3x^2$ es inyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa

Clase 2 Función sobreyectiva

P₁

Complete los valores de y en las siguientes tablas. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

Tabla 1. $y = x + 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Tabla 2. $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

S₁

Tabla 1. $y = x + 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	0	1	2	3	4	5

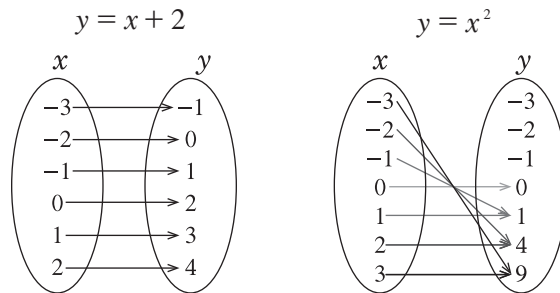
Tabla 2. $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

P₂

Observe las tablas de S₁. ¿Todos los elementos del contradominio son imagen de algún elemento del dominio?

S₂



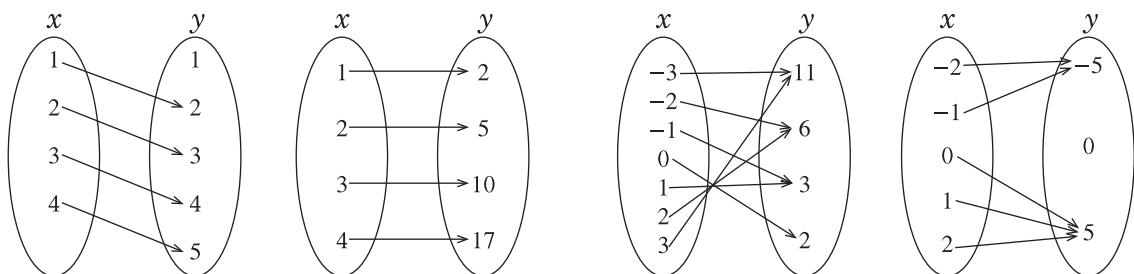
En la función $y = x + 2$, todos los elementos del contradominio son imagen de los elementos del dominio, pero para la función $y = x^2$, los números negativos del contradominio no son imagen de ningún elemento del dominio. Por tanto, a la función $y = x + 2$ se le dice **sobreyectiva** y a la función $y = x^2$, no.

C

A una función en la que cada elemento del contradominio es imagen de al menos un elemento del dominio se le llama **función sobreyectiva**.

E

a. Determine cuál o cuáles de las siguientes funciones son sobreyectivas.



- b. Determine si la función $y = x - 2$ es sobreyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.
- c. Determine si la función $y = 3x^2$ es sobreyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa

Clase 3 Función biyectiva

P₁

Complete la tabla de valores para las siguientes funciones. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros

Tabla 1. $y = x + 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Tabla 2. $y = 3x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

S₁

Tabla 1. $y = x + 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	0	1	2	3	4	5

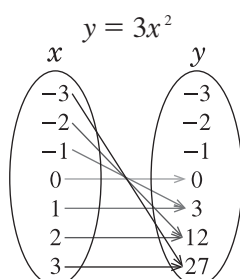
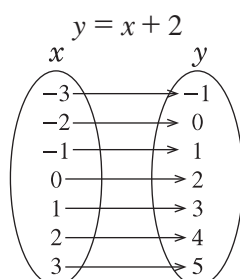
Tabla 2. $y = 3x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	27	12	3	0	3	12	27

P₂

Observe las tablas de S₁ y determine si las funciones son inyectivas y sobreyectivas.

S₂



La función $y = x + 2$ es inyectiva porque cada elemento del contradominio es imagen de un solo elemento del dominio y es sobreyectiva porque cada elemento del contradominio es imagen de al menos un elemento del dominio. Por tanto, a la función $y = x + 2$ se le dice **biyectiva**.

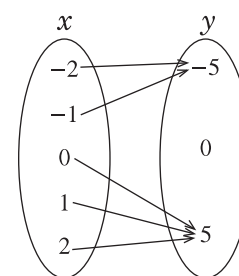
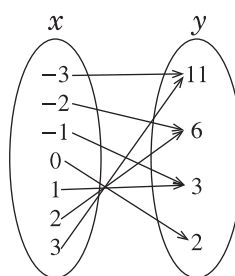
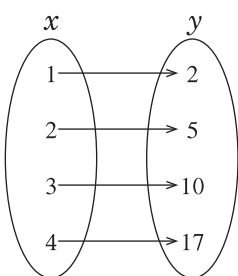
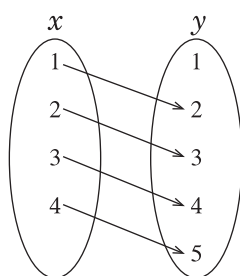
La función $y = 3x^2$ no es inyectiva porque elementos del contradominio son imagen de más de un elemento del dominio, y no es sobreyectiva porque los números negativos del contradominio no son imagen de ningún elemento del dominio. Por tanto, a la función $y = 3x^2$ no se le dice biyectiva.

C

A una función que es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo se le llama **función biyectiva**. Si una función es solo inyectiva o sobreyectiva, es decir, no es ambas, esta función no es biyectiva.

E

a. Determine cuál o cuáles de las siguientes funciones son biyectivas.



- b. Determine si la función $y = x + 3$ es biyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.
- c. Determine si la función $y = 2x^2$ es biyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa

Clase 4 Función inversa



Complete la tabla con base en las funciones dadas. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

Tabla 1. $y = x + 2$

x	-2	-1	0	1	2
y					

Tabla 2. $y = x - 2$

x	0	1	2	3	4
y					



Tabla 1. $y = x + 2$

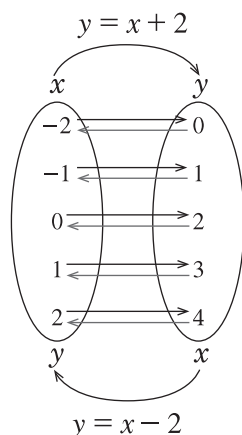
x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

Tabla 2. $y = x - 2$

x	0	1	2	3	4
y	-2	-1	0	1	2



Compare las tablas de S1. ¿Qué observa?



$y = x - 2$ es la función inversa de $y = x + 2$.



A una función que hace lo contrario de una función particular y que lleva a y (contradominio) de vuelta a x (dominio) se le llama **función inversa**.



Determine si la función b es inversa de la función a . Ambas están definidas en los números enteros.

1.

a. $y = x + 3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

2.

a. $y = 3 - x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

b. $y = x - 3$

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

b. $y = x - 3$

x	6	5	4	3	2	1	0
y							

Ejercitación A

1. Complete el valor de y en la tabla para la función $y = 2x^2$.

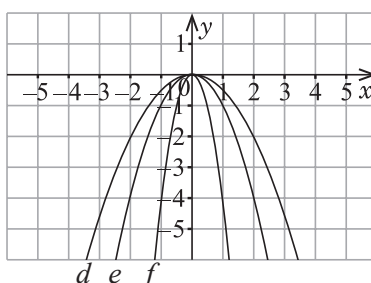
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18						

2. Grafique las siguientes funciones.

- a. $y = x^2$
b. $y = 2x^2$

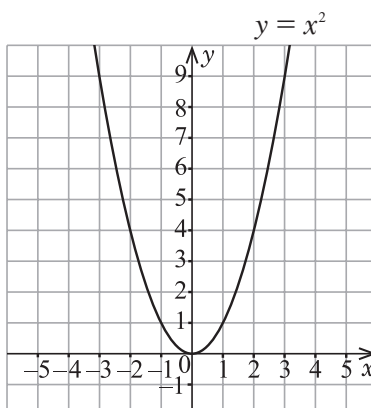
3. A cada función de la izquierda asígnele su respectiva gráfica de la derecha.

- a. $y = -x^2$
b. $y = -4x^2$
c. $y = -\frac{1}{2}x^2$



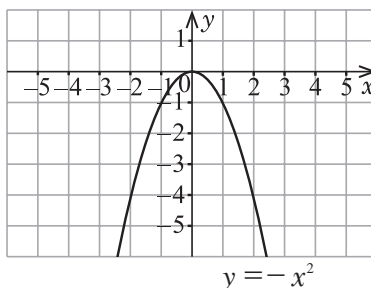
4. Con base en la función $y = x^2$, encuentre el rango en los siguientes casos.

- a. x se encuentra entre 1 y 3.
b. x se encuentra entre -3 y -1.
c. x se encuentra entre -2 y 2.



5. Con base en la gráfica de la función $y = -x^2$, identifique qué explicaciones son correctas.

- a. Si el valor de x aumenta de -2 a -1, entonces el valor de y disminuye de 4 a 1.
b. Si el valor de x aumenta de -2 a -1, entonces el valor de y aumenta de -4 a -1.
c. Si $x = 0$, $y = 0$.



6. Con base en la función $y = 3x^2$:
- Complete la tabla y los cuadros en blanco.

x	0	1	2	3	4
y	0	3			

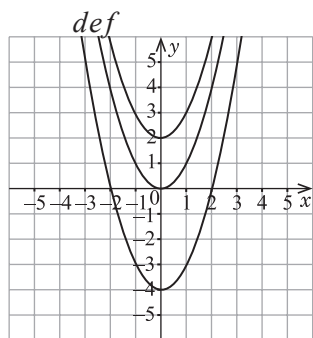




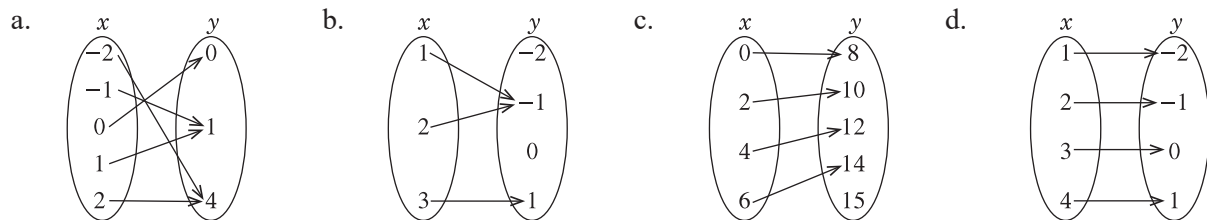


- Si el valor de x es 1 y 3, encuentre los valores de y .
 - Encuentre la razón de cambio cuando el valor de x incrementa de 1 a 3.
7. A cada función de la izquierda asígnele su respectiva gráfica de la derecha.

- $y = x^2 - 4$
- $y = x^2$
- $y = x^2 + 2$



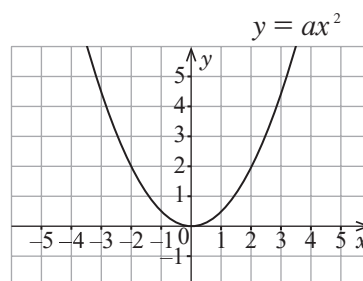
8. Determine cuál o cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.



Ejercitación B

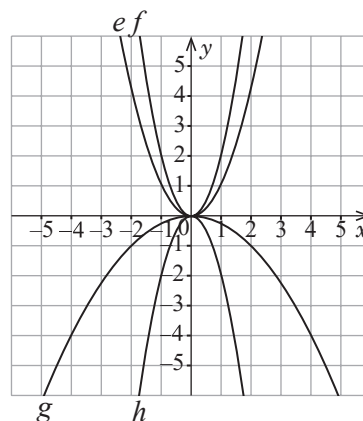
1. Con base en la gráfica de función $y = ax^2$:

- Encuentre el valor de a utilizando un punto de x y y de la gráfica.
- Cuando $x = 4$, ¿cuál es el valor de y ?



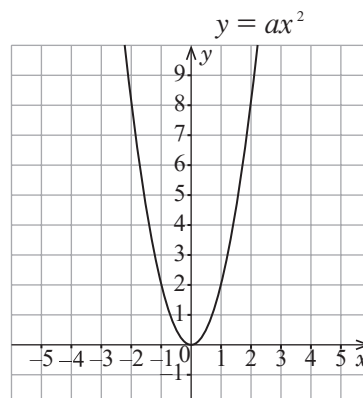
2. A cada función de la izquierda asigne su respectiva gráfica de la derecha.

- $y = -2x^2$
- $y = 2x^2$
- $y = -\frac{1}{4}x^2$
- $y = x^2$



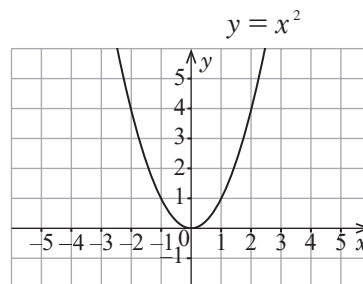
3. En la función $y = ax^2$, si el valor de x se encuentra entre 1 y 3, el valor de y se encuentra entre 2 y 18.

- Encuentre el valor de a .
- Si el valor de x se encuentra entre -2 y 1 , ¿entre qué números se encuentra y ?



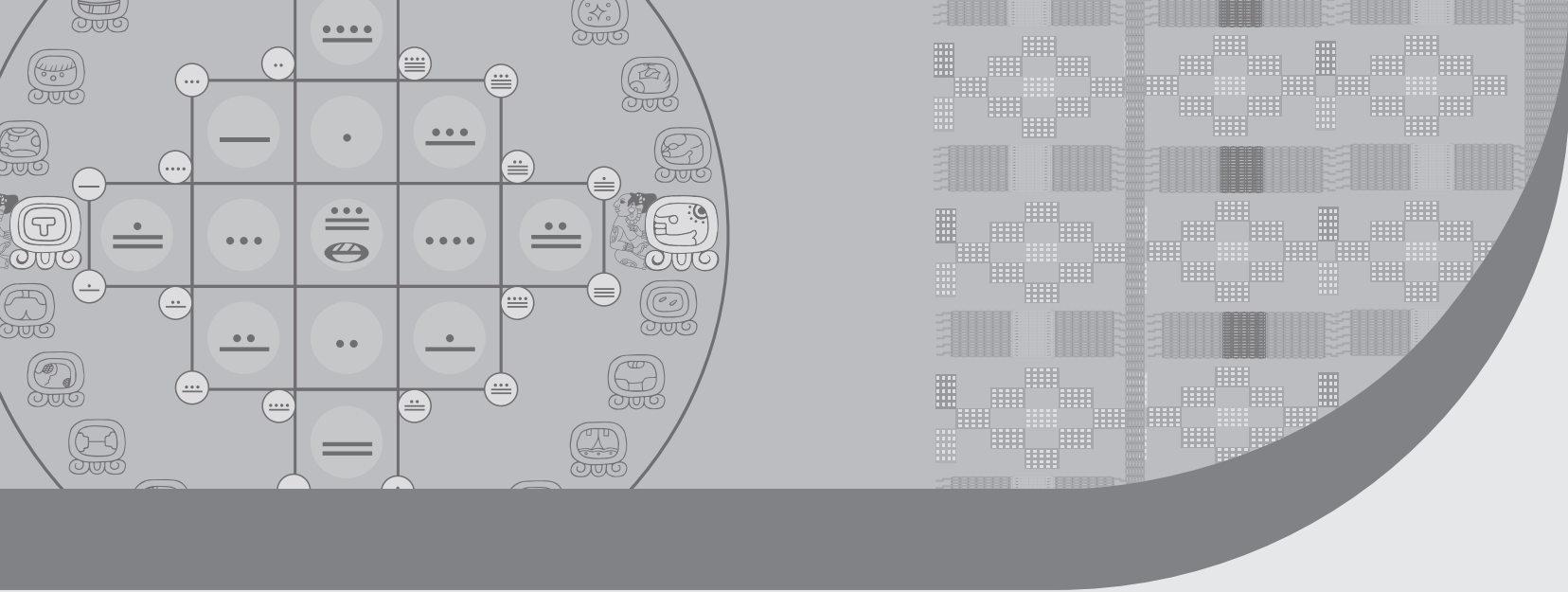
4. Grafique las siguientes funciones a partir de la gráfica de función $y = x^2$.

- $y = x^2 + 2$
- $y = x^2 - 3$



5. Determine cuál o cuáles de las siguientes parejas de funciones tienen la relación de inversa. Las parejas de ambas funciones están definidas en los números enteros.

- $y = 4 - x$ y $y = x - 4$
- $y = x + 4$ y $y = x^2$
- $y = x + 4$ y $y = x - 4$



Unidad 3 ...

Etnomatemática

Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento maya

Clase 1 calendario gregoriano y sus características



¿Cuáles son las características del calendario gregoriano?



El calendario gregoriano fue promovido por el papa Gregorio XIII y sustituyó al calendario juliano a partir de 1582. La razón más importante del cambio de calendario fue ajustar el calendario litúrgico al calendario civil y al movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

Características importantes del calendario gregoriano:

Un año tiene 365.242189 días, aproximadamente 365 días, 5 horas, 48 minutos, 45.16 segundos. Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol. Cada año tiene 12 meses. Los meses varían entre 28, 29, 30 o 31 días.

Para el año común el mes de febrero tiene 28 días; mientras que abril, junio, septiembre y noviembre tienen 30 días cada uno ($4 \times 30 = 120$ días) y enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre tienen 31 días cada uno ($7 \times 31 = 217$ días). Entonces, el total de días de un año: $28 + 120 + 217 = 365$ días.

Para el año bisiesto febrero tiene 29 días. Entonces, el total de días en un año: $29 + 120 + 217 = 366$ días.

El año bisiesto se presenta cada cuatro años como corrección de la acumulación no contabilizada de aproximadamente $\frac{1}{4}$ de día por año (un año tiene 365.242189 días). Los 0.242189 equivalen a un día extra cada cuatro años.

ENERO	FEBRERO	MARZO
LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28	LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
ABRIL	MAYO	JUNIO
LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
JULIO	AGOSTO	SEPTIEMBRE
LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE
LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	LUN MAR MIE JUE VIE SAB DOM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31



Tres años consecutivos son de 365 días. El cuarto año es de 366 días y se le llama año bisiesto. El año bisiesto surge por la corrección no contabilizada de aproximadamente $\frac{1}{4}$ de día.



- ¿Cuáles son los meses que tienen 31 días?
- ¿Cuáles son los meses que tienen 30 días?
- ¿Cuántos días tiene un año bisiesto?
- ¿Cada cuánto se realiza el ajuste del calendario gregoriano debido a la acumulación de $\frac{1}{4}$ de día anualmente?
- Si no se hicieran los ajustes cada cuatro años, ¿cuántos días de error se tendrían en un siglo?

Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento maya

Clase 2 Conversión del Cholab' al calendario gregoriano y viceversa



Observe la tabla de abajo que combina el Cholab' y el calendario gregoriano, responda.

- ¿Qué día y qué mes del Cholab' corresponden al 1 de enero del 2018 (año nuevo)?
- ¿Qué día y qué mes del calendario gregoriano corresponden al día Aj del mes Tzek'?
- ¿Cuál es la fecha en el calendario gregoriano que corresponde al año nuevo maya?

Mes/día	Iq'	Aq'ab'al	K'at	Kan	Keme	Kej	Q'anil	Toj	Tz'ik'in	B'atz'	E	Aj	I'x	Tz'ik'in	Ajmaq	No'j	Tijax	Kawoq	Ajpu	Imox	
K'ank'in																					
Muwan	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	Enero 2018
Pax	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Febrero
K'ayab'	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	1	2	3	4	5	6	Marzo
Kumku	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
Wayeb'	27	28	29	30	31	Inicio de año Ab'															
	Kej	Q'anil	Toj	Tz'ik'in	B'atz'	E	Aj	I'x	Tz'ik'in	Ajmaq	No'j	Tijax	Kawoq	Ajpu	Imox	Iq'	Aq'ab'al	K'at	Kan	Keme	
Pop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Abril
Woo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Mayo
Sip	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Sotz'	31	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Junio
Tzek'	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Julio
Xul	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
Yaxk'in	30	31	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Agosto
Mol	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	6	7	Septiembre
Ch'x'en	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
Yax	28	29	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Octubre
Sak	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	6	Noviembre
Kej	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
Mak	27	28	29	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Diciembre
K'ank'in	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	Enero 2019
Muwan	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Pax	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Febrero
K'ayab'	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	1	2	3	4	5	6	Marzo
Kumku	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
Wayeb'	27	28	29	30	31	Inicio de año Ab'															
	E	Aj	I'x	Tz'ik'in	Ajmaq	No'j	Tijax	Kawoq	Ajpu	Imox	Iq'	Aq'ab'al	K'at	Kan	Keme	Kej	Q'anil	Toj	Tz'ik'in	B'atz'	
Pop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Abril



En la columna del lado izquierdo de la tabla están los meses del Cholab' y en la columna de la derecha están los meses del calendario gregoriano. En la primera fila superior están los nombres de los días y en la parte interna los días de los meses que corresponden al calendario gregoriano.

- Para determinar el día y mes del Cholab' que corresponde al 1 de enero del 2018:

Paso 1. Se ubica enero en el lado derecho de la tabla y la fecha 1 de enero.

Paso 2. Se identifica el nombre del día que está en la parte superior. En este caso es No'j.

Paso 3. Se identifica el mes que está en la columna de la izquierda. En este caso es K'ank'in. Entonces, el día buscado es No'j y el mes es K'ank'in.

- El día Aj del mes Tzek' corresponden al 26 de junio del 2018.
- El año nuevo Maya corresponde al 1 de abril del 2018.

El Cholab' y el gregoriano no coinciden en el inicio de año debido a la diferencia de días que tiene cada año. Cholab' tiene 365 días y el calendario gregoriano 365.25 días. Por lo que cada 4 años habrá una diferencia de 1 día aproximadamente.



Un año en el Cholab' tiene 365 días, mientras que un año en el calendario gregoriano tiene 365.25 días. La diferencia en los dos calendarios está en los ajustes que se hace cada cuatro años al calendario gregoriano, denominado año bisiesto de 366 días.



- Escriba las siguientes fechas gregorianas en el calendario Cholab'.
 - 3 de marzo de 2018
 - 21 de junio de 2018
 - 9 de septiembre de 2018
- En el año 2018 del calendario gregoriano, ¿qué día y mes corresponde las siguientes fechas en el Cholab'?
 - No'j Sak
 - Kan Sak
 - Tijax Kej



Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento maya

Clase 3 Cargadores del año maya y su significación



- Según el pensamiento maya, ¿qué es el cargador del año?
- ¿Cuáles son los cargadores del año maya?



- El cargador del año es la energía que gobierna todos los acontecimientos de la vida durante el año Ab'. Corresponde al primer día del Cholab', es decir, el año nuevo maya.
- Existen cuatro cargadores:
El cargador Iq' lleva el color blanco.
El cargador Kej lleva el color negro.
El cargador E lleva el color amarillo.
El cargador No'j lleva el color rojo.

La secuencia de los cargadores del año siguiente son un ejemplo del pueblo K'iche'.

A cada uno de los cuatro cargadores le corresponde diferente nivel de energía cada 4 años. El ciclo finaliza hasta que los cuatro cargadores hayan pasado con las trece energías. Esta tabla muestra que cada cargador se vuelve a repetir cada 52 años. Por ejemplo, para que el cargador 1 Kej vuelva a ser cargador deben pasar 52 años.

Kej	.	—	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
E	..	..	..	.	—	...	...	...	...	...	...	...	...
No'j	...	...	...	..	..	—	.	—	...	...	...	...	...
Iq'	...	...	...	...	...	...	..	..	—	.	—	...	...



Los cuatro cargadores se turnan cada año en el inicio del año nuevo del Cholab'. Cuando todos hayan pasado trece veces termina un ciclo grande de 52 años Ab'.



Forme parejas entre los nombres de los cargadores y el color que les corresponde por medio de una línea.

Kej	E	No'j	Iq'
•	•	•	•
•	•	•	•
Negro	Rojo	Blanco	Amarillo

Sección 2 El universo y sus cuadrantes

Clase 1 Cruz cósmica maya



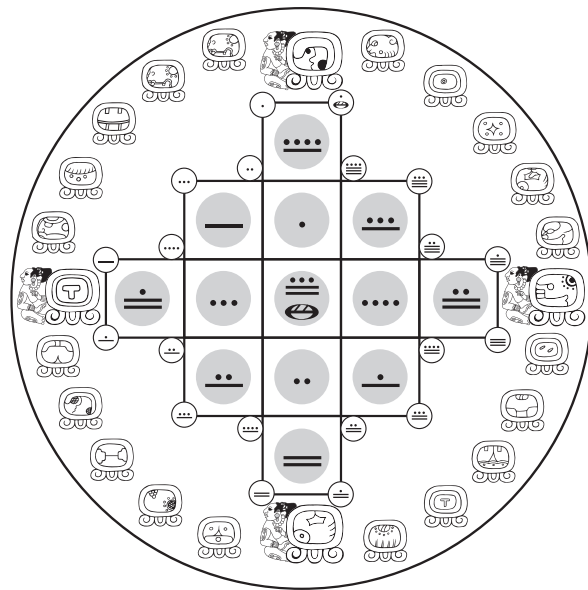
¿Qué es la cruz cósmica maya?



El símbolo importante de la cultura Maya es el Xalka'at que significa cruz cósmica maya. El Xalka'at representa los siete puntos cósmicos que conectan la energía de la claridad, de la oscuridad, del aire y del agua. Los siete puntos cósmicos del Xalka'at son: el centro, los cuatro puntos cardinales en el plano horizontal, el cenit y nadir en el plano vertical. Así mismo, conecta con la energía positiva del espacio celeste y la negativa del Xib'alb'a.

La cruz cósmica maya permite ubicarnos en el espacio y en el tiempo. El centro de este espacio es el punto a partir del cual uno se ubica con respecto a los cuadrantes del plano horizontal, y el cenit y nadir en el plano vertical. En el tiempo se pueden observar los 20 días mayas relacionados con las 13 energías y en el centro se ubica el principio y el fin.

En la vida cotidiana maya, se percibe la presencia de la cruz cósmica maya a través de la salida del Sol, caída del Sol, de donde viene el aire y hacia donde se dirige el aire.



Unidad 3
Etnomatemática



El Xalka'at o cruz cósmica maya permite al ser humano ubicarse en el tiempo y en el espacio, el mismo representa los siete puntos cósmicos que conectan la energía de la claridad, de la oscuridad, del aire y del agua.



- ¿Cuál es la función del Xalka'at?
- ¿Cuántos puntos cósmicos tiene el Xalka'at?
- ¿Cuántos nawales están presentes en el Xalka'at?
- ¿Cuáles son los puntos cósmicos del Xalka'at?



Sección 2 El universo y sus cuadrantes

Clase 2 Planetas y su representación en el pensamiento maya



¿Qué planetas estudiaron los Mayas?



A través de la observación, los Mayas desarrollaron sus conocimientos de Astronomía y Matemática, razón por la cual edificaron complejas construcciones para la exploración del espacio celeste.

Entre los planetas que los Mayas estudiaron, según la información del Código Dresde, se encuentran los siguientes.

Venus: determinaron cuatro períodos de diferentes longitudes: como estrella matutina en el Este, 236 días; desaparición o conjunción superior, 90 días; como estrella vespertina en el Oeste, 250 días; y como conjunción inferior, 8 días. En la conjunción superior, Venus está detrás del Sol y en la conjunción inferior está delante, visto desde la Tierra, como se presenta en el dibujo que está a la derecha.

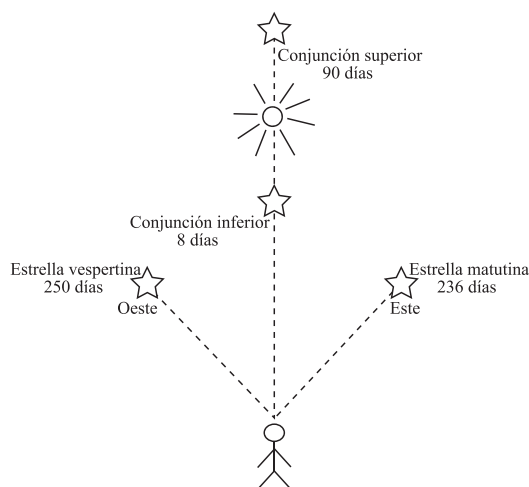
Estos 4 períodos se aproximan a la duración de las estaciones del planeta y al sumarlos dan 584 muy cerca del período sinódico de Venus. Después de 5 años de Venus su ciclo coincide con la vuelta solar, pues $5 \times 584 = 2,920$ días. $2,920 \div 365 = 8$ ciclos Ab'.

El cuadro de 8 años se encuentra en el código de Dresde y en el código Grolier.

Marte: Se encontró una lista de múltiplos de 78. Según los estudios realizados los datos corresponden a Marte y su año aparente de 780 días. Estos días corresponden a tres ciclos del Cholq'ij ($3 \times 260 = 780$ días).



Diferentes representaciones de Venus



Diferentes representaciones de Marte



Los Mayas determinaron el año aparente de Venus y Marte a través de observaciones sistemáticas y utilizando las construcciones, principalmente los orificios de puertas o ventanas. Determinaron que el período orbital sinódico de Venus es de 584 días y el de Marte es de 780 días.



- ¿Cuántos días tiene el período de traslación de Venus?
- ¿Cuántos días aparece Venus como estrella matutina?
- ¿Cuántos días aparece Venus como estrella vespertina?
- ¿Cuántos días tiene el período de traslación de Marte?
- ¿Cuántos ciclos Cholq'ij equivalen a un ciclo de Marte?

Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento maya

Clase 1 4, 13 y 20 como patrones y correlaciones en el pensamiento maya



Según el pensamiento maya, ¿cuál es la importancia de los numerales 4, 13 y 20?



Según el pensamiento maya los números 4, 13 y 20 tienen mucha importancia en el Cholq'ij y Cholab' en Matemática, Astronomía y en otras áreas.

El 4: significa la cuatriedad, es el número de cuadrantes y los 4 cargadores del tiempo.

El 13: en el calendario sagrado las 13 energías o los 13 coeficientes numéricos están relacionados con las 13 articulaciones del cuerpo humano. En un año sagrado todos los nawales pasan 13 veces.

El 20: es una de las bases del sistema de numeración maya. Es el número de días de un mes del Cholq'ij y Cholab'. Significa jun winaq (una persona) porque cada persona tiene 20 dedos, 10 de las manos y 10 de los pies. Es un medidor de tiempo de la cuenta larga en años Cholab', tun, k'atun, b'ak'tun, piktun, kalabtun, kinchiltun, alawtun, etc.

El pensamiento maya es holístico y los tres números se relacionan con interdependencia. Hay 4 cargadores del tiempo: Iq, Kej, E y No'j. A cada cargador le corresponde gobernar un año del Cholab'. Cada uno gobierna 13 veces, por lo que para un ciclo de cargadores se requieren $4 \times 13 = 52$ años del Cholab'.

El Calendario Sagrado está construido con 13 energías y 20 nawales, es decir, $13 \times 20 = 260$ días. Cada energía pasa 13 veces y cada nawal pasa 20 veces. Tanto el Cholq'ij como el Cholab' poseen como patrón las 13 energías y los 20 nawales.



El 4 y 13 son muy importantes en el Cholq'ij y Cholab'. El 20 es muy importante desde la Matemática y la medición del tiempo de la cuenta larga. 4, 13 y 20 se relacionan mutuamente para formar patrones en el pensamiento maya.



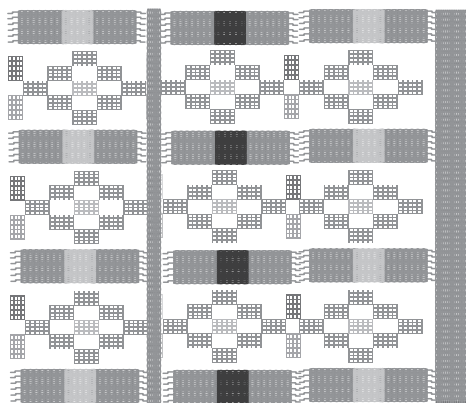
- ¿Qué significado tiene el 4 en el pensamiento maya?
- ¿Qué significado tiene el 13 en el pensamiento maya?
- ¿Qué significado tiene el 20 en el pensamiento maya?
- ¿Cuáles son los cuatro cargadores del año según el pensamiento maya?

Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento maya

Clase 2 Patrones y mosaicos en la vestimenta maya

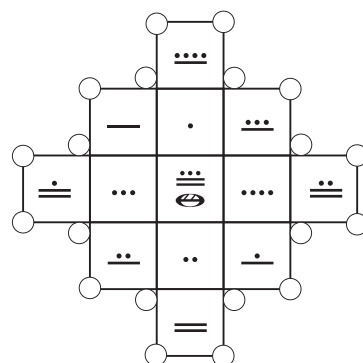


¿Qué figura observa en el siguiente tejido maya?



El mosaico del güipil posee similitud con la figura que está a la derecha. En ella se observan las 13 energías en los cuadros. Representa la cruz cósmica maya con los 4 cuadrantes.

Muchos de los diseños mayas tienen profundo significado dentro de la cosmovisión, algunos de los diseños son patrones matemáticos, otros se relacionan con la Astronomía y con la espiritualidad.

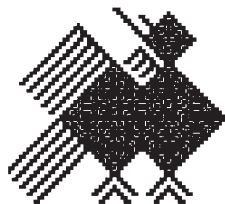


Una estrategia para comprender la ciencia, cultura y cosmovisión maya es a través de la observación e interpretación de los diseños. La cruz cósmica maya es un símbolo que tiene significados profundos en la espiritualidad y la ciencia.



Observe los siguientes tejidos y encuentre algún significado, patrones o relaciones matemáticas.

a.



b.



Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento maya

Clase 3 Trece energías del calendario maya y fecha de nacimiento maya



Indique si la energía del día en el Cholq'ij es baja, media o alta según el valor numérico.



El Cholq'ij centra su cálculo en los 20 nawales y 13 niveles de energías. Cada nawal tiene un significado y glifo específico.

Cada día del año se relaciona con una energía en el intervalo de 1 a 13. Se consideran energías bajas si están en el rango de 1 a 5, media de 6 a 8 y alta o fuerte de 9 a 13.

La combinación de las 13 energías con el nawal del día, determinan la personalidad de una persona.

En la tabla, se observan los 13 niveles de energías combinados con los 20 nawales.

El primer día en el cuadro es 1 B'atz', el siguiente día es 2 E, el tercer día es 3 Aj, hasta llegar a 13 Aq'ab'al. Luego, inicia otra trecena con 1 K'at, 2 Kan, sucesivamente.

Cholq'ij												
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
.	...	..	...	...	==		≡	—	≡	—	≡	..
..	...	...	==		≡	—	≡	—	≡	..	.	...
...	==		≡	—	≡	—	≡	..	.	...	..	...
....	≡	—	≡	—	≡	..	.	...	..	...	...	==
—	≡	—	≡	..	.	...	..	...	...	==		≡
≡	...	..	.	...	..	...	...	==		≡	—	≡
...	.	...	..	...	...	==		≡	—	≡	—	≡
...	..	...	...	==		≡	—	≡	—	≡	..	.
...	...	==		≡	—	≡	—	≡	..	.	...	..
==		≡	—	≡	—	≡	..	.	...	..	...	...
≡	—	≡	—	≡	..	.	...	..	...	...	==	
≡	..	...	..	.	...	..	...	...	==		≡	—
...	..	.	...	..	...	...	==		≡	—	≡	—
.	...	..	...	...	==		≡	—	≡	—	≡	..
..	...	...	==		≡	—	≡	—	≡	..	.	...
...	==		≡	—	≡	—	≡	..	.	...	..	...
....	≡	—	≡	—	≡	..	.	...	..	...	...	==
—	≡	—	≡	..	.	...	..	...	...	==		≡
≡	...	..	.	...	..	...	...	==		≡	—	≡
...	.	...	..	...	...	==		≡	—	≡	—	≡

Esta forma de relacionar los niveles de energía y el nawal permiten visualizar las diversas personalidades, destinos y rasgos conductuales de las personas.



Según la cosmovisión maya, toda persona trae un ch'umilal, estrella, destino, misión de vida. Los niveles de energía y los nawales determinan la personalidad de una persona en la sociedad.



Utilizando la tabla de nawales y energías del Cholq'ij, escriba:

- 4 fechas con energía baja.
- 2 fechas con energía media.
- 4 fechas con energía alta o fuerte.

Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 1 Matemática Maya y sus características: circular y cuadrangular



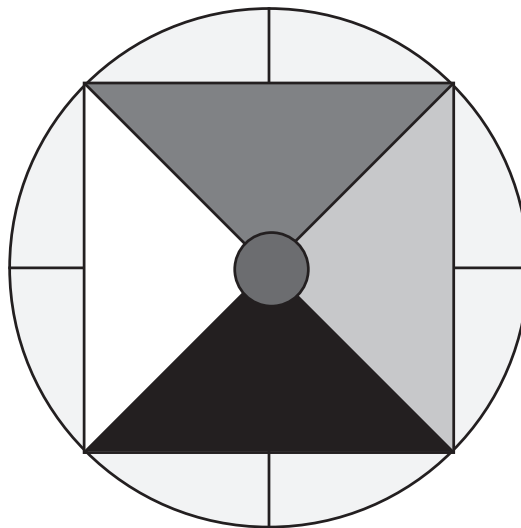
¿Qué es el pensamiento circular y cuadrangular según la Matemática Maya?



Los antepasados Mayas utilizaron el círculo y el cuadrado porque representaban el pensamiento filosófico matemático. Estas formas de interpretar el universo son representadas en los güipiles, utensilios de trabajo, construcciones, entre otros.

La circunferencia significa el límite de nuestro entendimiento, relativo al contexto de la comunidad y cultura. El área del círculo es el ambiente social, cultural, espiritual e imaginario donde nos formamos y nos desarrollamos como personas.

La Matemática Maya es circular porque su base es 20 y se llama k'al que en el idioma K'iche' significa vuelta. 40 se dice 2 k'al, 60 es 3 k'al, y así sucesivamente. Su base 20 se llama jun winaq, pero también se llama jun k'al. El desarrollo exponencial de la base (20^0 , 20^1 , 20^2 , 20^3 , ...) permite construir sus posiciones hasta el infinito.



El cuadrado representa el lugar donde vivimos, que se comunica con la bóveda celeste y el Xib'alb'a. Los cuatro triángulos que forman el cuadrado representan los cuatro sectores del universo, acompañados de sus cinco guardianes o energías.

El punto cósmico que orienta el quehacer diario es la dirección por donde sale el Sol, por donde se oculta el Sol, por donde sale el aire y hacia donde se dirige el aire.

En el contexto actual, la Matemática es incluida en la celebración de una ceremonia espiritual a través del conteo de las energías de cada nawal. En la ceremonia, el dibujo de forma cuadrangular indica los cuatro puntos cardinales de la madre tierra y el centro representa la vida.



El desarrollo del pensamiento maya es circular y cuadrangular porque es cíclico y espiritual. Es holístico e integral y guarda equilibrio en los patrones de los fenómenos sociales, espirituales y naturales. La interrelación de los mismos permite construir un pensamiento y un cosmos equilibrado.



Explique lo que entiende de los siguientes conceptos.

- El pensamiento matemático maya es circular.
- El pensamiento matemático maya es cuadrangular.

Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 2 Sistema binario y su naturaleza



a. ¿Cómo se llama el sistema de numeración de la siguiente tabla?

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Valor posicional	100,000	10,000	1,000	100	10	1

b. ¿Cómo se llama el sistema de numeración de la siguiente tabla?

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	20^5	20^4	20^3	20^2	20^1	20^0
Valor posicional	3,200,000	160,000	8,000	400	20	1

c. ¿Cómo se llama el sistema de numeración de la siguiente tabla?

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valor posicional	32	16	8	4	2	1

d. ¿Qué características tiene el sistema de numeración del inciso c?



- Sistema de numeración de base 10 o decimal
- Sistema de numeración de base 20 o vigesimal
- Sistema de numeración de base 2 o binario
- El sistema binario tiene las siguientes características:
Es un sistema de numeración cuya base es 2.

Utiliza como símbolos dos dígitos, 0 y 1.

Cada dígito adquiere un valor según la posición que ocupa, excepto el 0.

El valor del dígito 1 en la primera posición es 1, en la segunda posición es 2, en la tercera posición es 4, en la cuarta posición es 8, y así sucesivamente.



El sistema de numeración binario utiliza dos símbolos: 0 y 1.
Cada número posee distinto valor según la posición que ocupa. El valor de cada posición es el valor de la potencia cuya base es 2 elevado a un exponente igual a la posición del dígito menos 1.
Una cantidad expresada en sistema binario se representa utilizando el subíndice 2.

Ejemplo:

El 8 en sistema binario se escribe como 1000_2 , porque el dígito 1 en la cuarta posición tiene un valor posicional de 8 y cero en las demás posiciones. El subíndice 2 indica que el número está escrito con base 2.



- ¿Qué símbolos utiliza el sistema binario para representar los números?
- ¿Qué valor tiene el dígito 1 en la tercera posición en el sistema binario?
- ¿Qué valor tiene el dígito 1 en la quinta posición en el sistema binario?
- ¿Qué valor tiene el dígito 0 en la cuarta posición en el sistema binario?

Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 3 Conversión del sistema binario al sistema decimal y viceversa



- Escriba el 7 en sistema de numeración binario.
- Escriba 1010_2 en sistema de numeración decimal.



Para escribir un número del sistema decimal al sistema binario o del sistema binario al decimal, se utiliza como referente la tabla de los valores posicionales.

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valor posicional	32	16	8	4	2	1

- Para representar el 7 en sistema binario:
 - Paso 1. Se determina las posiciones necesarias observando la tabla de valores posicionales. En este caso son la primera, segunda y tercera posición, porque la cuarta posición tiene valor de 8.
 - Paso 2. Se escribe 1 en la tercera posición, cuyo valor posicional es 4. Luego, se escribe 1 en la segunda posición, cuyo valor posicional es 2 y por último 1 en la primera posición, cuyo valor posicional es 1 (sumando valores posicionales: $4 + 2 + 1 = 7$).
 - Paso 3. Se escribe la equivalencia: $7 = 111_2$
- Para escribir el número 1010_2 en sistema decimal:
 - Paso 1. Se determina cuántas posiciones tiene el número binario. En este caso son cuatro posiciones.
 - Paso 2. Se observan los valores posicionales de cada dígito observando la tabla de valores posicionales y luego se suman.

Número binario	1	0	1	0
Valor posicional	8	0	2	0

$$8 + 0 + 2 + 0 = 10$$

- Paso 3. Se escribe la equivalencia: $1010_2 = 10$.



Para convertir un número decimal a sistema binario o un número binario a sistema decimal se utiliza la tabla de valores posicionales.

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valor posicional	32	16	8	4	2	1



- Represente los siguientes números en sistema binario.
 - 5
 - 12
 - 15
 - 16
 - 20
 - 30
- Represente los siguientes números en sistema decimal.
 - 100_2
 - 110_2
 - 1011_2
 - 1110_2
 - 10010_2
 - 11000_2

Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 4 Sistema binario en las computadoras



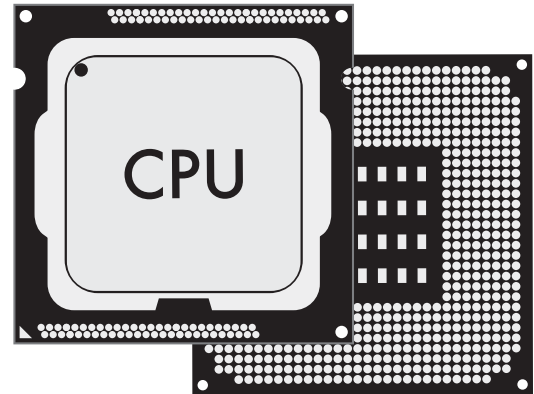
¿En qué se utiliza el sistema de numeración binario?



El sistema de numeración binario es utilizado en los microprocesadores de los dispositivos informáticos para detectar el encendido y apagado de señal o de bits, como también se les conoce.

El sistema de numeración binario tiene muchos usos, desde la programación de microprocesadores, transferencia de datos, cifrado de información, hasta comunicación digital y electrónica.

Todas las computadoras operan con dos dígitos: el 0 y el 1, a través del código ASCII que significa Código Estadounidense Estándar para el Intercambio de Información. Este código desarrolla un carácter alfabético especial asignándole un número binario. El código permite la representación de $2^8 = 256$ caracteres, ya sean letras, números o cualquier símbolo como @, <, ¿, etc.



Las unidades de almacenamiento de las computadoras:

Bit:	un dígito del sistema binario
Byte:	8 bits
Kilobyte (KB)	1024 bytes, es decir, 2^{10} .
Megabyte (MB)	1024 KB = 1,048,576 bytes, es decir, 2^{20} .
Gigabyte (GB)	1024 MB = 1,073,741,824 bytes, es decir, 2^{30} .
Terabytes (TB)	1024 GB = 1,099,511,627,776 bytes, es decir, 2^{40} .

El sistema binario en las computadoras actúa en la tarjeta madre, donde están los microprocesadores, memoria, puertos y ranuras de expansión.



El sistema de numeración binario tiene mucha aplicación en la tecnología. Es el lenguaje que se utiliza en los microprocesadores. Para un ordenador digital solo existen dos posibles situaciones: encendido y apagado. Encendido corresponde a 1 y apagado corresponde a 0.



Relacione los términos y su significado con una línea.

2^{30} bytes	•	• Kilobyte
Un bit	•	• Gigabyte
2^{10} bytes	•	• Un dígito del sistema binario
Un bytes	•	• Terabyte
2^{40} bytes	•	• 8 bits



Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 5 Cero como elemento matemático hindú



¿Cómo surge el cero como elemento matemático hindú?



Los primeros signos numéricos del pueblo hindú, que se han encontrado en inscripciones que datan del año 286 al 232 a. C., se relacionan con el 1, 4 y 6.

Los números que fueron encontrados en inscripciones de templos son 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9, durante los siglos I y II d. C. En estas inscripciones todavía no se ofrecen evidencias de la utilización del valor posicional.

Los primeros indicios de la utilización del valor posicional fueron entre los siglos V y IX. La inscripción más antigua que consigna el cero procede del año 876 d. C. Con el descubrimiento del cero se fortaleció el uso del valor posicional.

La civilización hindú logró desarrollar la numeración posicional, que constituye uno de los grandes logros del pensamiento humano. Así mismo, el descubrimiento y uso del cero, una hazaña de gran trascendencia.

Según el pensamiento hindú el cero significa vacío o vacante y el primer nombre que recibió fue sunya.

El símbolo para representar el cero en un principio fue el punto o un círculo pequeño. La Matemática hindú se propagó hacia el Oeste a través de los árabes y posteriormente se convirtió en la Matemática que conocemos actualmente. La palabra “cifra” que designa a los números se deriva del árabe as-sifr, en un principio se utilizó para designar al cero. Posteriormente al traducirlo al latín se convirtió en Zephyrum que acabó en contraerse como cero.



El cero que se utiliza en el sistema de numeración decimal tiene sus orígenes en la civilización hindú. Según el pensamiento hindú, el cero significa vacío o vacante.



- ¿Cuáles fueron los primeros signos numerales que se encontraron en la civilización hindú?
- ¿En qué año aparece por primera vez el uso del cero en la civilización hindú?
- ¿Cómo se representaba el cero en su creación?
- Según el pensamiento hindú, ¿qué significado tiene el cero?
- ¿Cómo se originó la palabra cero?

Sección 5 Sistemas de medición

Clase 1 Sistema de referencia para área y volumen en las comunidades Mayas



¿Cuáles son las unidades de medida de área y volumen utilizadas en las comunidades Mayas?



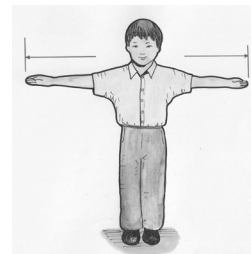
Medidas de área en las comunidades Mayas:

En las comunidades Mayas se utiliza como medida de área la cuerda. Generalmente, la cuerda es una medida para trabajos agrícolas, para la venta y compra de terreno. Actualmente la cuerda tiene diversas medidas. Algunos consideran que posee 12 brazadas por 12 brazadas, otros en cambio consideran que posee 15 brazadas por 15 brazadas. En algunos municipios de Chimaltenango aplican 20 brazadas por 20 brazadas. Probablemente esta medida sea la original porque coincide con la base 20 del sistema vigesimal.

Es importante indicar que 1 brazada posee 2 varas, esto quiere decir que una cuerda de 20 brazadas por 20 brazadas es igual a 40 varas por 40 varas. Al relacionar con el sistema internacional de medidas se puede afirmar que una vara tiene 0.84 metros y que 40 varas es igual a 33.6 metros.

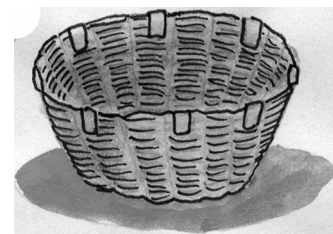
Es importante aclarar que toda medida de área se da en unidades cuadradas, es decir, $40 \text{ varas} \times 40 \text{ varas}$ es igual a 1,600 varas cuadradas. De la misma manera una cuerda de terreno de $33.6 \text{ metros} \times 33.6 \text{ metros}$ es igual a 1,128.96 metros cuadrados.

Una brazada = dos varas



Medidas de volumen en las comunidades Mayas:

Una medida importante en las comunidades Mayas es el moq' (en kaqchikel) o puño para medir frijol, maíz y otros granos. La pisca o medida pequeña agarrada con dedos para la sal, azúcar o para granos pequeños. Otra unidad de medida es el almúl (en kaqchikel) que es conocido como medidor de granos y es aproximadamente 12.5 libras, es decir, 2 almúl equivalen a una arroba. El almúl se mide con un canasto o una caja de madera y entran 8 en un quintal.



Almul.

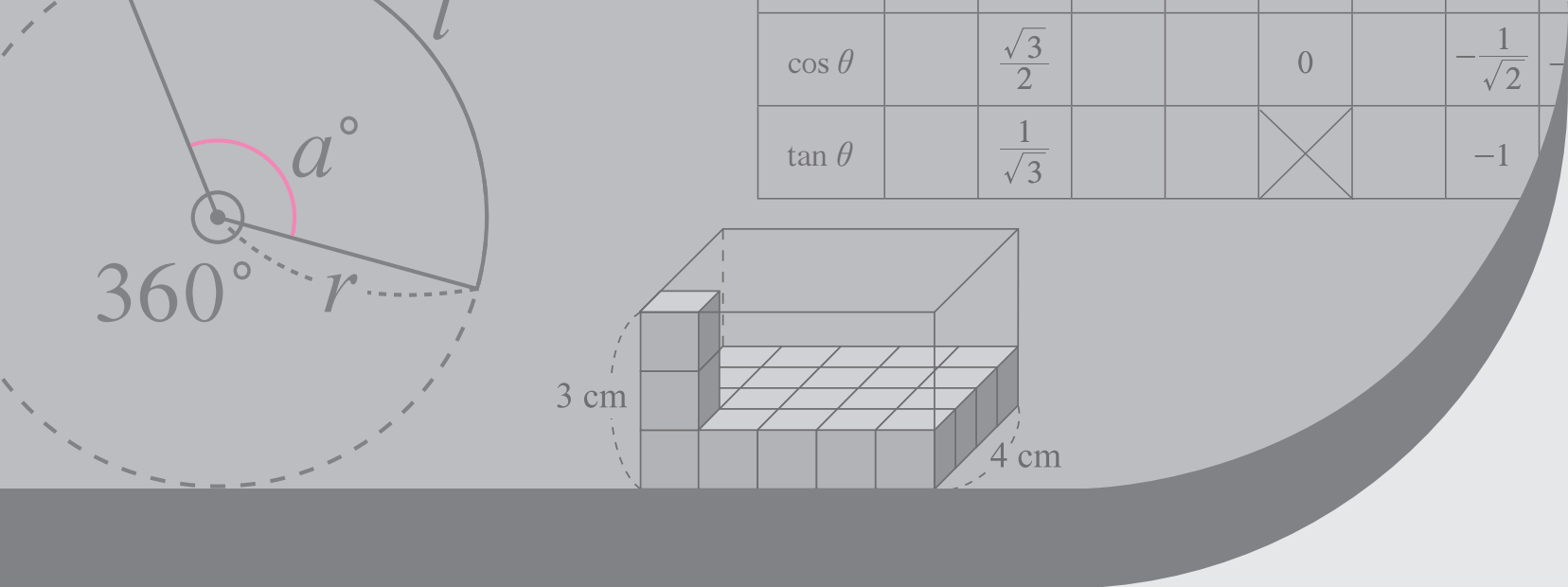


El pensamiento maya tiene como unidad de área la cuerda y como unidad de volumen la pisca, el puño y el almúl.



- ¿Cuántas brazadas cuadradas hay en una cuerda de $20 \text{ brazadas} \times 20 \text{ brazadas}$?
- ¿Cuántas varas cuadradas hay en una cuerda de $40 \text{ varas} \times 40 \text{ varas}$?
- Averigüe qué otras unidades de medida de área y de volumen se utilizan en su comunidad.





Unidad 4 ...

Geometría

Sección 1 Círculos

Clase 1 Sectores circulares y segmentos



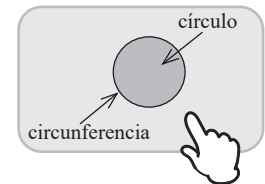
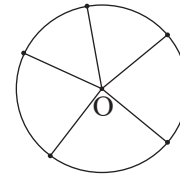
a. ¿Qué tipo de figura se forma si se conectan los puntos que están a la misma distancia de un punto fijo O?

b. ¿Cuál es el nombre del punto O?



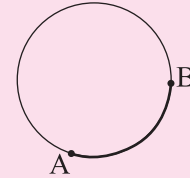
a. La figura es la circunferencia.

b. El nombre del punto O es centro de la circunferencia.

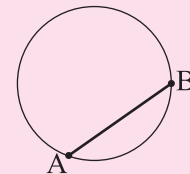


Los principales elementos de un círculo son:

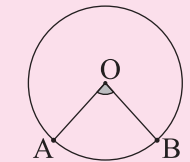
A una parte de la circunferencia que une cualquier par de puntos A y B se le llama **arco AB** y se escribe $\widehat{AB}$.



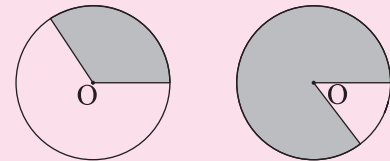
A un segmento que une dos puntos en la circunferencia se le llama **cuerda AB**.



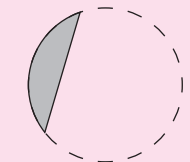
A un ángulo formado en el punto O por dos radios se le llama **ángulo central**.



A una superficie limitada por dos radios del círculo y su arco se le llama **sector circular**.

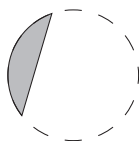


A una porción de la superficie del círculo limitada por una cuerda se le llama **segmento circular**.

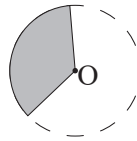


Escriba el nombre del elemento del círculo representado en cada imagen.

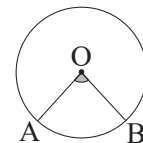
a.



b.

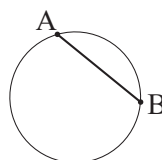
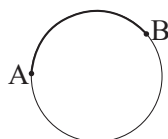


c. $\angle AOB$



d. Parte de la circunferencia

e. Segmento AB

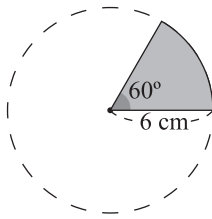


Sección 1 Círculos

Clase 2 Longitud de arcos

P

Encuentre la longitud del arco comprendido entre un ángulo central de 60° y un radio de 6 cm, utilizando la proporción.



En la proporción $a : b = c : d$ el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.

Si $a : b = c : d$, entonces $ad = bc$.



El perímetro de la circunferencia cuyo radio es 6 cm se puede encontrar:

$$\begin{aligned} (\text{Perímetro de la circunferencia}) &= 2\pi \times 6 \\ &= 12\pi \end{aligned}$$

S

Como la circunferencia tiene 360° :

Longitud (l)	l	12π
Ángulo	60°	360°

$$l : 12\pi = 60^\circ : 360^\circ$$

$$360^\circ l = 12\pi \times 60^\circ$$

$$l = 12\pi \times \frac{60^\circ}{360^\circ}$$

$$= 12\pi \times \frac{60^\circ_1}{360^\circ_6}$$

$$= 12\pi \times \frac{1}{6}$$

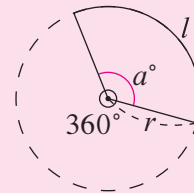
$$= 2\pi$$

Respuesta: la longitud del arco comprendido en un ángulo central de 60° es 2π cm.

C

Para encontrar la longitud de un arco comprendido entre el ángulo central a , se multiplica el perímetro de la circunferencia por el valor de razón del ángulo central a° a 360° .

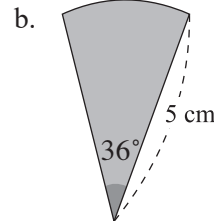
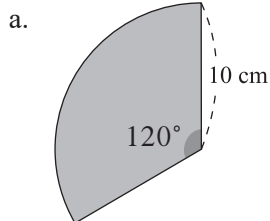
$$l = 2\pi r \times \frac{a^\circ}{360^\circ}$$



donde l es longitud del arco y r es el radio de la circunferencia.

E

1. Encuentre la longitud de arco.



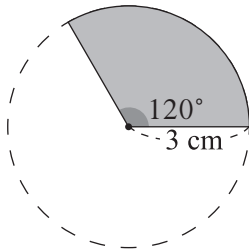
- Encuentre la longitud del arco comprendido entre un ángulo central de 30° y un radio de 12 cm.
- Encuentre la longitud del arco comprendido entre un ángulo central de 45° y un radio de 8 cm.

Sección 1 Círculos

Clase 3 Área de sectores circulares



Encuentre el área del sector circular determinado por un ángulo central de 120° y un radio de 3 cm, utilizando la proporción.



El área de un círculo cuyo radio es 3 cm se puede encontrar:

$$\begin{aligned} (\text{Área del círculo}) &= \pi \times 3 \times 3 \\ &= 9\pi \end{aligned}$$



Como la circunferencia tiene 360° :

Área (A)	A	9π
Ángulo	120°	360°

$$A : 9\pi = 120^\circ : 360^\circ$$

$$360^\circ A = 9\pi \times 120^\circ$$

$$A = 9\pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ}$$

$$= 9\pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ}$$

$$= 9\pi \times \frac{1}{3}$$

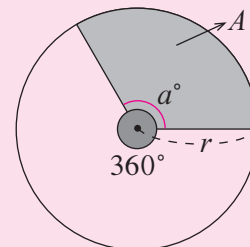
$$= 3\pi$$

Respuesta: el área del sector circular determinado por un ángulo central de 120° es $3\pi \text{ cm}^2$.



Para encontrar el área de un sector circular, se multiplica el área del círculo por el valor de razón del ángulo central a° a 360° .

$$A = \pi r^2 \times \frac{a^\circ}{360^\circ}$$

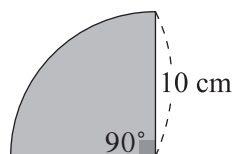


donde A es el área del sector circular y r es el radio de la circunferencia.

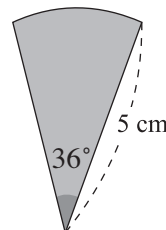


1. Encuentre el área de cada sector circular.

a.



b.



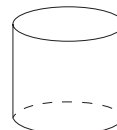
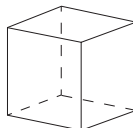
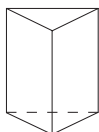
2. Encuentre el área del sector circular determinado por un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm.

Sección 2 Sólidos

Clase 1 Representación y clasificación de sólidos (1)

P

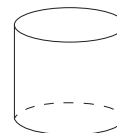
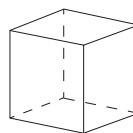
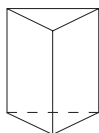
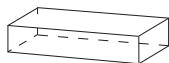
- a. Identifique el nombre de los siguientes sólidos geométricos.



- b. Clasifique los sólidos geométricos de acuerdo a las similitudes de sus caras.
c. ¿Cómo se nombra un prisma?

S

- a.



Prisma rectangular

Prisma triangular

Cubo

Cilindro

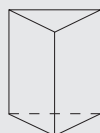
- b.

A la cara sobre la que se apoya un sólido geométrico se le llama **base** y a la cara de alrededor se le llama **cara lateral**.

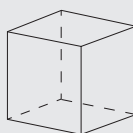
Grupo 1



Prisma rectangular



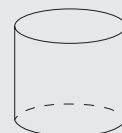
Prisma triangular



Cubo

Sus caras laterales y sus bases son polígonos.

Grupo 2



Cilindro

Su cara lateral es curva y sus bases son círculos.

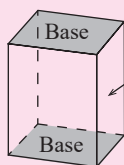
- c. Se nombra un prisma de acuerdo a la forma de sus bases.

C

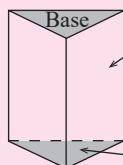
A un sólido geométrico que tiene dos bases poligonales congruentes, las cuales son paralelas, se le llama **prisma**. A un prisma que tiene todos sus lados iguales se le llama **cubo**. Un prisma es nombrado por la forma del polígono de sus bases.

A un sólido geométrico con dos bases circulares congruentes, las cuales son paralelas, y una cara lateral curva se le llama **cilindro**.

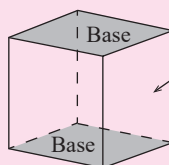
Los elementos que conforman cada sólido geométrico son:



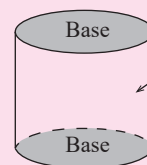
Prisma rectangular



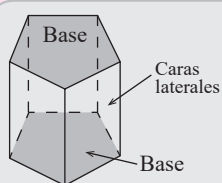
Prisma triangular



Cubo

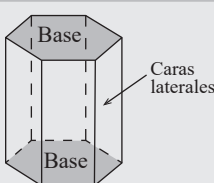


Cilindro



Prisma pentagonal

A un prisma cuyas bases son pentágonos se le llama prisma pentagonal.



Prisma hexagonal

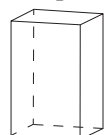
A un prisma cuyas bases son hexágonos se le llama prisma hexagonal.



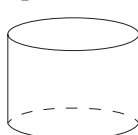
E

- Identifique las bases e indique el nombre que le corresponde a cada sólido geométrico.

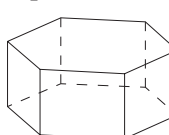
- a.



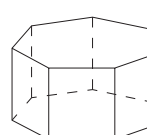
- b.



- c.



- d.

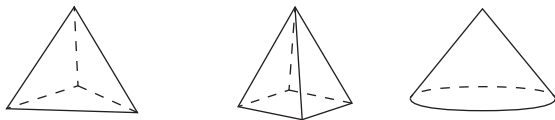


Sección 2 Sólidos

Clase 2 Representación y clasificación de sólidos (2)

P

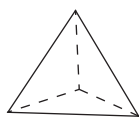
- a. Identifique el nombre de los siguientes sólidos geométricos.



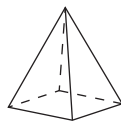
- b. Clasifique los sólidos geométricos de acuerdo a las similitudes de sus caras.
c. ¿Cómo se nombra una pirámide?

S

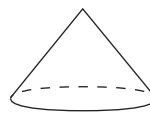
- a.



Pirámide triangular



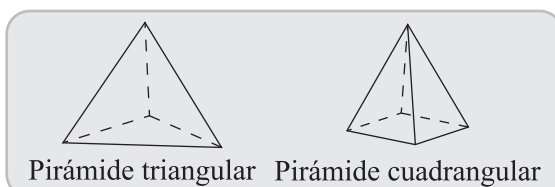
Pirámide cuadrangular



Cono

- b.

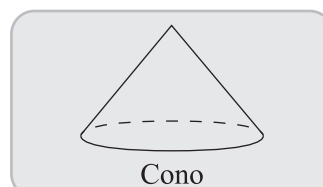
Grupo 1



Pirámide triangular Pirámide cuadrangular

Sus caras laterales y sus bases son polígonos.

Grupo 2



Cono

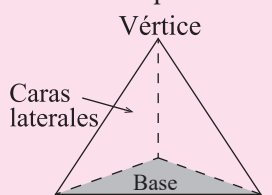
Su cara lateral es curva y su base es un círculo.

- c. Se nombra una pirámide de acuerdo a la forma de su base.

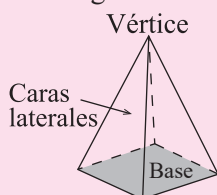
C

A un sólido geométrico que tiene una base poligonal y varias caras laterales con forma triangular que tienen un vértice en común, se le llama **pirámide**. Una pirámide es nombrada por la forma del polígono de su base.

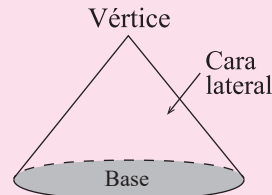
A un sólido geométrico con base circular, una cara lateral curva y un solo vértice se le llama **cono**. Los elementos que conforman cada sólido geométrico son:



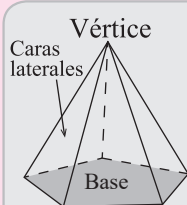
Pirámide triangular



Pirámide cuadrangular

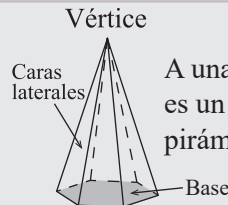


Cono



Pirámide pentagonal

A una pirámide cuya base es un pentágono se le llama pirámide pentagonal.



Pirámide hexagonal

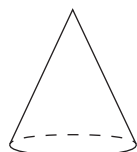
A una pirámide cuya base es un hexágono se le llama pirámide hexagonal.



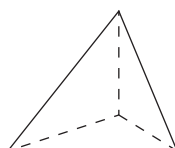
E

- Identifique las bases e indique el nombre que le corresponde a cada sólido geométrico.

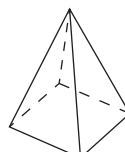
- a.



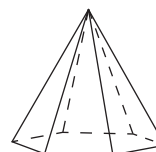
- b.



- c.



- d.



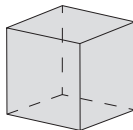
Sección 3 Construcción de sólidos

Clase 1 Cubos

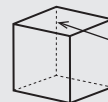


Observe el cubo. Al cortar el sólido geométrico por algunas de sus aristas, se obtiene su plano desarrollado.

- ¿Cuántas caras tiene el cubo?
- ¿Qué forma tienen las caras del cubo?



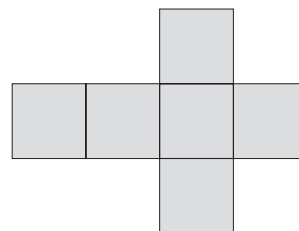
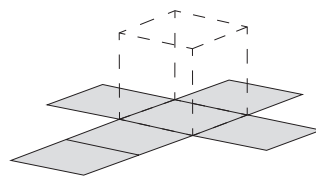
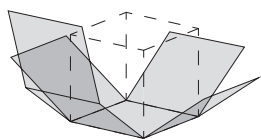
Al segmento de intersección entre dos caras de un sólido se le llama arista.



Aristas



- Un cubo está formado por seis caras iguales.
- Las caras tienen forma cuadrada.



El plano desarrollado de un cubo tiene seis cuadrados iguales y puede formarse de diferentes maneras. Las siguientes figuras son algunos ejemplos de planos desarrollados de un cubo.

Figura 1

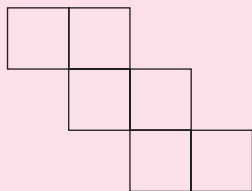
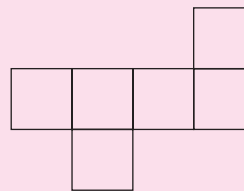
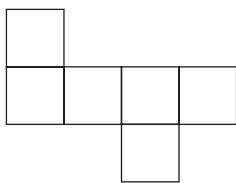


Figura 2

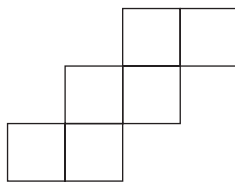


Identifique cuáles de los siguientes planos desarrollados corresponden a un cubo.

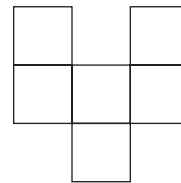
a.



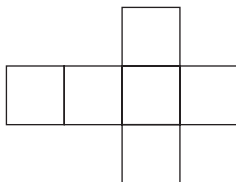
b.



c.



d.



e.

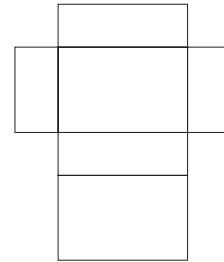
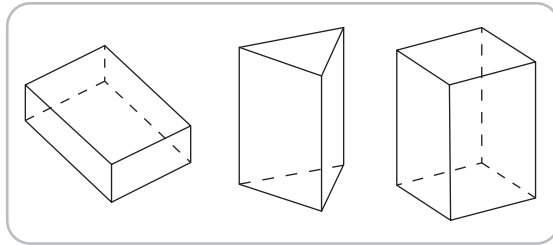


Sección 3 Construcción de sólidos

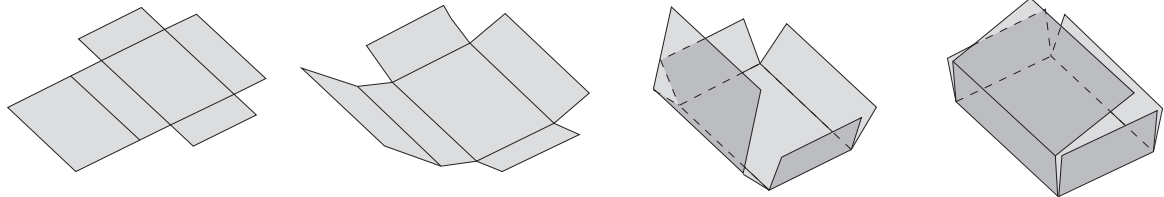
Clase 2 Prismas



Identifique a qué prisma le corresponde el plano desarrollado de la derecha y explique por qué.

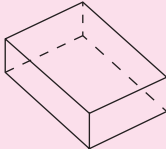
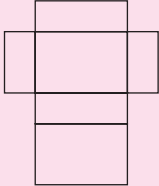
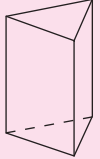
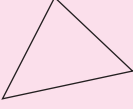
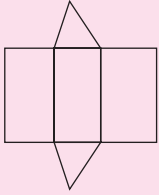
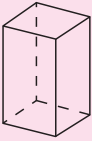
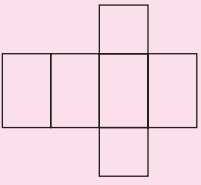


Imagine que el plano desarrollado se dobla por las aristas para conocer el sólido geométrico que se construye.



El plano desarrollado corresponde a un prisma rectangular, porque al terminar de doblarlo se forma un prisma con seis caras y base rectangular.

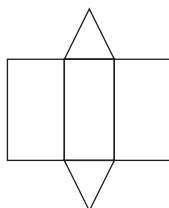


Prisma generado	Base del prisma	Plano desarrollado
 Prisma rectangular	 Rectángulo	
 Prisma triangular	 Triángulo	
 Prisma cuadrangular	 Cuadrado	

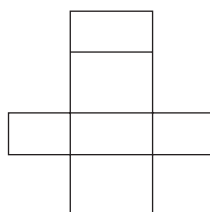


Identifique el nombre del prisma al que corresponde cada uno de los planos desarrollados.

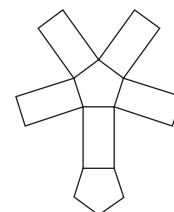
a.



b.



c.

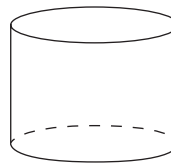


Sección 3 Construcción de sólidos

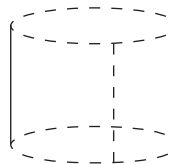
Clase 3 Cilindros



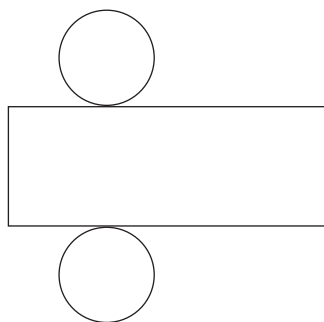
Trace el plano desarrollado del cilindro de la derecha.



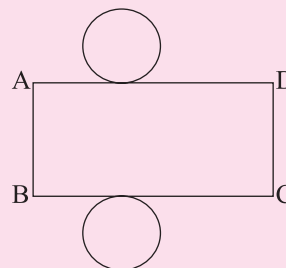
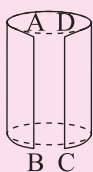
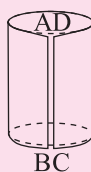
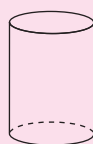
Imagine cortar el cilindro por la parte punteada, sin separar las bases de la cara lateral.



El plano desarrollado queda como el de abajo.



El plano desarrollado de un cilindro tiene dos círculos congruentes como sus bases y un rectángulo como su cara lateral.

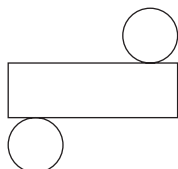


La altura de un cilindro coincide con el lado AB del rectángulo del plano desarrollado. La longitud del lado AD del rectángulo del plano desarrollado coincide con la longitud de la circunferencia.



Elija los planos desarrollados que generen un cilindro.

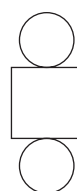
a.



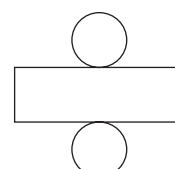
b.



c.



d.



Sección 3 Construcción de sólidos

Clase 4 Pirámides



Observe la imagen y forme parejas entre el plano desarrollado y el sólido geométrico que se genera.

Plano desarrollado		
A.	B.	C.
Sólido geométrico		
a.	b.	c.



El plano desarrollado A construye el sólido geométrico c, porque su base es cuadrada y la cantidad de triángulos coincide con la cantidad de lados que tiene la base.

El plano desarrollado B construye el sólido geométrico a, porque su base es un pentágono y la cantidad de triángulos coincide con la cantidad de lados que tiene la base.

El plano desarrollado C construye el sólido geométrico b, porque su base es un triángulo y la cantidad de triángulos coincide con la cantidad de lados que tiene la base.



Pirámide generada	Base de la pirámide	Plano desarrollado
 Pirámide triangular	 Triángulo	
 Pirámide cuadrangular	 Cuadrado	
 Pirámide pentagonal	 Pentágono	

Para construir una pirámide se unen los triángulos por sus aristas en común y se colocan los triángulos de manera que todos se unan en el vértice.



Identifique el nombre de la pirámide que corresponde a cada uno de los planos desarrollados.

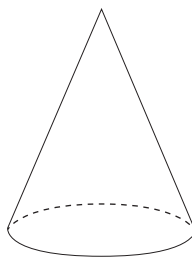
a.	b.	c.	d.
----	----	----	----

Sección 3 Construcción de sólidos

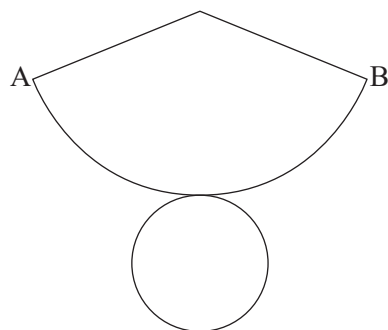
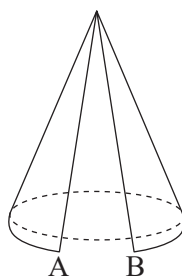
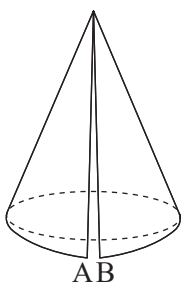
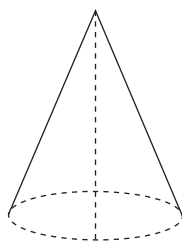
Clase 5 Conos



Trace el plano desarrollado del cono de la derecha.



Al cortar el cono por la línea punteada y abrirlo, se muestra su plano desarrollado.

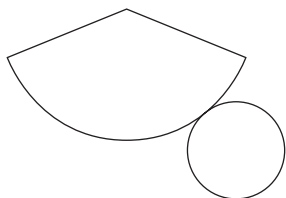


Un cono tiene una base circular y una cara lateral curva. En el plano desarrollado se puede observar que la cara lateral es un sector circular. La longitud de su $\widehat{AB}$ coincide con el perímetro de la circunferencia de su base.

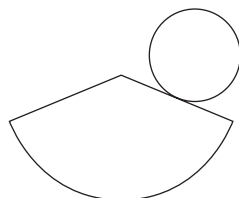


Elija los planos desarrollados que construyan un cono.

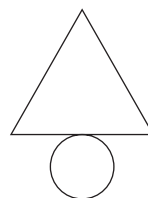
a.



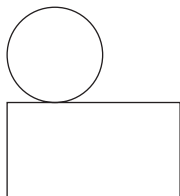
b.



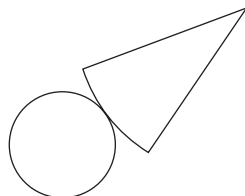
c.



d.



e.



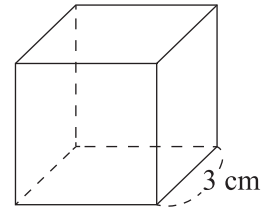
Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 1 Área superficial de cubos

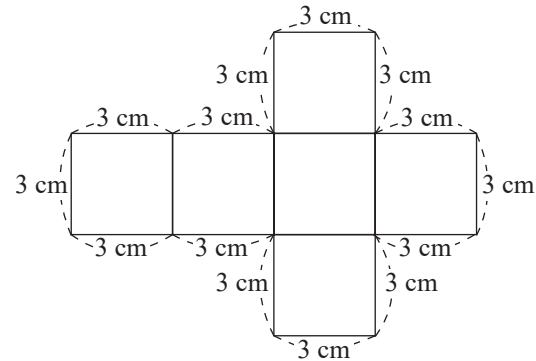


Encuentre el área superficial del cubo de la derecha.

Un cubo está formado por seis caras cuadradas congruentes.



(Área superficial del cubo)
 = (suma del área de las 6 caras del cubo)
 $= 6 \times 3 \times 3$
 ↓
 área de cada cuadrado
 $= 6 \times 9$
 $= 54$



Área de un cuadrado = lado $\times$ lado



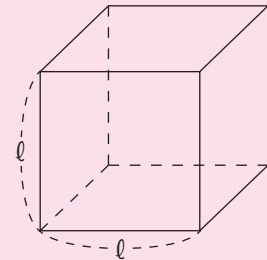
Respuesta: 54 cm^2



Área superficial de un cubo = $6 \times$ área de cada cuadrado
 Por tanto,

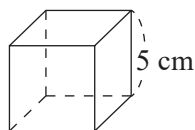
$$\begin{aligned} \text{Área superficial de un cubo} &= 6 \times \ell \times \ell \\ &= 6\ell^2 \end{aligned}$$

donde ℓ es el lado del cubo.

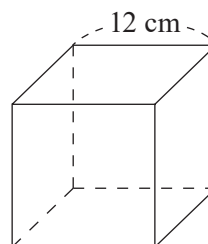


Encuentre el área superficial de los siguientes cubos.

a.



b.



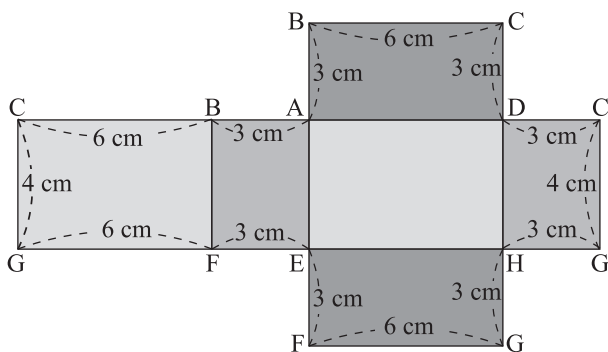
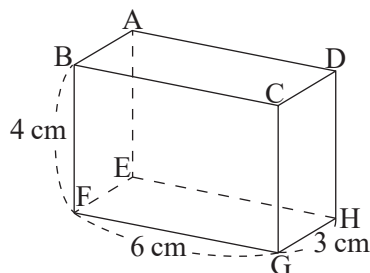
Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 2 Área superficial de prismas rectangulares



Encuentre el área superficial del prisma rectangular de la derecha.

Un prisma rectangular está formado por seis caras rectangulares, donde los tres pares opuestos son congruentes.



Área de un rectángulo = base $\times$ altura



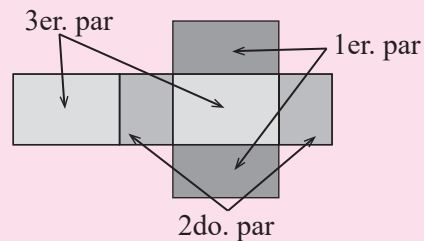
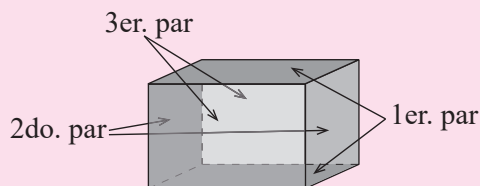
(Área superficial del prisma rectangular)

$$\begin{aligned}
 &= \left(\begin{array}{l} \text{1er. par de caras} \\ \text{rectangulares opuestas} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{2do. par de caras} \\ \text{rectangulares opuestas} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{3er. par de caras} \\ \text{rectangulares opuestas} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{l} \text{área del rectángulo} \\ \text{ABCD y EFGH} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{área del rectángulo} \\ \text{ABFE y DCGH} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{área del rectángulo} \\ \text{DAEH y CBFH} \end{array} \right) \\
 &= 2(6 \times 3) + 2(3 \times 4) + 2(6 \times 4) \\
 &= 36 + 24 + 48 \\
 &= 108
 \end{aligned}$$

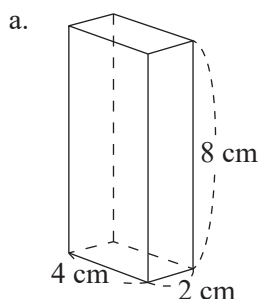
Respuesta: 108 cm²



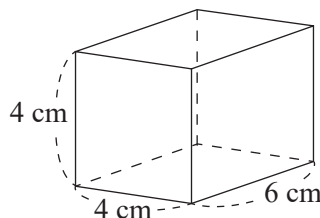
Área superficial de un prisma rectangular
= área del 1er. par + 2do. par + 3er. par de rectángulos paralelos



Encuentre el área superficial de los siguientes prismas rectangulares.



b.



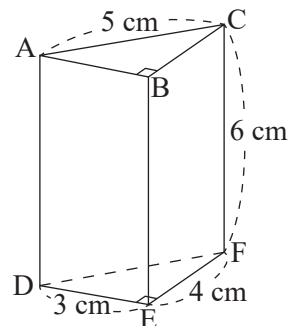
Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 3 Área superficial de prismas triangulares

P

Encuentre el área superficial del prisma triangular de la derecha.

Un prisma triangular está formado por dos caras triangulares congruentes como bases y tres caras rectangulares como caras laterales.



S

(Área superficial del prisma triangular)

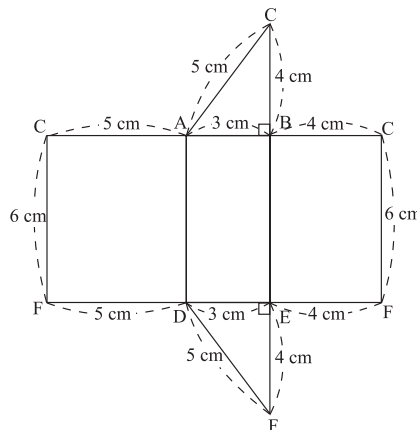
$$= (\text{área de las bases}) + (\text{área de las caras laterales})$$

$$= (\text{área de } \triangle ABC \text{ y } \triangle DEF) + (\text{área de los rectángulos } ACFD, ABED \text{ y } BCFE)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\right) + 5 \times 6 + 3 \times 6 + 4 \times 6$$

$$= 12 + 30 + 18 + 24$$

$$= 84$$



Respuesta: 84 cm^2

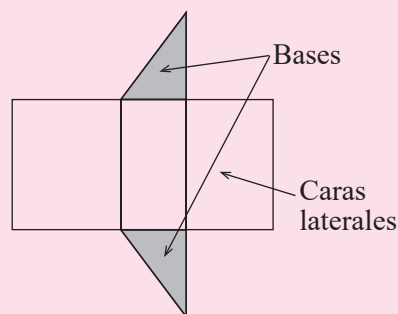
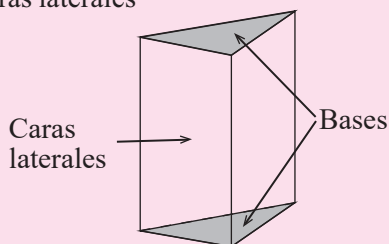
$$\text{Área de un triángulo} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$$

$$\text{Área de un rectángulo} = \text{base} \times \text{altura}$$



C

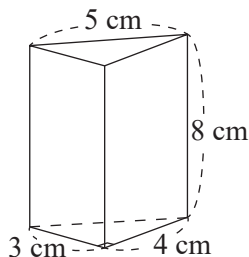
Área superficial de un prisma triangular
= área de bases + área de caras laterales



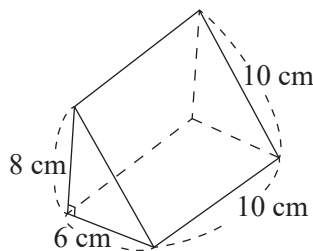
E

Encuentre el área superficial de los siguientes prismas triangulares.

a.



b.



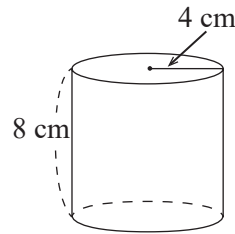
Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 4 Área superficial de cilindros

P

Encuentre el área superficial del cilindro de la derecha.

Un cilindro está formado por dos bases circulares que son congruentes y una cara lateral que forma un rectángulo cuando se extiende.



S

(Área superficial del cilindro)

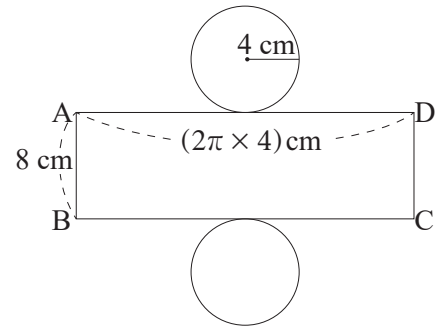
$$= (\text{área de las bases}) + (\text{área de la cara lateral})$$

$$= (\text{área de dos círculos}) + (\text{área del rectángulo ABCD})$$



Para encontrar el área del rectángulo ABCD primero se encuentra la longitud del AD.

Área de un rectángulo = base $\times$ altura



$$= 2(\pi \times 4^2) + (2\pi \times 4) \times 8$$

$$= 32\pi + 64\pi$$

$$= 96\pi$$

Respuesta: $96\pi \text{ cm}^2$

Área de un círculo = $\pi \times \text{radio} \times \text{radio}$
 $= \pi r^2$

Perímetro de una circunferencia

$$= \pi \times \text{diámetro}$$

$$= \pi \times 2 \times \text{radio}$$

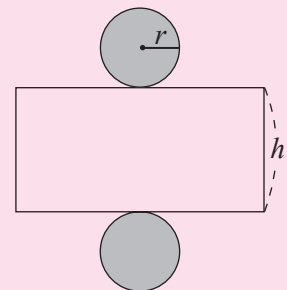
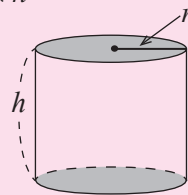
$$= 2\pi r$$



C

$$\text{Área superficial de un cilindro} = \text{área de bases} + \text{área de cara lateral}$$

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$$

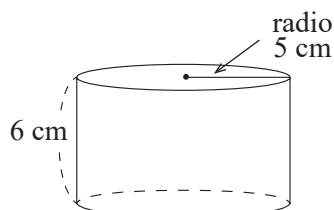


donde r es el radio del círculo (base) y h es la altura del cilindro.

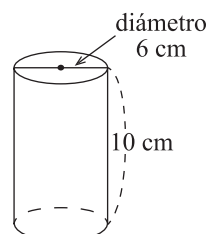
E

Encuentre el área superficial de los siguientes cilindros.

a.



b.



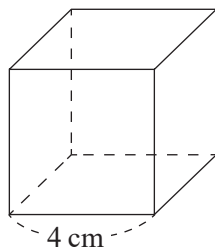
Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 5 Ejercicios del área superficial de prismas y cilindros

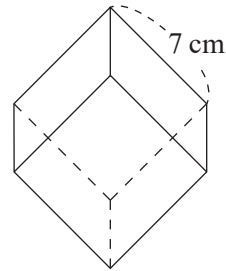


1. Encuentre el área superficial de los siguientes cubos.

a.

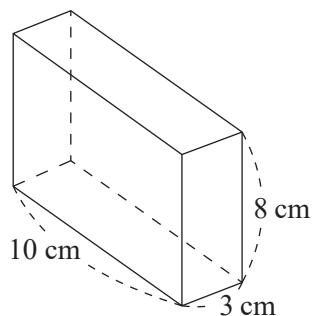


b.

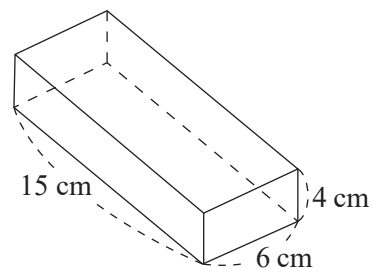


2. Encuentre el área superficial de los siguientes prismas rectangulares.

a.

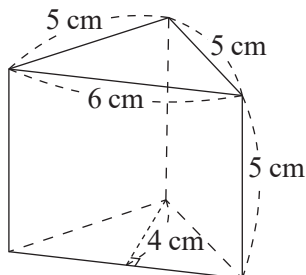


b.

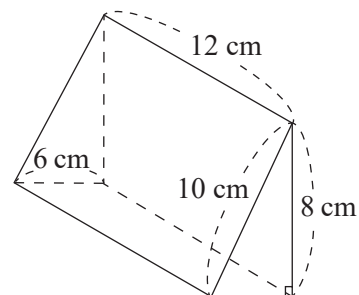


3. Encuentre el área superficial de los siguientes prismas triangulares.

a.

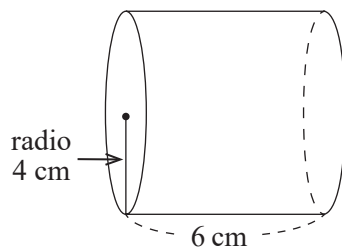


b.

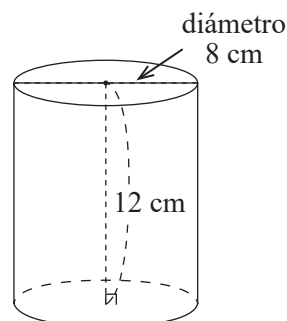


4. Encuentre el área superficial de los siguientes cilindros.

a.



b.



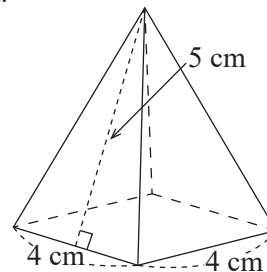
Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 6 Área superficial de pirámides cuadrangulares

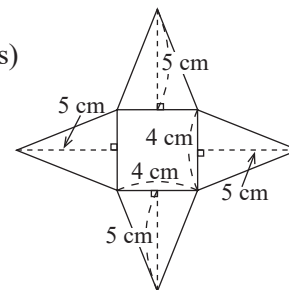


Encuentre el área superficial de la pirámide cuadrangular de la derecha.

Una pirámide cuadrangular está formada por una base cuadrada y cuatro caras laterales triangulares que son congruentes.



$$\begin{aligned}
 & (\text{Área superficial de la pirámide cuadrangular}) \\
 &= (\text{área de la base}) + (\text{área de las caras laterales}) \\
 &= (\text{área del cuadrado}) + (\text{área de las cuatro caras laterales triangulares}) \\
 &= 4 \times 4 + 4 \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 5 \right) \\
 &= 16 + 40 \\
 &= 56
 \end{aligned}$$



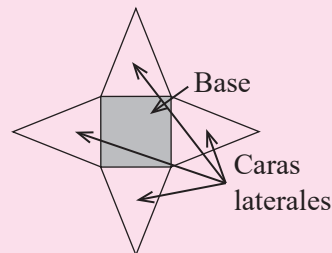
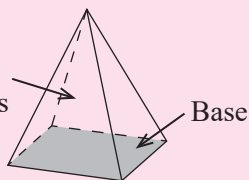
Respuesta: 56 cm^2

Área de un cuadrado = lado $\times$ lado
Área de un triángulo = $\frac{1}{2} \times$ base $\times$ altura



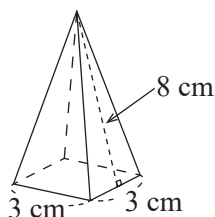
Área superficial de una pirámide cuadrangular = área de base + $4 \times$ área de una cara lateral

Caras laterales

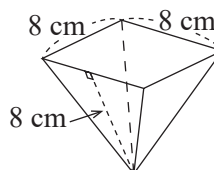


Encuentre el área superficial de las siguientes pirámides cuadrangulares.

a.



b.



Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 7 Área superficial de pirámides triangulares



Encuentre el área superficial de la pirámide triangular de la derecha.

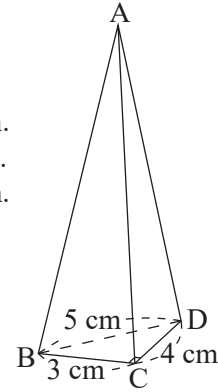
$$\angle BCD = 90^\circ$$

La altura del $\triangle ABD$ con base BD es 10 cm.

La altura del $\triangle ABC$ con base BC es 10 cm.

La altura del $\triangle ACD$ con base CD es 10 cm.

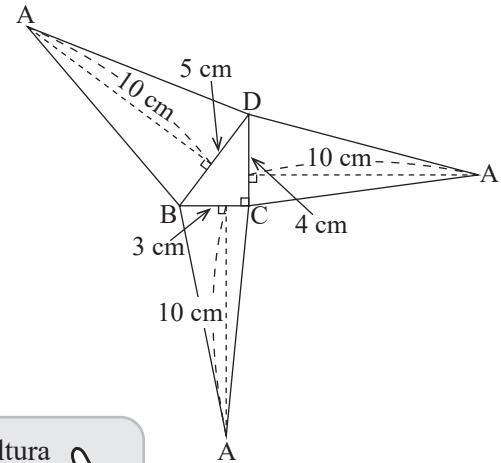
Una pirámide triangular está formada por una base triangular y tres caras triangulares.



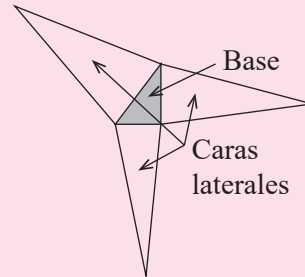
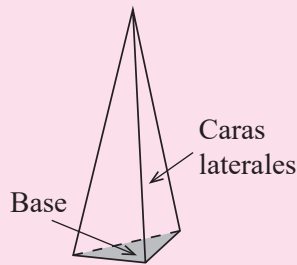
$$\begin{aligned} & (\text{Área superficial de la pirámide triangular}) \\ &= (\text{área de la base}) + (\text{área de las caras laterales}) \\ &= (\text{área de } \triangle BCD) + \left(\begin{array}{c} \text{área de} \\ \triangle ABD, \triangle ABC \text{ y } \triangle ACD \end{array} \right) \\ &= \frac{3 \times 4}{2} + \frac{5 \times 10}{2} + \frac{3 \times 10}{2} + \frac{4 \times 10}{2} \\ &= 6 + 25 + 15 + 20 \\ &= 66 \end{aligned}$$

Respuesta: 66 cm^2

$$\text{Área de un triángulo} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$$



Área superficial de una pirámide triangular = área de base + área de caras laterales



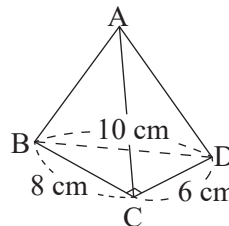
Encuentre el área superficial de las siguientes pirámides triangulares.

a. $\angle BCD = 90^\circ$

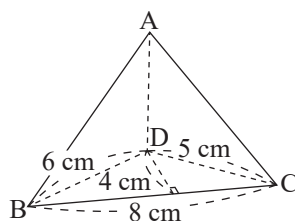
La altura del $\triangle ABD$ con base BD es 9 cm.

La altura del $\triangle ABC$ con base BC es 9 cm.

La altura del $\triangle ACD$ con base CD es 9 cm.



b.



La altura del $\triangle ABD$ con base BD es 6 cm.

La altura del $\triangle ABC$ con base BC es 6 cm.

La altura del $\triangle ACD$ con base CD es 6 cm.

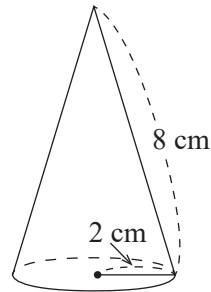
Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 8 Área superficial de conos

P

Encuentre el área superficial del cono de la derecha.

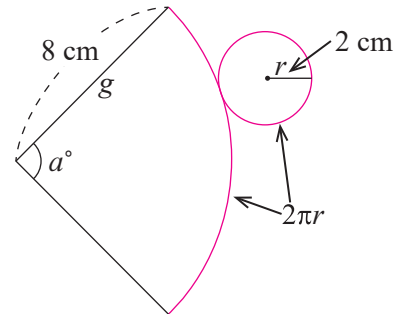
Un cono está formado por una base circular y un sector circular.



S

$$\begin{aligned} & (\text{Área superficial del cono}) \\ &= (\text{área de la base}) + (\text{área de la cara lateral}) \\ &= (\text{área del círculo}) + (\text{área del sector circular}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área de un sector circular} &= \pi g^2 \times \frac{a^\circ}{360^\circ} \\ &= \pi g^2 \times \frac{2\pi r}{2\pi g} \\ &= \pi r g \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \pi \times 2^2 + \pi \times 2 \times 8 \\ &= 4\pi + 16\pi \\ &= 20\pi \end{aligned}$$

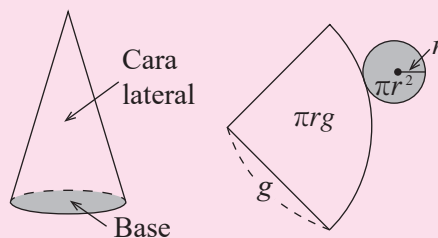
Respuesta: $20\pi \text{ cm}^2$

$$\begin{aligned} \text{Área de un círculo} &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio} \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$



C

$$\begin{aligned} \text{Área superficial de un cono} &= \text{área de base} + \text{área de cara lateral} \\ &= \pi r^2 + \pi r g \end{aligned}$$

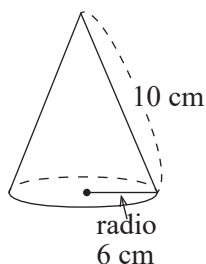


donde r es el radio del círculo y g es llamada generatriz.

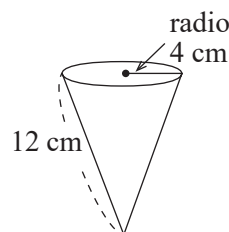
E

Encuentre el área superficial de los siguientes conos.

a.



b.



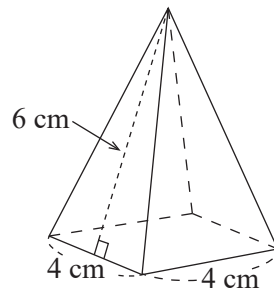
Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 9 Ejercicios del área superficial de pirámides y conos

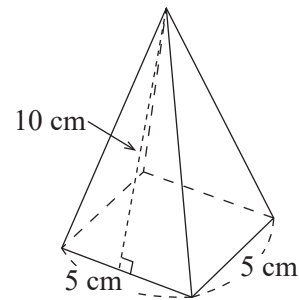


1. Encuentre el área superficial de las siguientes pirámides cuadrangulares.

a.

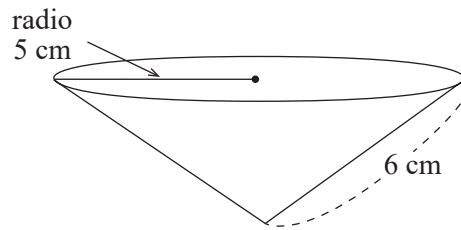


b.

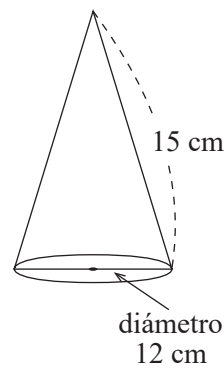


2. Encuentre el área superficial de los siguientes conos.

a.



b.



Sección 4 Área superficial de sólidos

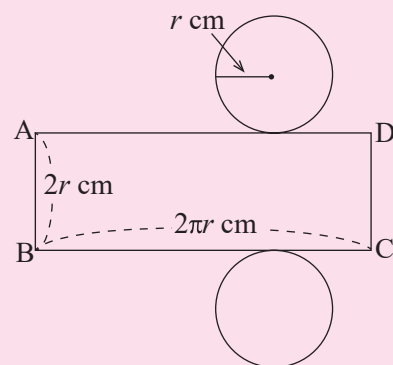
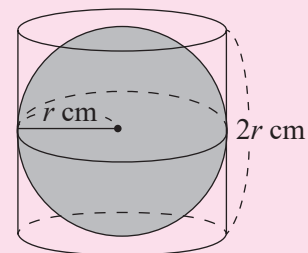
Clase 10 Área superficial de esferas



El área superficial de una esfera es igual al área de cara lateral del cilindro en donde cabe completamente esa esfera.

El área de la cara lateral del cilindro con radio r cm está formado por un rectángulo ABCD con base $2\pi r$ cm y altura $2r$ cm. Por tanto, el área de la cara lateral es $(2r \times 2\pi r) \text{ cm}^2$.
 $2r \times 2\pi r = 4\pi r^2$

Área superficial de una esfera = $4\pi r^2$



La base del rectángulo ABCD coincide con el perímetro de la circunferencia.

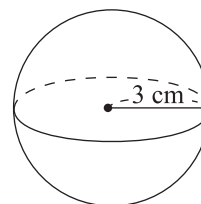
$$\begin{aligned}\text{Perímetro de una circunferencia} &= \pi \times \text{diámetro} \\ &= \pi \times 2 \times \text{radio} \\ &= 2\pi r\end{aligned}$$



Ejemplo:

$$\begin{aligned}(\text{Área superficial de la esfera de la derecha}) &= 4 \times \pi \times 3^2 \\ &= 36\pi\end{aligned}$$

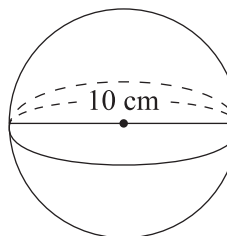
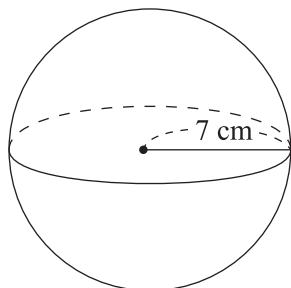
El área superficial es $36\pi \text{ cm}^2$.



Encuentre el área superficial de las siguientes esferas.

a.

b.

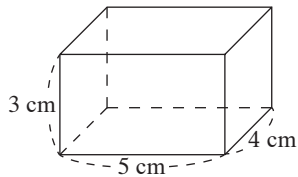


Sección 5 Volumen de sólidos

Clase 1 Volumen de prismas rectangulares



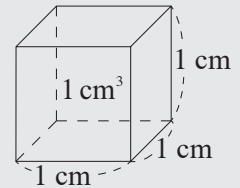
Encuentre el volumen del prisma rectangular de abajo.



A la medida del espacio que ocupa un objeto se le llama volumen.

El volumen de los objetos se puede representar con la cantidad de cubitos que miden 1 cm de cada lado.

El volumen del cubito que tiene 1 cm de cada lado es un centímetro cúbico y se escribe como 1 cm^3 .



Paso 1. Observe la figura formada por cubitos de 1 cm de lado.

¿Cuánto mide el largo del prisma rectangular?

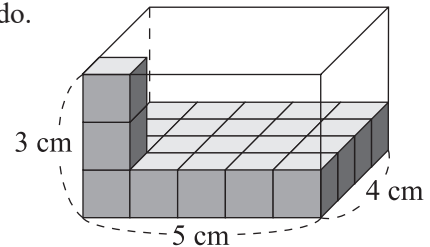
Largo = 5 cm

¿Cuánto mide ancho del prisma rectangular?

Ancho = 4 cm

¿Cuánto mide la altura del prisma rectangular?

Altura = 3 cm



Paso 2. Encuentre cuántos cubitos se necesitan para llenar la primera fila del prisma rectangular.

En la base de la figura se necesitan $5 \times 4 = 20$ cubitos.

Paso 3. Encuentre cuántos cubitos se necesitan para llenar el prisma rectangular.

Se tienen 20 cubitos en la primera fila y se tienen tres filas (altura): $3 \times 20 = 60$ cubitos.

Por tanto, el volumen del prisma rectangular es $60 \times 1 \text{ cm}^3 = 60 \text{ cm}^3$.

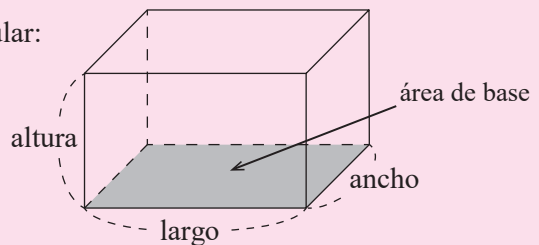
El volumen del prisma rectangular que se encontró es $5(\text{cm}) \times 4(\text{cm}) \times 3(\text{cm}) = 60(\text{cm}^3)$.



Para encontrar el volumen de un prisma rectangular:

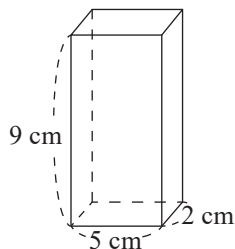
$$V = \text{área de base} \times \text{altura} \\ = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

donde V es el volumen del prisma rectangular.

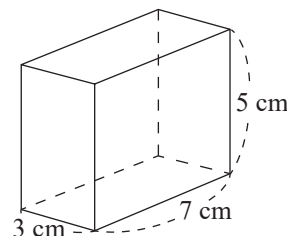


Encuentre el volumen de los siguientes prismas rectangulares.

a.



b.



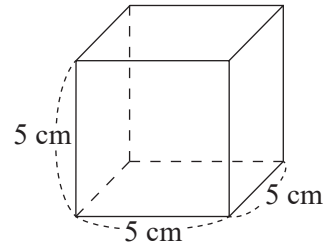
Sección 5 Volumen de sólidos

Clase 2 Volumen de cubos



Encuentre el volumen del cubo de la derecha.

A la figura, que es un caso especial del prisma rectangular, en la que sus lados son iguales se le llama cubo.



Paso 1. Observe la manera en que está formado el cubo.

¿Cuánto mide el largo del cubo?

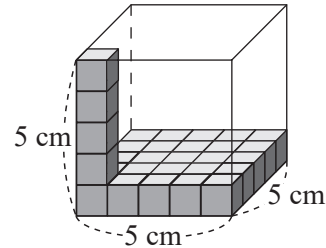
Largo = 5 cm

¿Cuánto mide el ancho del cubo?

Ancho = 5 cm

¿Cuánto mide la altura del cubo?

Altura = 5 cm



Paso 2. Encuentre cuántos cubitos se necesitan para llenar la primera fila del cubo.

En la base de la figura se necesitan $5 \times 5 = 25$ cubitos.

Paso 3. Encuentre cuántos cubitos se necesitan para llenar el cubo.

Se tienen 25 cubitos en la primera fila y se tienen cinco filas (altura): $5 \times 25 = 125$ cubitos.

Por tanto, el volumen del cubo es $125 \times 1 \text{ cm}^3 = 125 \text{ cm}^3$.

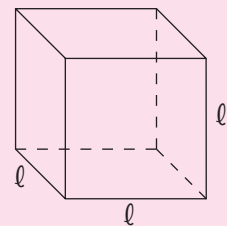
El volumen del cubo que se encontró es $5(\text{cm}) \times 5(\text{cm}) \times 5(\text{cm}) = 125(\text{cm}^3)$.



Para encontrar el volumen de un cubo:

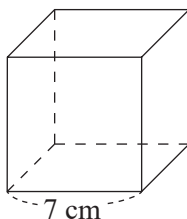
$$V = \text{lado} \times \text{lado} \times \text{lado} \\ = \ell^3$$

donde V es el volumen del cubo y ℓ es el lado del cubo.

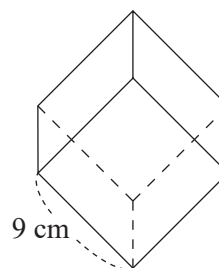


Encuentre el volumen de los siguientes cubos.

a.



b.

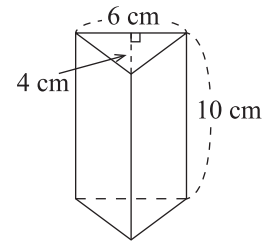


Sección 5 Volumen de sólidos

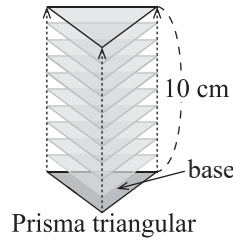
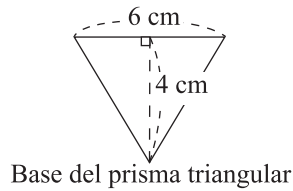
Clase 3 Volumen de prismas triangulares



Encuentre el volumen del prisma triangular de la derecha.



El volumen del prisma triangular se puede encontrar a partir del volumen de un prisma rectangular, multiplicando el área de la base por la altura del prisma.



Paso 1. Encuentre el área de la base del prisma triangular.

$$\frac{6 \times 4}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$\text{Área de un triángulo} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$$



Por tanto, el área de la base del prisma triangular es 12 cm^2 .

Paso 2. Multiplique el área de la base del prisma triangular por la altura del prisma.

$$12 (\text{cm}^2) \times 10 (\text{cm}) = 120 (\text{cm}^3)$$

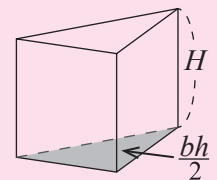
Por tanto, el volumen del prisma triangular es 120 cm^3 .



Para encontrar el volumen de un prisma triangular:

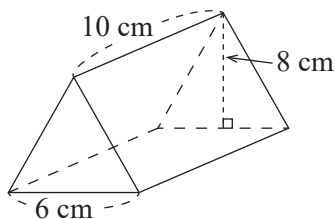
$$\begin{aligned} V &= \text{área de base} \times \text{altura de prisma} \\ &= \text{área de triángulo} \times \text{altura de prisma triangular} \\ &= \frac{bh}{2} \times H \end{aligned}$$

donde V es el volumen del prisma triangular, b es la base del triángulo, h es la altura del triángulo y H es la altura del prisma triangular.

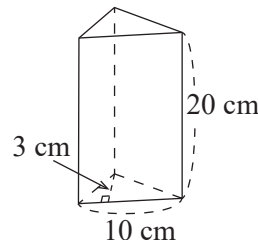


Encuentre el volumen de los siguientes prismas triangulares.

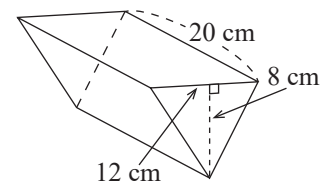
a.



b.



c.

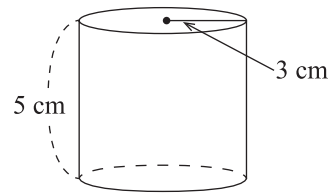


Sección 5 Volumen de sólidos

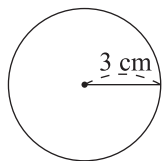
Clase 4 Volumen de cilindros



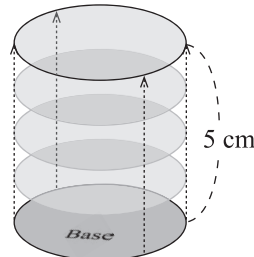
Encuentre el volumen del cilindro de la derecha.



El volumen del cilindro se puede encontrar a partir de la idea del volumen de un prisma triangular, multiplicando el área de la base por la altura del cilindro.



Base del cilindro



Cilindro

Paso 1. Encuentre el área de la base del cilindro.

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

$$\begin{aligned}\text{Área de un círculo} &= \pi \times \text{radio} \times \text{radio} \\ &= \pi r^2\end{aligned}$$



Por tanto, el área de la base del cilindro es $9\pi \text{ cm}^2$.

Paso 2. Multiplique el área de la base del cilindro por la altura del cilindro.

$$9\pi (\text{cm}^2) \times 5 (\text{cm}) = 45\pi (\text{cm}^3)$$

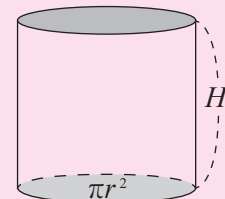
Por tanto, el volumen del cilindro es $45\pi \text{ cm}^3$.



Para encontrar el volumen de un cilindro:

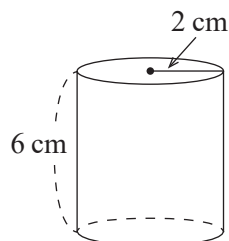
$$\begin{aligned}V &= \text{área de base} \times \text{altura del cilindro} \\ &= \text{área del círculo} \times \text{altura del cilindro} \\ &= \pi r^2 \times H\end{aligned}$$

donde V es el volumen del cilindro, r es el radio de la base circular y H es la altura del cilindro.

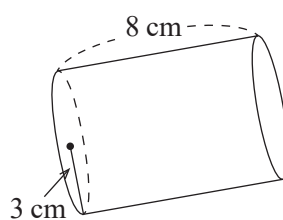


Encuentre el volumen de los siguientes cilindros.

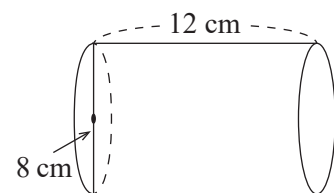
a.



b.



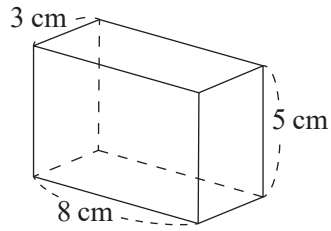
c.



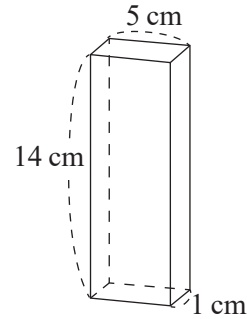


1. Encuentre el volumen de los siguientes prismas rectangulares.

a.

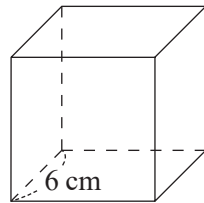


b.

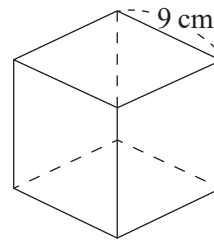


2. Encuentre el volumen de los siguientes cubos.

a.

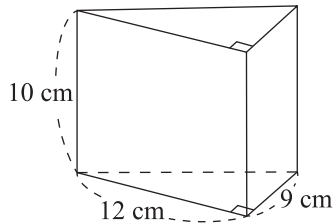


b.

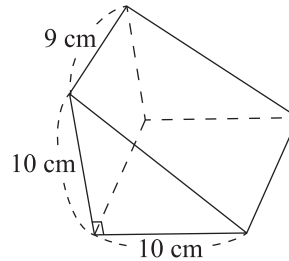


3. Encuentre el volumen de los siguientes prismas triangulares.

a.

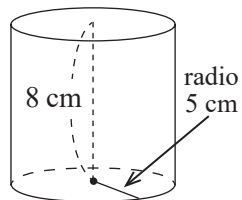


b.

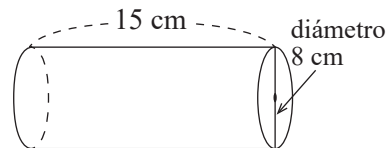


4. Encuentre el volumen de los siguientes cilindros.

a.



b.



Sección 5 Volumen de sólidos

Clase 6 Volumen de pirámides cuadrangulares



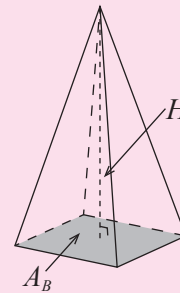
El volumen de una pirámide cuadrangular es igual a la tercera parte del volumen de un prisma siempre que tengan la misma base y la misma altura.

$$V = \frac{1}{3} \times \text{área de base} \times \text{altura de pirámide cuadrangular}$$

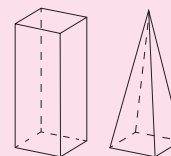
$$V = \frac{A_B \times H}{3}$$

donde V es el volumen de la pirámide cuadrangular, A_B es el área de la base y H es la altura de la pirámide.

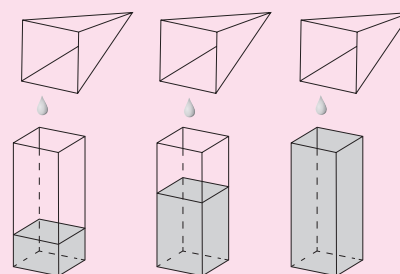
¿Por qué?



¿Cuántas veces cabe el volumen de la pirámide dentro del prisma?



En un experimento, se llenan tres recipientes en forma de pirámide con agua. Caben exactamente tres recipientes de pirámide en un prisma. Esto significa que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma.



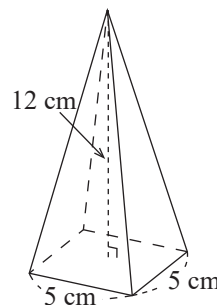
Se puede concluir que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma, siempre que tengan la misma base y la misma altura.

Ejemplo:

Volumen de la pirámide cuadrangular de la derecha

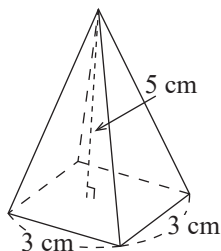
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times 5^2 \times 12 \\ &= \frac{1}{3} \times 25 \times 12 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Por tanto, $V = 100 \text{ cm}^3$.

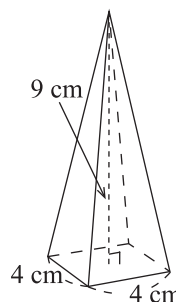


Encuentre el volumen de las siguientes pirámides cuadrangulares.

a.



b.



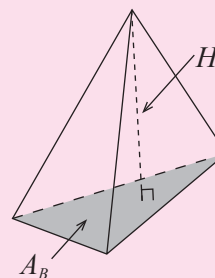


El volumen de una pirámide triangular es igual a la tercera parte del volumen de un prisma triangular siempre que tengan la misma base y la misma altura.

$$V = \frac{1}{3} \times \text{área de base} \times \text{altura de pirámide triangular}$$

$$V = \frac{A_B \times H}{3}$$

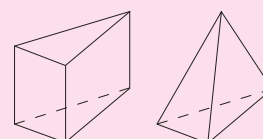
donde V es el volumen de la pirámide triangular, A_B es el área de la base y H es la altura de la pirámide.



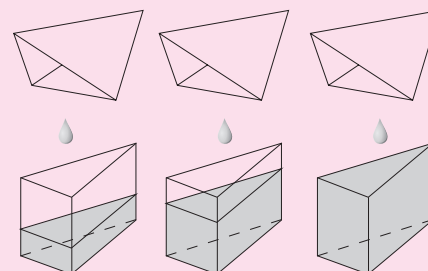
¿Por qué?



¿Cuántas veces cabe el volumen de la pirámide dentro del prisma?



En un experimento, se llenan tres recipientes en forma de pirámide con agua. Caben exactamente tres recipientes de pirámide en un prisma. Esto significa que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma.



Se puede concluir que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma, siempre que tengan la misma base y la misma altura.

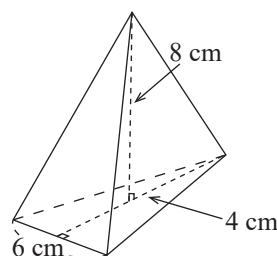
Ejemplo:

Volumen de la pirámide triangular de la derecha

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 4}{2} \times 8$$

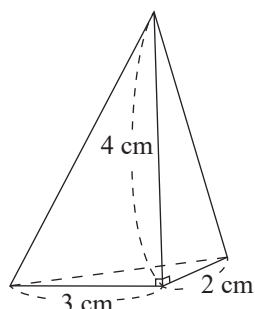
$$= 32$$

Por tanto, $V = 32 \text{ cm}^3$.

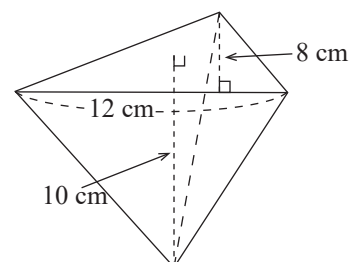


Encuentre el volumen de las siguientes pirámides triangulares.

a.



b.



Sección 5 Volumen de sólidos

Clase 8 Volumen de conos



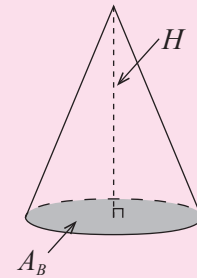
El volumen de un cono es igual a la tercera parte del volumen de un cilindro, siempre que tengan la misma base y la misma altura.

$$V = \frac{1}{3} \times \text{área de base} \times \text{altura de cono}$$

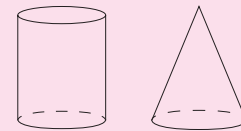
$$V = \frac{A_B \times H}{3}$$

donde V es el volumen del cono, A_B es el área de la base y H es la altura del cono.

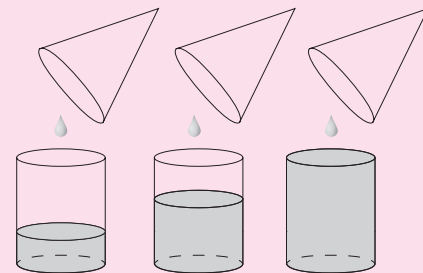
¿Por qué?



¿Cuántas veces cabe el volumen del cono dentro del cilindro?



En un experimento, se llenan tres recipientes en forma de cono con agua. Caben exactamente tres recipientes del cono en un cilindro. Esto significa que el volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro.



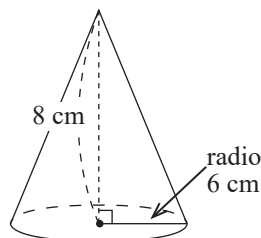
Se puede concluir que el volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro, siempre que tengan la misma base y la misma altura.

Ejemplo:

Volumen del cono de la derecha

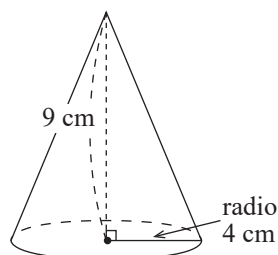
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times 36 \times 8 \\ &= 96\pi \end{aligned}$$

Por tanto, $V = 96\pi \text{ cm}^3$.

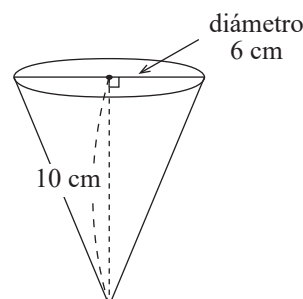


Encuentre el volumen de los siguientes conos.

a.



b.



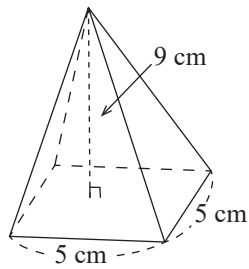
Sección 5 Volumen de sólidos

Clase 9 Ejercicios del volumen de pirámides y conos

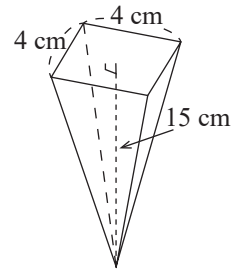


1. Encuentre el volumen de las siguientes pirámides cuadrangulares.

a.

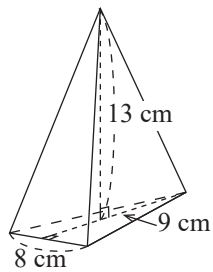


b.

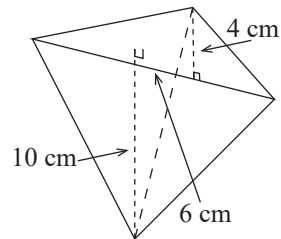


2. Encuentre el volumen de las siguientes pirámides triangulares.

a.

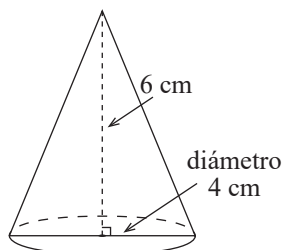


b.

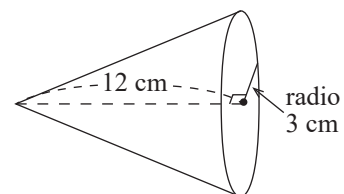


3. Encuentre el volumen de los siguientes conos.

a.



b.



Sección 5 Volumen de sólidos

Clase 10 Volumen de esferas

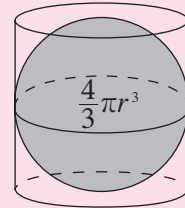


El volumen de una esfera es igual a dos terceras partes del volumen de un cilindro que tiene el mismo diámetro que su base y su altura.

$$V = \frac{2}{3} \times 2\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde V es el volumen de la esfera y r es el radio de la esfera.



¿Por qué?



Se considera un cilindro donde se introduce completamente una esfera y una mitad de esa esfera.

¿Cuántas veces cabe el volumen de la mitad de la esfera dentro del cilindro?

En un experimento, se llenan tres recipientes en forma de la mitad de la esfera con agua. Caben exactamente tres recipientes de la mitad de la esfera en un cilindro.

Esto significa que el volumen de la mitad de la esfera es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro.

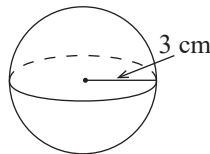
Es decir, el volumen de la esfera es $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro.



Se puede concluir que el volumen de la esfera es $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro, siempre que el diámetro de la esfera tenga la misma medida con el de las bases del cilindro y su altura.

Ejemplo:

Volumen de la esfera de la derecha



$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3$$

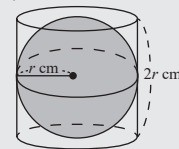
$$= \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 \leftarrow \text{radio}^3$$

$$= 36\pi$$

Por tanto, $V = 36\pi \text{ cm}^3$.

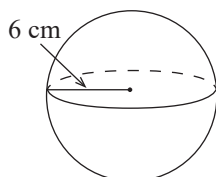
En caso del cilindro donde se introduce completamente la esfera de radio r cm, el radio de la base (círculo) es r cm, y su altura es $2r$ cm.
Por tanto, el volumen del cilindro es $(\pi r^2 \times 2r) \text{ cm}^3$.

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

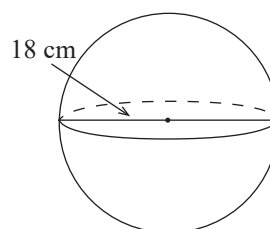


Encuentre el volumen de las siguientes esferas.

a.



b.

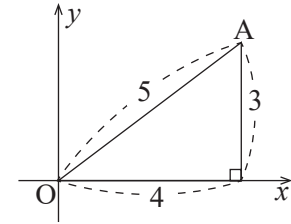


Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°

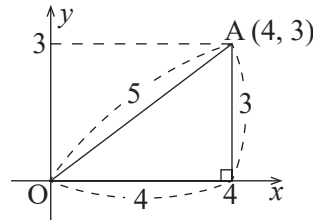
Clase 1 Definición de seno y coseno en el plano cartesiano



Se establecen los ejes x, y en el plano cartesiano para el siguiente triángulo rectángulo. Determine las coordenadas del punto A .

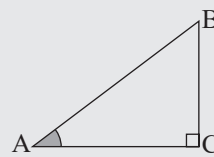
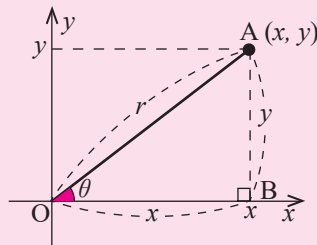


Las coordenadas del punto A son $(4, 3)$.



Con relación al punto $A(x, y)$ un ángulo comprendido por OA y OB está representado por la letra θ , y la longitud de OA está representada por la letra r y la longitud OB por x . Como ambos valores de las coordenadas (x, y) son positivos, al trazar una línea perpendicular AB desde el punto A hacia el eje x , se forma un triángulo rectángulo OAB . Las relaciones que se establecen son las siguientes:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}, \quad \text{cos } \theta = \frac{x}{r}, \quad \text{tan } \theta = \frac{y}{x}$$



$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

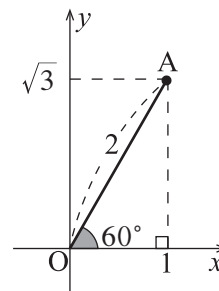
$$\text{tan } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Ejemplo:

Con base en la figura,

a. Coordenadas del punto A .
 $(1, \sqrt{3})$

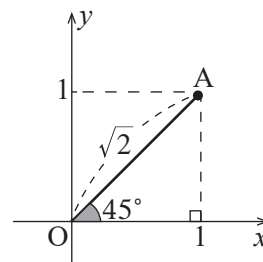
b. $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{tan } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$



Con base en la figura que está a la derecha, resuelva.

a. Determine las coordenadas del punto A .

b. Encuentre el valor de $\text{sen } 45^\circ$, $\text{cos } 45^\circ$ y $\text{tan } 45^\circ$.

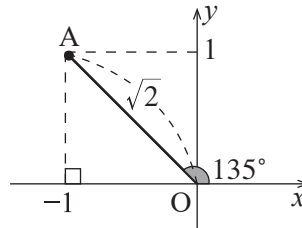


Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°

Clase 2 Razones trigonométricas hasta 180° (1)

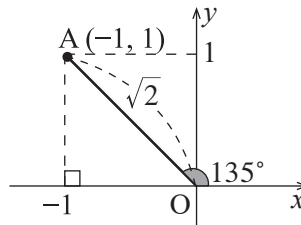
P

Con base en la siguiente figura, determine las coordenadas del punto A.



S

Las coordenadas del punto A son $(-1, 1)$.

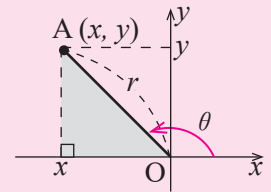


C

Con base en la figura de la derecha, cuando $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$,
 $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ($\tan 90^\circ$ no está definida).

Si θ es un ángulo obtuso donde $90^\circ < \theta < 180^\circ$,
 se establece la relación $r > 0$, $x < 0$, $y > 0$.

Por tanto, se concluye que $\sin \theta = \frac{y}{r} > 0$, $\cos \theta = \frac{x}{r} < 0$, $\tan \theta = \frac{y}{x} < 0$.



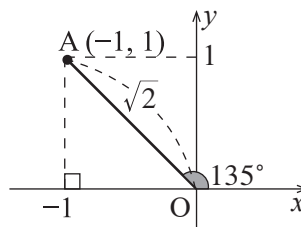
Ejemplo:

Con base en la siguiente figura,

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

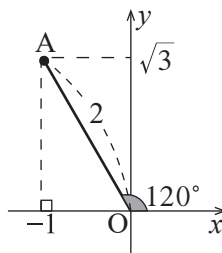
$$\cos 135^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{1}{-1} = -1$$



E

Con base en la siguiente figura, determine las coordenadas del punto A y encuentre el valor de $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$ y $\tan 120^\circ$.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°

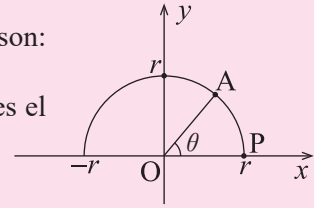
Clase 3 Razones trigonométricas hasta 180° (2)



Con base en la figura de la derecha ($\angle AOP = \theta$),
cuando $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$, cada una de las coordenadas del punto A son:
 $(r, 0), (0, r), (-r, 0)$.

Por tanto, el valor de las razones trigonométricas de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{sen } 0^\circ &= \frac{0}{r} = 0, & \cos 0^\circ &= \frac{r}{r} = 1, & \tan 0^\circ &= \frac{0}{r} = 0 \\ \text{sen } 90^\circ &= \frac{r}{r} = 1, & \cos 90^\circ &= \frac{0}{r} = 0, & \tan 90^\circ &\text{ no está definido.} \\ \text{sen } 180^\circ &= \frac{0}{r} = 0, & \cos 180^\circ &= \frac{-r}{r} = -1, & \tan 180^\circ &= \frac{0}{-r} = 0 \end{aligned}$$



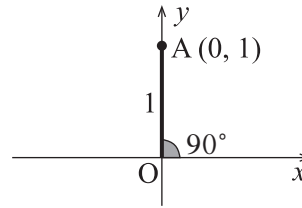
Ejemplo 1:

Con base en la siguiente figura,

$$\text{sen } 90^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$\tan 90^\circ$ no está definido.



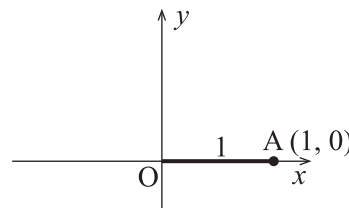
Ejemplo 2:

Con base en la siguiente figura,

$$\text{sen } 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$



Complete la siguiente tabla.

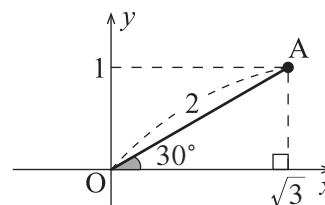
θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\text{sen } \theta$		$\frac{1}{2}$			1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	
$\cos \theta$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$			0		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\tan \theta$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$					-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°

Clase 4 Propiedad de razones trigonométricas

P₁

Con base en la siguiente figura, encuentre el valor de $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ y $\tan 30^\circ$, e identifique sus signos.



S₁

Utilice las coordenadas del punto $A(\sqrt{3}, 1)$.

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} > 0$, entonces tiene signo positivo.

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

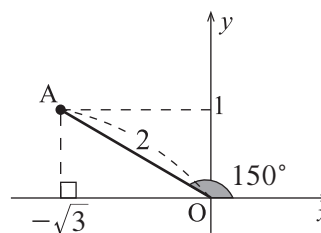
$\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, entonces tiene signo positivo.

$$\tan 30^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\frac{1}{\sqrt{3}} > 0$, entonces tiene signo positivo.

P₂

Con base en la siguiente figura, encuentre el valor de $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$ y $\tan 150^\circ$ e identifique sus signos.



S₂

Utilice las coordenadas del punto $A(-\sqrt{3}, 1)$.

$$\sin 150^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} > 0$, entonces tiene signo positivo.

$$\cos 150^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, entonces tiene signo negativo.

$$\tan 150^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$-\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$, entonces tiene signo negativo.

C

Si $0^\circ < \theta < 90^\circ$, entonces $\cos \theta > 0$ y $\tan \theta > 0$.

Si $90^\circ < \theta < 180^\circ$, entonces $\cos \theta < 0$ y $\tan \theta < 0$.

Cuando $0^\circ < \theta < 180^\circ$, siempre $\sin \theta > 0$.

E

Identifique si los valores tienen signos positivos o negativos, y complete la siguiente tabla.

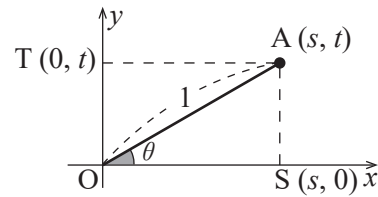
θ	0°	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	90°	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	180°
$\sin \theta$	0		1		0
$\cos \theta$	1		0		-1
$\tan \theta$	0		X		0

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°

Clase 5 Relación de seno, coseno y tangente



Con base en la siguiente figura, en la que la longitud de $OA = 1$ y las coordenadas del punto $A(s, t)$ exprese $\sin \theta$, $\cos \theta$ y $\tan \theta$ usando (s, t) .

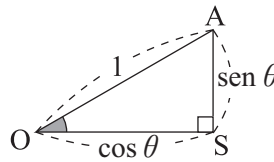


Utilice las coordenadas del punto $A(s, t)$.

$$\sin \theta = \frac{t}{1} = t \quad (1)$$

$$\cos \theta = \frac{s}{1} = s \quad (2)$$

$$\tan \theta = \frac{t}{s}$$



Se sustituyen los valores de (1) y (2) en la forma $\tan \theta = \frac{t}{s}$.

Se expresa la relación $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.



Utilizando la misma figura, aplique el teorema de Pitágoras para llenar los cuadros en blanco para satisfacer la siguiente ecuación.

$$\square + \square = OA^2$$

Al sustituir los valores de OS y AS por s y t respectivamente, y el valor de OA por 1:

$$\square + \square = 1^2$$

Con los resultados de (1) y (2) en Si, se obtiene la expresión:

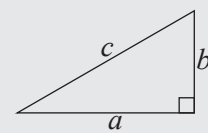
$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

Se representa $(\cos \theta)^2$ por $\cos^2 \theta$ y $(\sin \theta)^2$ por $\sin^2 \theta$.

De esta manera, la expresión arriba será $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Es decir, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

Teorema de Pitágoras:



$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$OS^2 + AS^2 = OA^2$$

$$s^2 + t^2 = 1^2$$



Relación entre seno, coseno y tangente:

$$1. \tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

$$2. \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Ejemplo:

$$\text{Si } 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ y } \text{sen } \theta = \frac{4}{5},$$

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{16}{25}\right)$$

$$= \frac{25 - 16}{25}$$

$$= \frac{9}{25}$$

Siendo $\cos \theta > 0$,

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Además, } \tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \text{sen } \theta \div \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Entonces, } \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$$



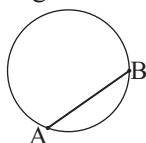
a. Si $0^\circ < \theta < 90^\circ$ y $\text{sen } \theta = \frac{3}{5}$, encuentre el valor de $\cos \theta$ y $\tan \theta$.

b. Si $0^\circ < \theta < 180^\circ$ y $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, encuentre el valor de $\text{sen } \theta$ y $\tan \theta$.

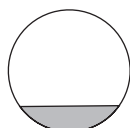
Ejercitación A

1. Escriba el nombre de la parte del círculo representada en cada imagen.

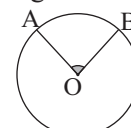
a. Segmento AB



b.

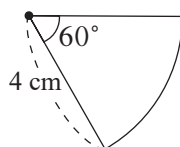


c. Ángulo AOB

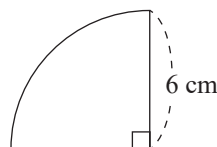


2. Encuentre la longitud de los siguientes arcos y el área de cada sector circular (utilice π).

a.

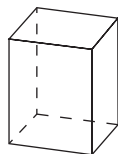


b.

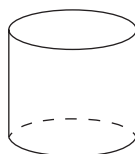


3. Identifique la base de cada sólido geométrico y escriba el nombre que le corresponde.

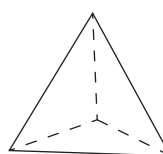
a.



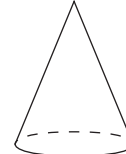
b.



c.

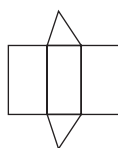


d.

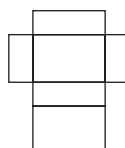


4. Escriba el nombre de los sólidos geométricos que corresponden a cada uno de los planos desarrollados.

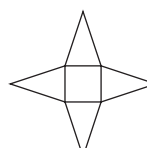
a.



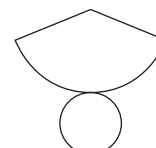
b.



c.

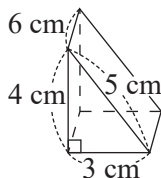


d.

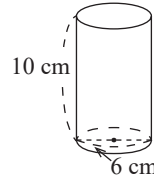


5. Encuentre el área superficial y volumen de los siguientes sólidos (utilice π de ser necesario).

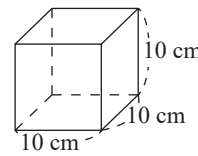
a.



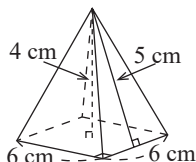
b.



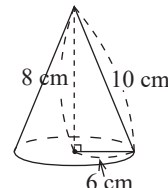
c.



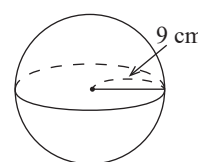
d.



e.

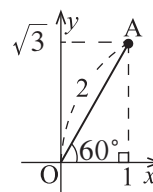


f.



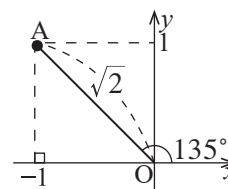
6. Con base en la figura de la derecha, resuelva.

- Determine las coordenadas del punto A.
- Encuentre el valor de $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ y $\tan 60^\circ$.



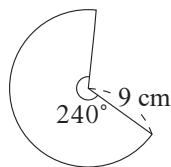
7. Con base en la figura de la derecha, resuelva.

- Determine las coordenadas del punto A.
- Encuentre el valor de $\sin 135^\circ$, $\cos 135^\circ$ y $\tan 135^\circ$.

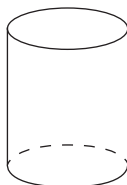
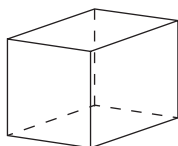


Ejercitación B

1. Encuentre la longitud del arco y el área del sector circular (utilice π).



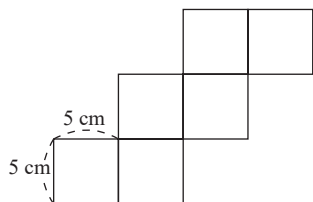
2. Con base en los siguientes sólidos geométricos, elija la característica apropiada para cada uno.



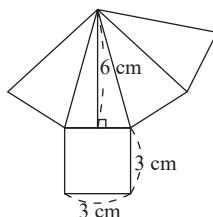
- Este sólido geométrico tiene una base.
- Las caras laterales y las bases son polígonos.
- Este sólido tiene dos bases circulares congruentes.

3. Escriba el nombre de los sólidos geométricos de los siguientes planos desarrollados.

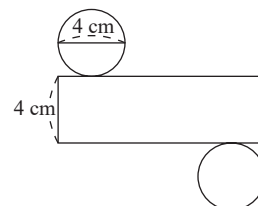
a.



b.



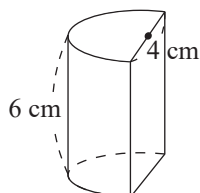
c.



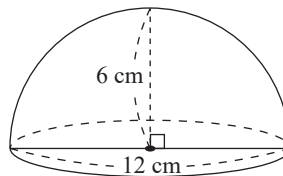
4. Encuentre el área superficial de los sólidos geométricos del inciso 3 (utilice π de ser necesario).

5. Encuentre el área superficial y el volumen de los siguientes sólidos geométricos (utilice π).

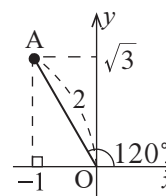
a.



b.



6. Con base en la siguiente figura, encuentre el valor de $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$ y $\tan 120^\circ$.

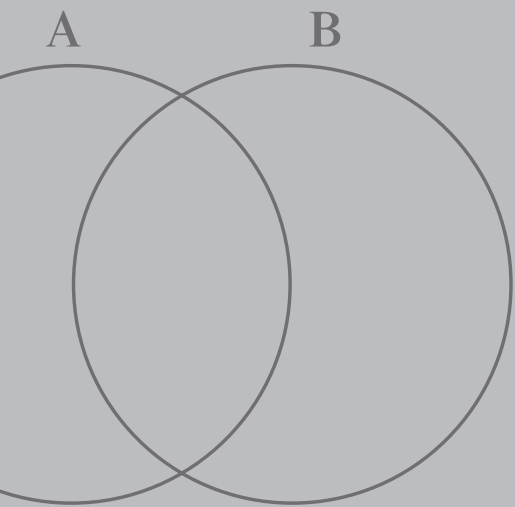


7. Identifique si los valores para cada razón trigonométrica tienen signo positivo o negativo.

- $\sin 30^\circ$
- $\cos 120^\circ$
- $\tan 150^\circ$

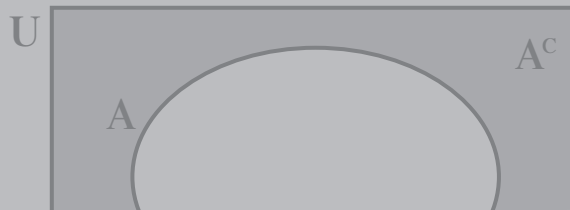
8. Resuelva.

- Si $0^\circ < \theta < 90^\circ$ y $\sin \theta = \frac{4}{5}$, encuentre el valor de $\cos \theta$ y $\tan \theta$.
- Si $0^\circ < \theta < 180^\circ$ y $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, encuentre el valor de $\sin \theta$ y $\tan \theta$.

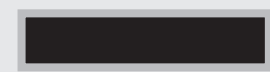


$$A \cup B$$
$$A - B$$
$$A \subset B$$

$$A \cap B$$
$$A \Delta B$$
$$b \in B$$



Unidad 5



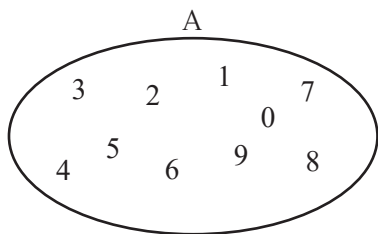
Lógica

Sección 1 Conjuntos

Clase 1 Notación de conjuntos



- a. ¿Qué característica tienen en común los elementos de cada conjunto?



$$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{\text{Números enteros mayores que } -1 \text{ y menores que } 5\}$$

- b. ¿En qué conjunto está el número 0?



- a. La característica que tienen en común los elementos del conjunto A es que son números naturales menores que 10.
La característica que tienen en común los elementos del conjunto B es que son números enteros mayores que -1 y menores que 5. Es decir, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
La característica en común de los elementos del conjunto C es que son números naturales impares menores que 10.
- b. El número 0 es un elemento del conjunto A y del conjunto B. Por tanto, se dice que 0 pertenece al conjunto A y al conjunto B, simbólicamente se representa $0 \in A$ y $0 \in B$.



A una agrupación o colección de objetos se le llama conjunto. A cada objeto de un conjunto se le llama **elemento**. Un conjunto se representa con letra mayúscula. Un conjunto se puede representar entre llaves, por medio de diagrama de Venn, describiendo los elementos del conjunto o explicando la característica en común que tienen los elementos.

Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se utiliza el símbolo $\in$. Si no pertenece se utiliza el símbolo $\notin$.



Dados los conjuntos:

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$D = \{-10, -5, 0, 5, 10, 15\}$$

Escriba $\in$ o $\notin$ en el espacio indicado.

- $8 \square C$
- $-15 \square D$
- $-2 \square C$
- $0 \square D$
- $10 \square C$
- $-5 \square D$

Sección 1 Conjuntos

Clase 2 Conjunto vacío



a. Indique cuántos elementos tiene cada uno de los siguientes conjuntos.

Conjuntos	Cantidad de elementos	Conjuntos	Cantidad de elementos
$A = \{\text{números pares terminados en } 5\}$		$C = \{\text{números pares entre } 2 \text{ y } 6\}$	
$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$		$D = \{ \quad \}$	

b. ¿Cuáles son los conjuntos que no tienen elementos?



a. La cantidad de elementos que cada conjunto tiene es:

Conjuntos	Cantidad de elementos	Conjuntos	Cantidad de elementos
$A = \{\text{números pares terminados en } 5\}$	0	$C = \{\text{números pares entre } 2 \text{ y } 6\}$	1
$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	5	$D = \{ \quad \}$	0

b. Los conjuntos A y D no tienen elementos.



A un conjunto que no tiene elementos se le llama **conjunto vacío**. Un conjunto vacío se puede representar con $\emptyset$ o $\{ \quad \}$.

Los conjuntos A y D son conjuntos vacíos y se pueden expresar como:

$$A = \emptyset$$

$$D = \emptyset$$



Identifique cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos. Represente los conjuntos identificados con el símbolo de conjunto vacío " $\emptyset$ ".

- $E = \{\text{números impares entre } 5 \text{ y } 7\}$ _____
- $F = \{0\}$ _____
- $M = \{ \quad \}$ _____
- $G = \{\text{Números positivos menores que } 2\}$ _____



Sección 1 Conjuntos

Clase 3 Subconjuntos



Dados los conjuntos:

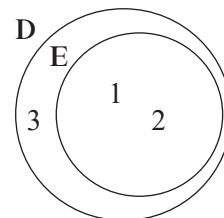
$$D = \{1, 2, 3\} \quad E = \{1, 2\}$$

Indique qué relación hay entre los conjuntos D y E.



Al observar los elementos de los dos conjuntos, se verifica que todos los elementos del conjunto E también son elementos del conjunto D.

Por tanto, se dice que el conjunto E es subconjunto del conjunto D, y simbólicamente se representa: $E \subset D$.



Sean A y B dos conjuntos, si todos los elementos del conjunto B pertenecen al conjunto A, entonces se dice que el conjunto B es **subconjunto** del conjunto A, y se denota como $B \subset A$. Si A no es subconjunto de B, hay algún elemento de A que no es elemento de B. Esta relación se denota: $A \not\subset B$.

Un conjunto vacío $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto.
Cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo.

Existen 2^n subconjuntos del conjunto que tiene n elementos.

Para obtener todos los subconjuntos de un conjunto, se considera:

1. El conjunto vacío.
2. Todos los conjuntos con un elemento.
3. Todos los conjuntos con dos elementos, y así sucesivamente hasta el conjunto mismo.

Ejemplo:

Los subconjuntos de $D = \{1, 2, 3\}$:

1. El conjunto vacío: $\emptyset$
2. Todos los conjuntos con un elemento: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
3. Todos los conjuntos con dos elementos: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ y el conjunto mismo: $\{1, 2, 3\}$

Para verificar que todos los subconjuntos han sido encontrados:

$$\begin{aligned} \text{Número de subconjuntos} &= 2^n \quad n = 3 \quad \text{Ya que son tres elementos del conjunto D.} \\ &= 2^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$



Encuentre todos los subconjuntos de cada conjunto.

- a. $B = \{1, 2\}$ b. $F = \{2, 4, 6, 8\}$

Sección 1 Conjuntos

Clase 4 Unión de conjuntos



En el Instituto de Educación Básica hay dos equipos de diferentes deportes. Los integrantes de cada equipo se presentan a continuación:

Equipo de vóleybol $M = \{ \text{Verónica, Marcos, Leonel, Enrique, Marlon, Ana} \}$

Equipo de básquetbol $N = \{ \text{Wendy, Diana, Andrés, Leonel, Roberto, Mario} \}$

¿Qué jugadores practican vóleybol o básquetbol?

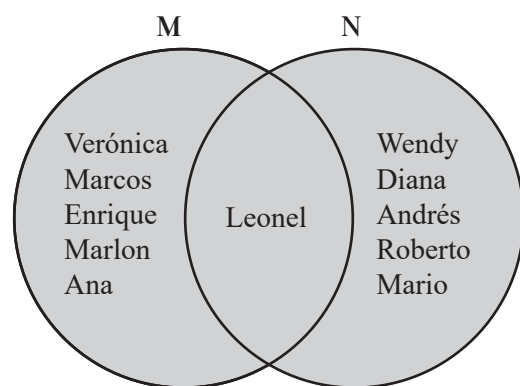


Los jugadores que practican vóleybol o básquetbol son: Verónica, Marcos, Leonel, Enrique, Marlon, Ana, Wendy, Diana, Andrés, Roberto, Mario. Ellos son elementos del conjunto M o del conjunto N.

El conjunto formado por los jugadores que practican vóleybol o básquetbol es llamado unión de los conjuntos M y N. Se escribe:

$M \cup N = \{ \text{Verónica, Marcos, Leonel, Enrique, Marlon, Ana, Wendy, Diana, Andrés, Roberto, Mario} \}$

Este conjunto puede ser representado usando el diagrama de Venn:



La **unión** de dos conjuntos es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a los dos conjuntos. Simbólicamente la unión se representa: $A \cup B$.



Dados los conjuntos:

$A = \{ 4, 5, 6, 7 \}$

$B = \{ 1, 2, 4 \}$

$C = \{ -4, -2, 2, 4 \}$

Encuentre la unión y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.

- $A \cup B$
- $B \cup C$
- $C \cup A$

Sección 1 Conjuntos

Clase 5 Intersección de conjuntos



En el Instituto de Educación Básica hay dos equipos de diferentes deportes. Los integrantes de cada equipo se presentan a continuación:

Equipo de básquetbol $N = \{\text{Wendy, Diana, Andrés, Leonel, Roberto, Mario}\}$

Equipo de atletismo $P = \{\text{Carlos, Alfredo, Sofía, Marlon, Andrés, Leonel}\}$

¿Qué jugadores practican básquetbol y atletismo?

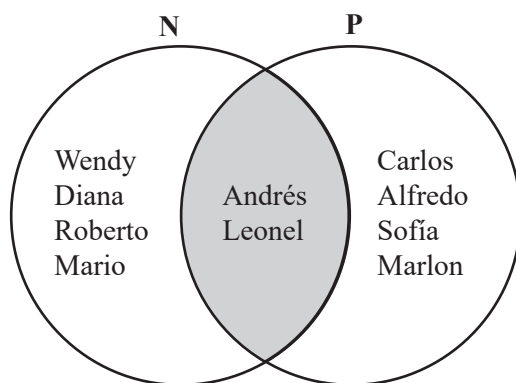


Los jugadores que practican básquetbol y atletismo son Andrés y Leonel. Ellos son elementos que pertenecen a los conjuntos N y P .

El conjunto formado por los jugadores que practican básquetbol y atletismo es llamado intersección de los conjuntos N y P . Se escribe:

$$N \cap P = \{\text{Andrés, Leonel}\}$$

Este conjunto puede ser representado usando el diagrama de Venn:



La **intersección** de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que son comunes a los dos conjuntos. Simbólicamente la intersección se representa: $A \cap B$.



Dados los conjuntos:

$$A = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 4\}$$

$$C = \{-4, -2, 2, 4\}$$

Encuentre la intersección y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.

a. $A \cap B$

b. $B \cap C$

c. $C \cap A$

Sección 1 Conjuntos

Clase 6 Diferencia de conjuntos



Observe los siguientes conjuntos:

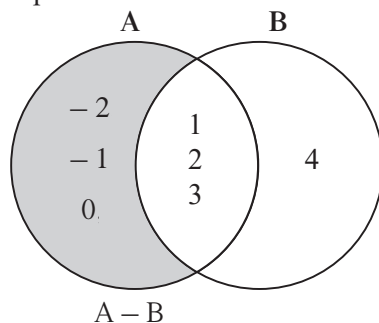
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

- ¿Qué elementos están en A y no están en B?
- ¿Qué elementos están en B y no están en A?

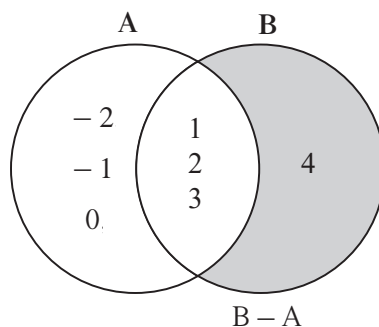


- Los elementos que están en A y no están en B son 0, -1 y -2. En el diagrama de Venn se representa:



El conjunto formado por 0, -1 y -2 es llamado diferencia entre los conjuntos A y B. Simbólicamente se representa:
 $A - B = \{-2, -1, 0\}$

- El elemento que está en B y no está en A es 4. En el diagrama de Venn se representa:



El conjunto formado por el elemento 4 es llamado diferencia entre los conjuntos B y A. Simbólicamente se representa:
 $B - A = \{4\}$



La **diferencia** de los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B, y simbólicamente la diferencia se representa: $A - B$. La diferencia de los conjuntos B y A es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a B y no pertenecen a A, simbólicamente la diferencia se representa: $B - A$.



Dados los conjuntos:

$$A = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 5\}$$

Encuentre la diferencia y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama Venn.

- $A - B$
- $B - A$



Sección 1 Conjuntos

Clase 7 Diferencia simétrica de conjuntos



Lea y observe los siguientes conjuntos:

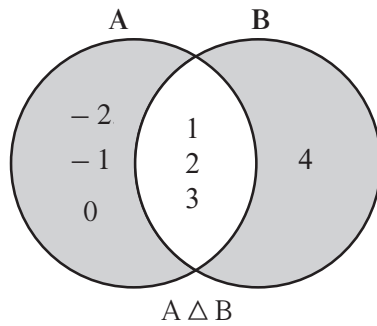
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

¿Qué elementos están en A y no están en B o están en B y no en A?



Los elementos que están en A y no están en B o están en B y no en A son $-2, -1, 0$ y 4 . En el diagrama de Venn se representa:



El conjunto formado por $-2, -1, 0$ y 4 es llamado diferencia simétrica de los conjuntos A y B. Simbólicamente se representa:

$$A \Delta B = \{-2, -1, 0, 4\}$$



La **diferencia simétrica** de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a $A - B$ o que pertenecen a $B - A$. Simbólicamente la diferencia simétrica se representa: $A \Delta B$.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



Dados los conjuntos:

$$A = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Encuentre la diferencia simétrica y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.

- $A \Delta B$
- $A \Delta C$
- $B \Delta C$

Sección 1 Conjuntos

Clase 8 Complemento de un conjunto



Dados los siguientes conjuntos:

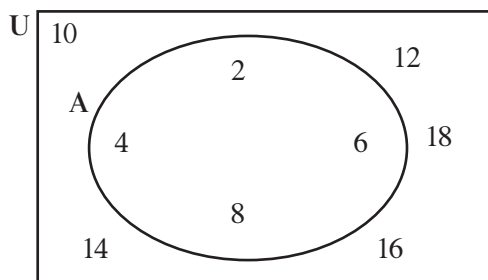
$$U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

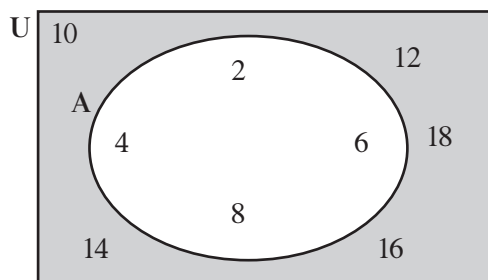
- Represente la relación de los conjuntos en un diagrama de Venn.
- ¿Qué elementos están en U y no están en A ?



- Los conjuntos representados en el diagrama de Venn:



- Los elementos que están en U pero no están en A son 10, 12, 14, 16, 18. Representado en el diagrama de Venn:



$$U - A = \{10, 12, 14, 16, 18\}$$



A un conjunto formado por los elementos que pertenecen a U y no pertenecen a A se le llama **complemento del conjunto A** , y se denota como A^c .

$$A^c = U - A$$

Al conjunto que contiene todos los elementos que están siendo considerados se le llama **conjunto universal**. Generalmente, este es representado por la letra “ U ” y en el diagrama de Venn por un rectángulo.



Dados los conjuntos:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{2, 4\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Encuentre los complementos y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.

- A^c
- B^c
- C^c



Sección 2 Relaciones entre conjuntos y proposiciones

Clase 1 Conjunción

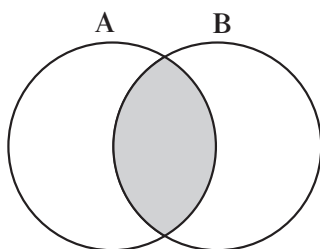


1. Dados los conjuntos $A = \{\text{Múltiplos de 3}\}$ y $B = \{\text{Múltiplos de 5}\}$:
 - a. Encuentre $A \cap B$.
 - b. Dibuje el diagrama de Venn para $A \cap B$.
2. Dadas las proposiciones:
 p : x es múltiplo de 3.
 q : x es múltiplo de 5.

Elabore la proposición compuesta $p \wedge q$.



1. a. $A \cap B = \{\text{Múltiplos de 3}\} \cap \{\text{Múltiplos de 5}\}$
 $= \{\text{Múltiplos de 15}\}$
b.



2. $p \wedge q$: x es un múltiplo de 3 y x es un múltiplo de 5.

Para que $p \wedge q$ sea verdadera, ambas proposiciones p y q deben ser verdaderas. Esto significa que x debe ser múltiplo de 3 y 5. Lo que implica que x es múltiplo de 15.

La conjunción es verdadera solo cuando las dos proposiciones son verdaderas. En los demás casos será falsa.



Por tanto, el resultado de $A \cap B$ es igual al resultado de $p \wedge q$.



Existe una relación estrecha entre conjuntos y proposiciones. La operación entre proposiciones simples que describe la intersección entre dos conjuntos es la conjunción.

El resultado entre $A \cap B$ es igual al resultado de $p \wedge q$.



- Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente las siguientes operaciones por medio de notación de conjuntos.
- a. $p \wedge q$
 - b. $q \wedge p$

Sección 2 Relaciones entre conjuntos y proposiciones

Clase 2 Disyunción



- Dados los conjuntos $A = \{\text{divisores de } 6\}$ y $B = \{\text{divisores de } 8\}$:
 - Encuentre $A \cup B$.
 - Dibuje el diagrama de Venn para $A \cup B$.
- Dadas las proposiciones:

p : x es divisor de 6.

q : x es divisor de 8.

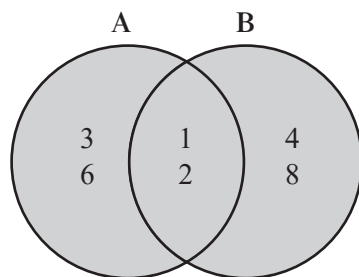
Elabore la proposición compuesta $p \vee q$.



- $$A \cup B = \{\text{divisores de } 6\} \cup \{\text{divisores de } 8\}$$

$$= \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 2, 4, 8\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$
 -



- $p \vee q$: x es divisor de 6 o x es divisor de 8.

Para que $p \vee q$ sea verdadera, ya sea p o q debe ser verdadera.

Esto significa que x debe ser divisor de 6 o de 8.

Lo que implica que x es 1, 2, 3, 4, 6 u 8.

Por tanto, el resultado de $A \cup B$ es igual al resultado de $p \vee q$.

La disyunción es verdadera cuando por lo menos una de las dos proposiciones es verdadera.



La operación entre proposiciones simples que describe la unión entre dos conjuntos es la disyunción.

El resultado de $A \cup B$ es igual al resultado de $p \vee q$.



Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente las siguientes operaciones por medio de notación de conjuntos.

- $p \vee q$
- $q \vee p$

Sección 2 Relaciones entre conjuntos y proposiciones

Clase 3 Negación



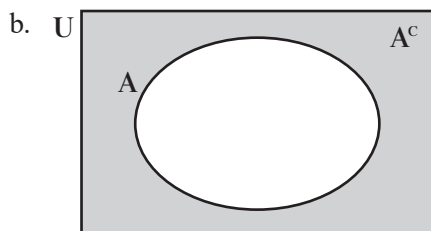
1. Dados los conjuntos $U = \{\text{números enteros}\}$ y $A = \{\text{números enteros pares}\}$:
 - a. Encuentre A^c .
 - b. Dibuje el diagrama de Venn para A^c .

2. Dada la proposición:
 $p: x$ es un número par.

Elabore la negación de la proposición, $\sim p$.



1. a. $A^c = \{\text{números enteros no pares}\}$
 $= \{\text{números enteros impares}\}$



Los elementos de A^c son aquellos que no pertenecen al conjunto A pero pertenecen a U.



2. $\sim p: x$ no es un número entero par.

Lo que es equivalente a “ x es un número entero impar”.

Por tanto, A^c es semejante a $\sim p$.

Una proposición y su negación tienen valores contrarios.



La proposición que describe la relación de complemento de un conjunto es la negación.



Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente las siguientes operaciones por medio de notación de conjuntos.

- a. $\sim p$
- b. $\sim q$

Sección 3 Razonamientos

Clase 1 Razonamiento inductivo y deductivo (1)



Lea cada razonamiento y responda:

La casa de Juan tiene techo de lámina. Las tres casas cercanas a la de Juan también tienen techo de lámina. Por tanto, todas las casas de la comunidad donde vive Juan tienen techo de lámina.

Todos los jóvenes que estudian tendrán éxito en la vida. Juan es un joven que estudia. Por tanto, Juan tendrá éxito en la vida.

¿Qué diferencias hay entre los dos razonamientos?

Al conjunto de actividades mentales que consiste en la conexión de ideas de acuerdo a ciertas reglas para llegar a una conclusión se le llama **razonamiento**.



Antes de encontrar las diferencias, es necesario aclarar que todo razonamiento está formado por premisas y conclusión. Las premisas son las proposiciones que anteceden a la conclusión.

Las premisas del primer razonamiento son: “La casa de Juan tiene techo de lámina” y “Las tres casas cercanas a la de Juan también tienen techo de lámina”. La conclusión es: “Por tanto, todas las casas de la comunidad donde vive Juan tienen techo de lámina”. Las premisas son proposiciones específicas y se llega a una conclusión general.

Las premisas del segundo razonamiento son: “Todos los jóvenes que estudian tendrán éxito en la vida” y “Juan es un joven que estudia”. La conclusión es: “Por tanto, Juan tendrá éxito en la vida”. Este razonamiento va de lo general a lo específico.



Un **razonamiento inductivo** se caracteriza por permitir llegar a una conclusión general a partir de observaciones repetidas de ejemplos específicos.

Un **razonamiento deductivo** se caracteriza por permitir llegar a una conclusión específica mediante la aplicación de principios generales a ejemplos específicos.



Indique el tipo de razonamiento utilizado en cada inciso.

- Todos los números pares son divisibles entre 2. El número 18 es divisible entre 2. Por tanto, 18 es un número par.
- Ana sale al frío sin abrigarse y se enferma, Manuel sale al frío sin abrigarse y se enferma, Carlos sale al frío sin abrigarse y se enferma. Por tanto, si sale al frío sin abrigarse se enferma.
- Todos los estudiantes de música tocan guitarra. Elena es una estudiante de música. Por tanto, Elena toca guitarra.
- Todos los cuadriláteros tienen 4 lados. El rombo tiene 4 lados. Por tanto, el rombo es un cuadrilátero.
- El médico dice: ayer atendí 4 pacientes con fiebre, hoy atendí otros 6 pacientes con fiebre, por tanto, mañana atenderé más pacientes con fiebre.
- 20 es divisible entre 5 y 50 es divisible entre 5. Por tanto, todos los números terminados en cero son divisibles entre 5.

Sección 3 Razonamientos

Clase 2 Razonamiento inductivo y deductivo (2)



- a. Utilice las siguientes premisas para predecir el siguiente enunciado.

$$3 \times 37 = 111$$

$$6 \times 37 = 222$$

$$9 \times 37 = 333$$

$$12 \times 37 = 444$$

$$15 \times 37 = ???$$

- b. Utilice las siguientes premisas para predecir una conclusión válida.

Todos los números que terminan en 0 o en 5 son divisibles entre 5.

El número 455 termina en 5.

- c. ¿Qué tipo de razonamiento utilizó para resolver cada problema?



- a. Cada premisa comprende dos factores. Uno de ellos se repite (37), y el otro es un número múltiplo de 3. Según las respuestas de cada enunciado, se puede concluir que el siguiente enunciado será:
 $15 \times 37 = 555$

- b. Tomando en cuenta las premisas, la conclusión será:

El número 455 es divisible entre 5.

- c. En el problema del inciso a se utilizó razonamiento inductivo. Un conjunto de premisas lleva a una conclusión.

En el problema del inciso b se utilizó razonamiento deductivo. Partiendo de una premisa general se analizó un caso en particular.



En general, para la solución de un problema se necesitan ciertas premisas que pueden ser una suposición o hipótesis, una ley, una regla, una idea ampliamente aceptada u observada. Luego, partiendo de las premisas se razona de manera inductiva o deductiva para llegar a una conclusión.

A las premisas y la conclusión se les llama **argumento lógico**.



Escriba la conclusión de las premisas dadas.

- a. 10 es divisible entre 5.

20 es divisible entre 5.

- b. Todos los rectángulos tienen cuatro lados.

Los cuadrados son rectángulos.

Sección 4 Relación de definiciones

Clase 1 Relación de definiciones



Lea la definición de cada uno de los siguientes conceptos, y después responda.

Axioma: es una proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración.

Postulado: es una proposición no tan evidente como un axioma, pero que también se admite sin demostración.

Teorema: es una proposición cuya verdad necesita demostración.

Corolario: es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.

Falacia lógica: es un modo de razonamiento que siempre o casi siempre conduce a un argumento incorrecto.

¿A qué concepto pertenece cada enunciado?

- a. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.
- b. La suma de dos números es única.
- c. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
- d. La suma de los ángulos agudos internos de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo recto.
- e. Todas las personas altas que conozco corren rápido, por tanto, todas las personas altas corren rápido.



- a. La proposición “El todo es mayor que cualquiera de sus partes” no necesita demostración para ser aceptada. Por tanto, se considera un axioma.
- b. La proposición “La suma de dos números es única” no es tan evidente como un axioma. Por tanto, se considera un postulado.
- c. La proposición “La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos” debe ser demostrada para que sea aceptada. Por tanto, se considera un teorema.
- d. La proposición “La suma de los ángulos agudos interiores de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo recto” es necesario deducirla del teorema anterior para que sea aceptada. Por tanto, se considera un corolario.
- e. La proposición “Todas las personas altas que conozco corren rápido, por tanto, todas las personas altas corren rápido” es un razonamiento incorrecto porque se está llegando a generalizar a partir de un grupo muy pequeño de personas y no se cumple que todas las personas altas corran rápido. Por tanto, se considera una falacia lógica.



Axioma: es una proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración.

Postulado: es una proposición no tan evidente como un axioma, pero que también se admite sin demostración.

Teorema: es una proposición cuya verdad necesita demostración.

Corolario: es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.

Falacia lógica: es un modo de razonamiento que siempre o casi siempre conduce a un argumento incorrecto.



Indique si cada inciso es un axioma, postulado, teorema, corolario o falacia lógica.

- a. Infinitas rectas pasan por un punto.
- b. Cualquier cantidad es igual a sí misma.
- c. Dos puntos determinan una recta.
- d. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- e. Todo número entero positivo se puede representar como el producto de dos o más factores primos.
- f. Un cateto de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.
- g. El número a es igual a sí mismo.
- h. Los cereales son mejores porque se anuncian en la televisión.

Ejercitación A

1. Dados los conjuntos:

$$A = \{1, 3, 6, 9, 12\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Escriba $\in$ o $\notin$ en el espacio indicado.

a. $3 \square A$

b. $10 \square A$

c. $2 \square B$

d. $0 \square A$

e. $8 \square B$

f. $5 \square B$

2. Escriba $\{ \}$ o $\emptyset$ en el espacio en blanco si el conjunto es vacío.

a. $M = \{\text{Números naturales menores a } 1\}$ _____

b. $O = \{ \}$ _____

c. $H = \{\text{Números enteros negativos mayores a } -1\}$ _____

d. $C = \{1\}$ _____

3. Encuentre todos los subconjuntos de cada conjunto.

a. $P = \{2, 4\}$

b. $Q = \{1, 3, 5\}$

c. $N = \{1, 2, 3, 5\}$

4. Dados los conjuntos:

$$H = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$K = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Encuentre los siguientes conjuntos y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.

a. $H \cup K$

b. $K \cap H$

c. $H \cup S$

d. $K \cap S$

e. $K \cup S$

f. $H \cap S$

5. Dados los conjuntos:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

$$C = \{1, 5, 9, 13\}$$

$$D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Encuentre los siguientes conjuntos y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.

a. $C - D$

b. $C \Delta D$

c. C^c

d. $D - C$

e. D^c

f. $D \Delta C$

6. Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente las siguientes operaciones por medio de notación de conjuntos.

a. $\sim q$

b. $q \wedge p$

c. $p \vee q$

7. Resuelva los siguientes problemas.

a. Los números terminados en un número par son divisibles entre dos. 24 termina en 4. ¿24 es divisible entre dos?

b. 25 es un número impar. 35 es un número impar. ¿Todos los números terminados en 5 son impares?

Ejercitación B

1. Encuentre todos los subconjuntos de los siguientes conjuntos.

- a. $A = \{5\}$
- b. $B = \{2, 4, 6\}$
- c. $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

2. Dados los conjuntos:

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$K = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$L = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Encuentre los siguientes conjuntos y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.

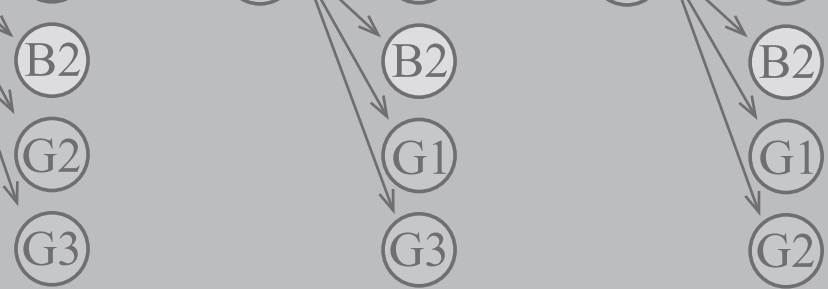
- a. $L - K$
- b. L^c
- c. $K \cap L$
- d. $K \cup L$
- e. $K \Delta L$
- f. K^c

3. Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente las siguientes operaciones por medio de notación de conjuntos.

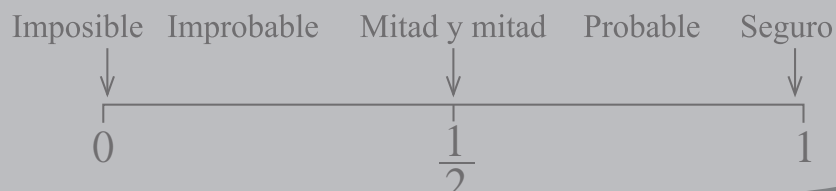
- a. $\sim p \wedge q$
- b. $\sim p \vee q$
- c. $(p \wedge q) \vee p$

4. Exprese los siguientes problemas en un diagrama de Venn y resuelva.

- a. En una clase de tercero básico hay 10 alumnos que practican solo fútbol, 5 que practican fútbol y básquetbol y 9 que practican solo básquetbol. ¿Cuántos alumnos practican solamente un deporte?
- b. Se hace una entrevista a un grupo de alumnos de tercero básico de un instituto en Mazatenango acerca de su fruta preferida y los resultados son: 16 alumnos prefieren la manzana, 4 alumnos prefieren solo la mandarina, 3 alumnos prefieren la manzana y la mandarina. ¿Cuántos alumnos prefieren solo la manzana?



$$P(A \text{ y } B) = P(A)$$



Unidad 6

Estadística

Sección 1 Estadística

Clase 1 Rango



Se presentan las notas obtenidas por un grupo de estudiantes en las pruebas de Matemática e Inglés. Las pruebas fueron calificadas sobre 100 puntos.

Matemática: 15, 61, 69, 73, 76, 77, 79, 81, 85

Inglés: 33, 40, 48, 58, 61, 63, 69, 75, 81

¿En qué prueba se encuentra la mayor diferencia entre la nota más alta y la más baja?



En Matemática la nota más alta es 85, y la más baja es 15. Entonces, la diferencia es: $85 - 15 = 70$. En Inglés la nota más alta es 81, y la más baja es 33. Entonces, la diferencia es: $81 - 33 = 48$.

Por tanto, la mayor diferencia entre la nota más alta y la más baja se observa en Matemática.



A la diferencia entre el dato mayor y el dato menor se le llama **rango**. El rango es una manera rápida de medir la dispersión de una serie de datos.



- ¿Cuál es el rango de los siguientes conjuntos de números?
 - 1, 7, 10, 11, 26, 46, 53, 72, 81
 - 3, 9, 10, 81, 3, 9, 36, 48, 24, 17, 63
- La siguiente tabla presenta las temperaturas máximas durante la primera semana del mes de octubre en la ciudad de Guatemala y Tokio. La temperatura está dada en grados centígrados.

Días	Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Ciudad de Guatemala	22	23	23	24	21	22	23
Tokio	19	25	26	27	26	25	27

- Ordene cada serie de datos de menor a mayor.
- Calcule el rango de temperaturas en la ciudad de Guatemala.
- Calcule el rango de temperaturas en Tokio.
- ¿En qué ciudad se registró la mayor diferencia de temperaturas?

Sección 1 Estadística

Clase 2 Rango intercuartil



Se presentan las notas obtenidas por un grupo de estudiantes en las pruebas de Matemática e Inglés. Las pruebas fueron calificadas sobre 100 puntos.

Matemática: 15, 61, 69, 73, 76, 77, 79, 81, 85
Inglés: 33, 40, 48, 58, 61, 63, 69, 75, 81

Los cuartiles son aquellos puntos que dividen una serie de datos en cuatro partes iguales mediante tres cuartiles: Q_1 , Q_2 , Q_3 .



- Encuentre los cuartiles para cada serie de datos.
- ¿En qué serie de datos existe mayor diferencia entre el primer cuartil (Q_1) y el tercer cuartil (Q_3)?



a.
Matemática:

El Q_1 es la media aritmética de 61 y 69, así que $Q_1 = \frac{61 + 69}{2} = 65$. 15, 61, 69, 73, 76, 77, 79, 81, 85
El Q_2 es 76.

El Q_3 es la media aritmética de 79 y 81, así que $Q_3 = \frac{79 + 81}{2} = 80$. Q_1 Q_2 Q_3

Inglés:

El Q_1 es la media aritmética de 40 y 48, así que $Q_1 = \frac{40 + 48}{2} = 44$. 33, 40, 48, 58, 61, 63, 69, 75, 81
El Q_2 es 61.

El Q_3 es la media aritmética de 69 y 75, así que $Q_3 = \frac{69 + 75}{2} = 72$. Q_1 Q_2 Q_3

- b.
La diferencia entre el primer cuartil y el tercer cuartil de Matemática es: $80 - 65 = 15$.
La diferencia entre el primer cuartil y el tercer cuartil de Inglés es: $72 - 44 = 28$.
Por tanto, la diferencia de Q_1 y Q_3 es mayor en Inglés.



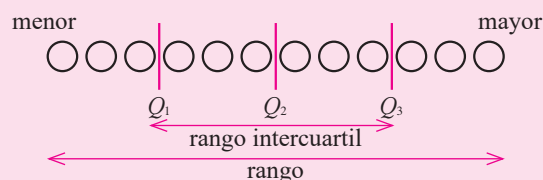
A la diferencia entre el primer y el tercer cuartil se le llama **rango intercuartil**. Para calcular el rango intercuartil:

Paso 1. Se ordena el conjunto de números de menor a mayor.

Paso 2. Se encuentran Q_1 y Q_3 .

Paso 3. Se resta Q_1 de Q_3 .

La figura muestra gráficamente el significado del rango y del rango intercuartil.



- ¿Cuál es el rango intercuartil de los siguientes incisos?
 - 2, 7, 8, 10, 11, 24, 30, 36, 40, 42, 49
 - 71, 46, 9, 11, 3, 66, 51, 70
- La siguiente tabla presenta las temperaturas máximas obtenidas durante la primera semana de octubre en la ciudad de Guatemala y Tokio.

Días	Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Ciudad de Guatemala	22	23	23	24	21	22	23
Tokio	19	25	26	27	26	25	27

- Ordene cada serie de datos de menor a mayor.
- Calcule el rango intercuartil de temperaturas en la ciudad de Guatemala.
- Calcule el rango intercuartil de temperaturas en Tokio.

Sección 2 Probabilidades

Clase 1 Diagrama de árbol



Se lanza una moneda dos veces.

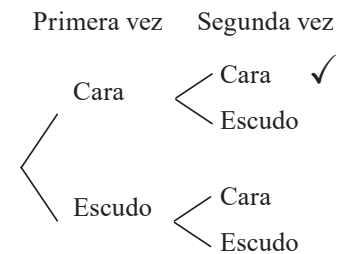
- ¿Cuántos posibles resultados existen?
- ¿Cuántos posibles resultados existen para obtener cara dos veces?



El diagrama muestra los posibles resultados de dos lanzamientos de una moneda.

Respuesta:

- Existen 4 posibles resultados cuando la moneda se ha lanzado dos veces.
- Existe 1 posible resultado para obtener cara dos veces.



A una representación gráfica de los posibles resultados de los eventos se le llama **diagrama de árbol**.

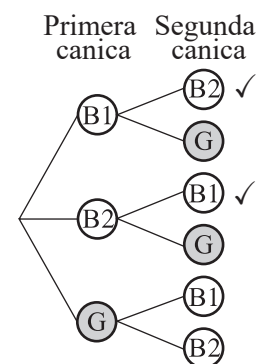
Ejemplo:

Dos canicas blancas y una canica gris están en una misma caja. Se sacan consecutivamente dos canicas sin ver.

El diagrama de árbol muestra todos los posibles resultados de las dos canicas que se sacan.

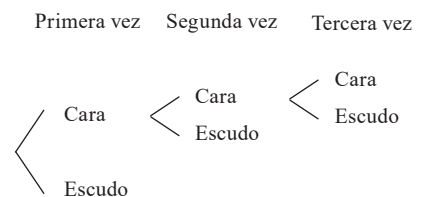
Existen 6 posibles resultados.

Existen 2 posibles resultados para obtener dos blancas.



- Se lanza 1 moneda tres veces.

- Complete el diagrama de árbol de la derecha mostrando los resultados.
- ¿Cuántos posibles resultados existen?
- ¿Cuántos posibles resultados existen para obtener cara tres veces?
- ¿Cuántos posibles resultados existen para obtener cara una sola vez?



- Dos canicas de color rosado y tres canicas de color gris están en una caja. Se saca una canica al azar, sin devolverla a la caja, luego se saca otra canica al azar.
 - Dibuje un diagrama de árbol que muestre los resultados.
 - ¿Cuántos posibles resultados existen?
 - ¿Cuántos posibles resultados existen donde la primera canica es gris y la segunda canica es rosada?
 - ¿Cuántos posibles resultados existen donde ambas canicas sean del mismo color?

Sección 2 Probabilidades

Clase 2 Permutación



¿Cuántos números de dos dígitos se pueden formar usando las tarjetas: 1, 2, 3 y 4? No se permite usar una tarjeta dos veces.

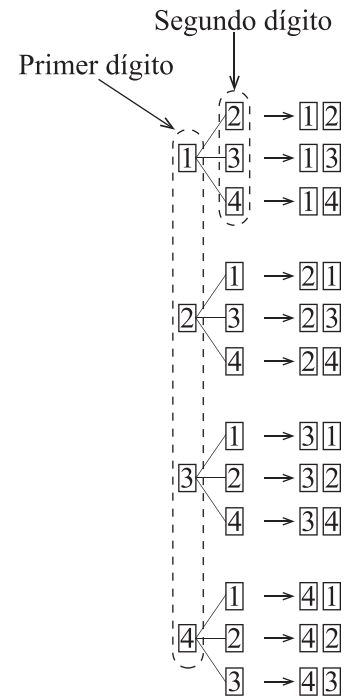


Existen 4 posibilidades para el dígito de la decena, porque se puede seleccionar cualquiera de las cuatro tarjetas: 1, 2, 3 o 4.

Existen 3 posibilidades para el dígito de la unidad, porque quedan tres tarjetas después de seleccionar la primera tarjeta.

Por tanto, el total de números de dos dígitos se calcula por la multiplicación: $4 \times 3 = 12$.

Respuesta: 12 números.



A un arreglo de objetos, para el cual importa el orden de los objetos, se le llama **permutación**. El número total de permutaciones de r objetos a partir de n objetos diferentes, que se denota como P , se encuentra por la siguiente expresión:

$$P = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}_{r \text{ factores}}$$

Ejemplo:

Números de tres dígitos formados usando las tarjetas: 1, 2, 3 y 4, no se permite usar una tarjeta más de una vez:

Forma 1.

$$P = 4 \times 3 \times 2 \\ = 24$$

Se sacan tres tarjetas a partir de cuatro tarjetas. Así que, se multiplican 3 factores a partir de 4.

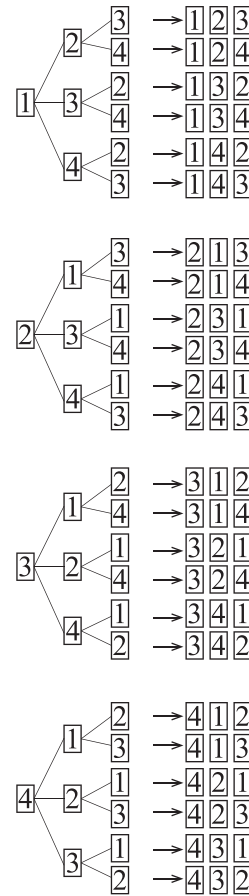
Por tanto, se pueden formar 24 números.

En este caso, el número total de objetos n es 4 y el número de objetos a sacar r es 3. Así que, se multiplican 3 factores disminuidos uno por uno a partir de 4. Es decir, $4 \times 3 \times 2$.



Forma 2.

Como muestra el diagrama de árbol de la derecha, existen 24 números diferentes.



¿Cuántos arreglos diferentes se pueden formar en los siguientes casos?

- Se forman números de dos dígitos usando cinco tarjetas diferentes: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$, sin repetición.
- Se forman números de tres dígitos usando seis tarjetas diferentes: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ y $\boxed{6}$, sin repetición.
- Se selecciona el primer, segundo, tercer y cuarto corredor a partir de siete candidatos para la carrera de los 21K.
- Se selecciona el capitán y el sub capitán a partir de once jugadores del equipo.

Sección 2 Probabilidades

Clase 3 Combinación



¿Cuántas posibles maneras existen para sacar dos tarjetas a partir de cuatro tarjetas:

1, 2, 3 y 4?



Existen las siguientes 12 maneras diferentes para sacar dos tarjetas a partir de las cuatro tarjetas dadas:

1 2, 1 3, 1 4, 2 1, 2 3, 2 4, 3 1, 3 2, 3 4, 4 1, 4 2, 4 3

Sin embargo, los siguientes pares son las mismas combinaciones de dos tarjetas.

1 2 y 2 1 consisten en las mismas tarjetas.

1 3 y 3 1 consisten en las mismas tarjetas.

1 4 y 4 1 consisten en las mismas tarjetas.

2 3 y 3 2 consisten en las mismas tarjetas.

2 4 y 4 2 consisten en las mismas tarjetas.

3 4 y 4 3 consisten en las mismas tarjetas.

Por tanto, el número de combinaciones de dos tarjetas se calcula por $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.

Respuesta: 6 maneras



A un arreglo de objetos, para el cual no importa el orden, se le llama **combinación**.

El número total de combinaciones de r objetos a partir de n objetos diferentes, que se denota como C , se encuentra por la siguiente expresión:

$$C = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r \text{ factores}}}{r(r-1)(r-2)\cdots 3 \times 2 \times 1}$$

El número total de permutación de r objetos a partir de n objetos.

El número total de arreglos diferentes de r objetos.

Ejemplo:

Cuando se sacan tres tarjetas simultáneamente a partir de las siguientes cinco tarjetas 1, 2, 3, 4 y 5, el número de combinaciones es:

$$C = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

Por tanto, se pueden formar 10 combinaciones.

En este caso, el número total de objetos n es 5 y el número de objetos a sacar r es 3.

Así que, $C = \frac{n(n-1)(n-2)}{r(r-1)(r-2)} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$

r factores 3 factores



¿Cuántas combinaciones se pueden formar en los siguientes casos?

a. Se sacan dos tarjetas simultáneamente a partir de las siguientes cinco tarjetas:

1, 2, 3, 4 y 5.

b. Se seleccionan tres tipos de pasteles a partir de siete tipos.

c. Se seleccionan dos representantes de estudiantes a partir de diez estudiantes.

d. Se seleccionan tres sabores de helados a partir de ocho sabores.

Sección 2 Probabilidades

Clase 4 Probabilidad



- Cuando se lanza una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que salga cara?
- Cuando se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 1 en la cara superior?



- Cuando se lanza una moneda, hay dos posibles resultados: cara o escudo. Si la moneda no está alterada, cada resultado es igualmente probable. Por tanto, la probabilidad de que salga una cara:
$$P(\text{cara}) = \frac{(\text{Número de la cara})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{1}{2}$$
- Cuando se lanza un dado, hay seis posibles resultados: 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Si el dado no está alterado, cada resultado es igualmente probable. Por tanto, la probabilidad de que salga el número 1:
$$P(1) = \frac{(\text{Número de 1})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{1}{6}$$



A una medida de la posibilidad en que ocurra un evento se le llama **probabilidad**. Si cada resultado es igualmente probable, la probabilidad P , en que ocurre un evento A , se encuentra:

$$P(A) = \frac{a}{n}$$

donde a corresponde al número de resultados del evento A , y n corresponde al número total de resultados.

Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se le llama espacio muestral.



- Cuando se lanza un dado y se observa su cara superior, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes eventos?
 - Un 2
 - Un número par
 - Un número primo
 - Un 3 o un 6
- Una caja tiene cinco canicas, dos rojas, dos verdes y una azul. Si se saca una, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes eventos?
 - Roja
 - Verde
 - Azul
- Cuando se saca una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes eventos?
 - La reina de corazones
 - Un 5
 - Una de corazón
 - Una carta roja
 - Un rey o una reina

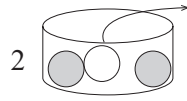
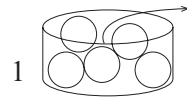


Sección 2 Probabilidades

Clase 5 Propiedades de probabilidad



- Una caja tiene cinco canicas blancas. Cuando se saca una canica sin ver:
 - ¿Cuál es la probabilidad de sacar una blanca?
 - ¿Cuál es la probabilidad de sacar una gris?
- Una caja tiene una canica blanca y dos grises. Cuando se saca una canica sin ver:
 - ¿Cuál es la probabilidad de sacar la blanca?
 - ¿Cuál es la probabilidad de no sacar la blanca?



- Todas las canicas son blancas. Así que, la probabilidad de sacar la blanca:

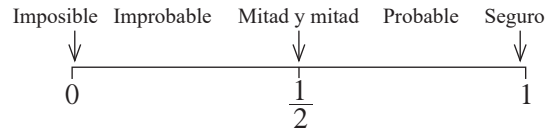
$$P(\text{blanca}) = \frac{(\text{Número de blancas})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{5}{5} = 1$$

- No hay canica gris, así que la probabilidad de sacar la gris:

$$P(\text{gris}) = \frac{(\text{Número de gris})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{0}{5} = 0$$

La probabilidad se muestra en una escala.

La probabilidad está siempre entre imposible (0) y seguro (1).



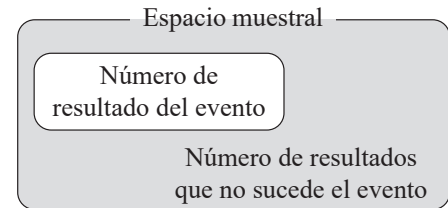
- La probabilidad de sacar la blanca:

$$P(\text{blanca}) = \frac{(\text{Número de blancas})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{1}{3}$$

- La probabilidad de no sacar la blanca, expresada como $P(\text{blanca}^c)$:

$$P(\text{blanca}^c) = \frac{(\text{Número de diferentes a blancas})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, se concluye que $P(\text{blanca}^c) = 1 - P(\text{blanca})$.



La probabilidad de un evento E está siempre entre cero y uno, y se expresa como: $0 \leq P \leq 1$. Si la probabilidad de un evento E es igual a uno, es decir, $P = 1$, se dice que es seguro que el evento suceda.

Si la probabilidad de un evento E es igual a cero, es decir, $P = 0$, se dice que es imposible que el evento suceda.

Si la probabilidad de que un evento E suceda es $P(E)$, la probabilidad de que el evento E no suceda se denota $P(E^c)$ y se encuentra: $P(E^c) = 1 - P(E)$.



- Quando se lanza un dado y se observa su cara superior, ¿qué evento es más probable que suceda en cada uno de los siguientes incisos?
 - Un número 1 o un número 7
 - Un número par o un múltiplo de 3
 - Un número menor que 7 o un número impar
- Quando se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad que sucedan los siguientes eventos?
 - Un número 1
 - Diferente a un número 1
 - Un múltiplo de 3
 - Diferente a un múltiplo de 3
- Quando se saca una carta de la baraja de 52 cartas sin ver, ¿cuál es la probabilidad que sucedan los siguientes eventos?

a. Un A de corazones	b. No es un A de corazones.
c. Un corazón	d. No es un corazón.
e. Una carta roja	f. No es una carta roja.
g. Un A	h. No es un A.

Sección 2 Probabilidades

Clase 6 Ley de la suma



1. Cuando se lanza una moneda al aire, ¿es posible que el resultado sea cara “y” escudo al mismo tiempo?
2. Cuando se lanza un dado y se observa su cara superior, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes eventos?
 - a. Un 2 o un 3
 - b. Un número par o un múltiplo de 3



1. No es posible que cara “y” escudo sucedan al mismo tiempo. El resultado es siempre una de las dos opciones, cara “o” escudo.

Por tanto, la probabilidad de que el resultado sea una cara y un escudo al mismo tiempo:

$$P(\text{cara y escudo}) = 0.$$

Cuando dos eventos no pueden suceder simultáneamente se les llama **mutuamente excluyentes**.

2. a. Forma 1.

Hay seis posibles resultados cuando se lanza un dado: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Es decir, el espacio muestral es 6. Entonces, la probabilidad de obtener 2 o 3: $P(2 \text{ o } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Forma 2.

$$P(2) = \frac{1}{6} \text{ y } P(3) = \frac{1}{6}. \text{ Así que, } P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, se puede concluir que $P(2 \text{ o } 3) = P(2) + P(3)$.

Es imposible obtener 2 o 3 al mismo tiempo, entonces el obtener 2 y el obtener 3 son mutuamente excluyentes.

- b. Los números que son par o múltiplo de 3 son: 2, 3, 4 y 6.

$$\text{Por tanto, } P(\text{número par o múltiplo de 3}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Sin embargo, } P(\text{número par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ y } P(\text{múltiplo de 3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ entonces}$$

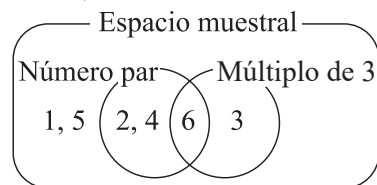
$$P(\text{número par o múltiplo de 3}) \neq P(\text{número par}) + P(\text{múltiplo de 3}).$$

El número 6 es un número par y un múltiplo de 3, así que el número 6 se cuenta dos veces.

Por tanto, una de las probabilidades de obtener 6, número par y múltiplo de 3, se tiene que restar.

$$\begin{aligned} &P(\text{número par o múltiplo de 3}) \\ &= P(\text{número par}) + P(\text{múltiplo de 3}) - P(\text{número par y múltiplo de 3}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\neq$ es el símbolo de desigualdad. Es decir, $A \neq B$ significa A no es igual a B.



Cuando dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes**:

La probabilidad de que A y B sucedan al mismo tiempo es igual a 0 (imposible): $P(A \text{ y } B) = 0$. La probabilidad de A o B se encuentra como la suma de la probabilidad de A y la probabilidad de B : $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$.

Cuando dos eventos A y B son **mutuamente no excluyentes**:

La probabilidad de A o B se encuentra sumando la probabilidad de A y la probabilidad de B , y después, restando la probabilidad de A y B : $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$.



1. Cuando se saca una carta de una baraja de 52 cartas, indique si los siguientes eventos son mutuamente excluyentes o mutuamente no excluyentes.
 - a. Una espada, un 5
 - b. Un corazón, una carta roja
 - c. Una carta numerada, una carta de letras
 - d. Un corazón, una espada
 - e. Una carta roja, un 7
2. Si se saca una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?
 - a. Un corazón “y” una espada
 - b. Un corazón “o” una espada
 - c. Un A “y” un corazón
 - d. Un A “o” un corazón



Sección 2 Probabilidades

Clase 7 Eventos independientes



Cuando se lanza una moneda de un quetzal (Q1.00) y una moneda de cincuenta centavos (50¢), ¿cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas?



Cuando se lanzan dos monedas, hay dos posibles resultados para una moneda y dos posibles resultados para la otra moneda. Entonces, hay cuatro (igual a 2×2) posibles resultados para las dos monedas, como se muestra en la figura. El obtener cara en la moneda de Q1.00 no afecta el obtener cara en la moneda de 50¢, ni viceversa.

Por tanto, la probabilidad de obtener dos caras:

$$P(\text{cara de Q1.00 y cara de 50¢}) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}.$$

		50¢	
		Cara	Escudo
Q1.00	Cara	✓	×
	Escudo	×	×

Ahora la probabilidad de obtener cara en la moneda de Q1.00: $P(\text{cara de Q1.00}) = \frac{1}{2}$, y la probabilidad de obtener cara en la moneda de 50¢: $P(\text{cara de 50¢}) = \frac{1}{2}$. Entonces, el producto de $P(\text{cara de Q1.00})$ y $P(\text{cara de 50¢})$ es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Es igual a la probabilidad de obtener cara en las dos monedas.



Los eventos son **independientes** si el resultado de cada evento no es afectado por los resultados de otros eventos.

Si los eventos A y B son independientes, entonces la probabilidad que sucedan los dos eventos al mismo tiempo se calcula por la multiplicación de las probabilidades de A y B :

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B).$$

Ejemplo:

Cuando se lanza un dado grande y un dado pequeño, la probabilidad de:

- Obtener 6 en la cara superior de ambos dados.

El obtener 6 en el dado grande no afecta el obtener 6 en el dado pequeño, ni viceversa.

Así que, la probabilidad de obtener 6 en el dado grande:

$$P(6 \text{ en dado grande}) = \frac{1}{6}, \text{ y la probabilidad de obtener}$$

$$6 \text{ en el dado pequeño: } P(6 \text{ en dado pequeño}) = \frac{1}{6}.$$

Por tanto, la probabilidad de obtener dos 6:

$$P(6 \text{ en dado grande y } 6 \text{ en dado pequeño}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

		Dado pequeño					
		1	2	3	4	5	6
Dado grande	1	×	×	×	×	×	×
	2	×	×	×	×	×	×
	3	×	×	×	×	×	×
	4	×	×	×	×	×	×
	5	×	×	×	×	×	×
	6	×	×	×	×	×	✓

- b. La suma de los números de los dos dados es 4.

La figura muestra la suma de los dos números para todos los 36 posibles resultados. La suma de los números de dos dados es 4 cuando:

- 1 en el dado grande y 3 en el dado pequeño,
2 en el dado grande y 2 en el dado pequeño o
3 en el dado grande y 1 en el dado pequeño.

		Dado pequeño					
		1	2	3	4	5	6
Dado grande	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

El evento con un dado grande no afecta el evento con un dado pequeño, así que las probabilidades son:

$$P(1 \text{ en dado grande y } 3 \text{ en dado pequeño}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(2 \text{ en dado grande y } 2 \text{ en dado pequeño}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(3 \text{ en dado grande y } 1 \text{ en dado pequeño}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Entonces, la probabilidad de que la suma de los números de los dos dados es 4:

$$P(\text{suma es } 4) = P(1 \text{ y } 3) + P(2 \text{ y } 2) + P(3 \text{ y } 1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$



1. Cuando se lanza una moneda de un quetzal y una moneda de 50 centavos, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes casos?
 - a. Escudo en ambas monedas
 - b. Una cara y un escudo
2. Cuando se lanza un dado grande y un dado pequeño, ¿cuál es la probabilidad que sucedan los siguientes casos?
 - a. Los dos dados son 1.
 - b. Los números sobre los dos dados son los mismos.
3. Cuando se lanza una moneda y un dado, ¿cuál es la probabilidad que sucedan los siguientes casos?
 - a. Una cara y un 5
 - b. Un escudo y un número mayor que 3



Sección 2 Probabilidades

Clase 8 Probabilidad condicional



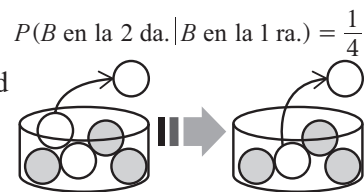
Dos canicas de color blanco y tres canicas de color gris están en una caja. Sin ver, se saca una canica primero y luego la otra sin devolver la primera canica. Si se saca una canica blanca primero, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda canica sea blanca también?



Forma 1.

Si se saca una canica blanca primero, entonces una canica blanca y tres canicas grises quedarán en la caja. Por tanto, la probabilidad de que la segunda canica sea blanca cuando la primera canica es blanca es $\frac{1}{4}$. La probabilidad de que la segunda canica sea blanca cuando la primera canica es blanca se denota como:

$P(\text{blanca en la segunda canica} | \text{blanca en la primera canica})$.

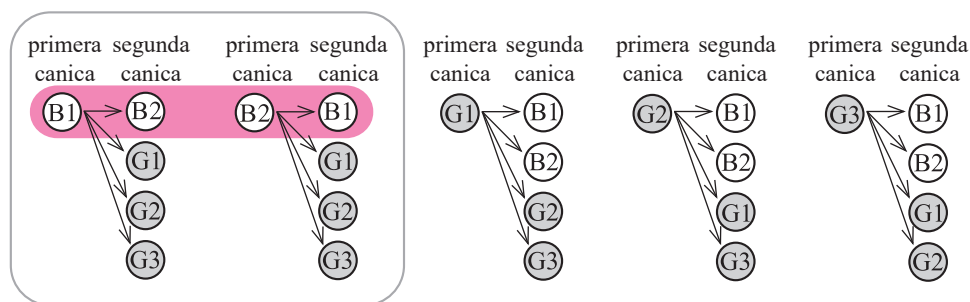


$$P(B \text{ en la 2 da.} | B \text{ en la 1 ra.}) = \frac{1}{4}$$

Forma 2.

El siguiente diagrama de árbol muestran todos los posibles resultados al sacar las dos canicas. Hay ocho casos en que la primera canica sea blanca. Entre estos ocho casos, hay dos casos en que la segunda canica sea blanca. Por tanto, la probabilidad de que la segunda canica sea blanca cuando la primera canica es blanca:

$$P(\text{blanca en la segunda canica} | \text{blanca en la primera canica}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$



A la probabilidad de que suceda un evento dado que ha sucedido otro evento, se le llama **probabilidad condicional**. La probabilidad de que suceda un evento A dado que se ha sucedido un evento B se denota como $P(A|B)$ y se lee como “la probabilidad de A dado B ”.



- Tres canicas azules y dos canicas negras están en una caja. Sin ver, se saca una canica primero y luego la otra sin devolver la primera canica. Cuando la primera canica es azul, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea negra?
- Tres canicas rosadas, dos canicas grises y una canica blanca están en una caja. Sin ver, se saca una canica primero y luego la otra sin devolver la primera canica. Cuando la primera canica es rosada, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea blanca?

Sección 2 Probabilidades

Clase 9 Ley del producto



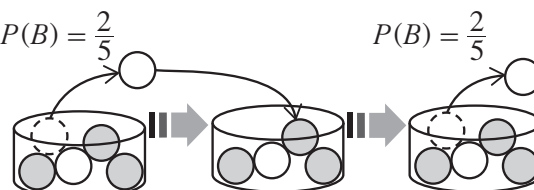
Dos canicas de color blanco y tres canicas de color gris están en una caja. Sin ver, se saca la primera canica y luego la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primer y la segunda canica sean blancas en los siguientes casos?

- Cuando se devuelve la primera canica a la caja antes de sacar la segunda canica.
- Cuando no se devuelve la primera canica a la caja antes de sacar la segunda canica.



- Existen cinco canicas y dos de ellas son blancas. Entonces, la probabilidad de que la primera canica sea blanca:

$$P(\text{blanca en la primera canica}) = \frac{2}{5}.$$



Si se devuelve la primera canica a la caja, la caja tendría 2 canicas blancas y 3 canicas grises cuando se saque la segunda canica. Entonces, la probabilidad de que la segunda canica sea blanca: $P(\text{blanca en la segunda canica}) = \frac{2}{5}$.

Por tanto, la probabilidad de que las dos canicas sean blancas es:

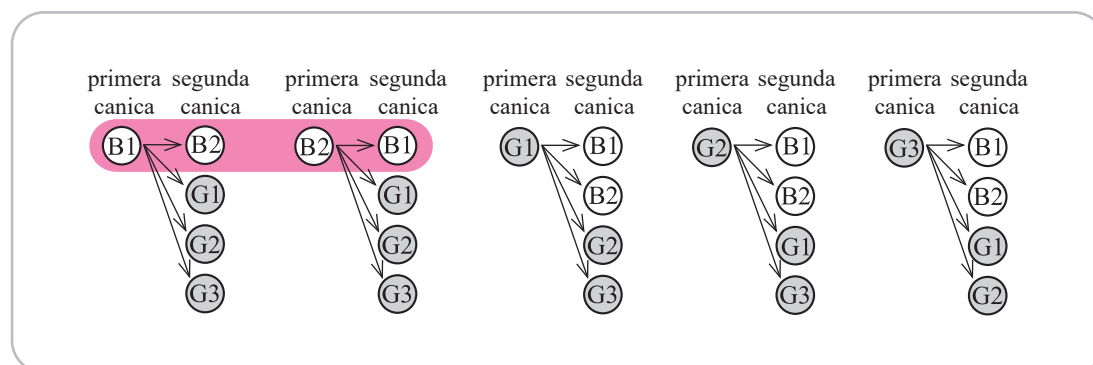
$$P(\text{blanca en la primera canica y blanca en la segunda canica}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

-

Forma 1.

El siguiente diagrama de árbol muestra todos los posibles resultados de las dos canicas. Entre 20 casos, existen dos posibles casos en los que la primera y segunda canica que se saquen sean blancas. Por tanto, la probabilidad de obtener dos canicas blancas consecutivas es:

$$P(\text{blanca en la primera canica y blanca en la segunda canica}) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$



Forma 2.

La siguiente tabla muestra todos los posibles resultados de las dos canicas.

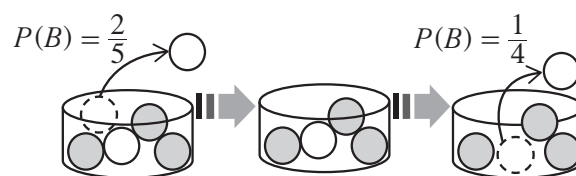
		Segunda canica				
		B1	B2	G1	G2	G3
Primera canica	B1		○	○	○	○
	B2	○		○	○	○
	G1	○	○		○	○
	G2	○	○	○		○
	G3	○	○	○	○	

Forma 3.

Existen cinco canicas y dos de ellas son blancas.

Entonces, la probabilidad de que la primera canica sea blanca:

$$P(\text{blanca en la primera canica}) = \frac{2}{5}.$$



Si no se devuelve la primera canica a la caja, la caja tiene una canica blanca y tres canicas grises cuando se saca la segunda canica. Entonces, la probabilidad de que la segunda canica sea blanca:

$$P(\text{blanca en la segunda canica}) = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, la probabilidad de que las dos canicas sean blancas:

$$P(\text{blanca en la primera canica y blanca en la segunda canica}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$



La probabilidad que sucedan dos eventos A y B se encuentra por la multiplicación de la probabilidad de A y la probabilidad de B .

Cuando el evento A y el evento B son independientes, la probabilidad de que sucedan ambos A y B es: $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$.

Cuando el evento A y B son dependientes, la probabilidad de que sucedan ambos A y B es: $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B|A)$.



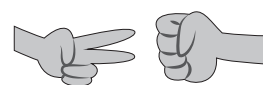
1. Cinco canicas azules y cuatro canicas negras están en una caja. Sin ver, se saca una canica primero y luego la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera canica sea azul y la segunda canica sea negra en los siguientes casos?
 - a. Se devuelve la primera canica a la caja.
 - b. No se devuelve la primera canica a la caja.
2. Se sacan dos cartas al azar de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta sea un rey y la segunda carta sea seis, en los siguientes casos?
 - a. Cuando se devuelve la primera carta a la baraja de cartas.
 - b. Cuando no se devuelve la primera carta a la baraja de cartas.

Ejercitación

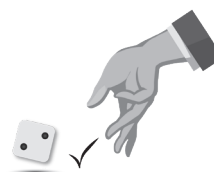
- Se presentan los puntos obtenidos en las pruebas de lectura por dos secciones de estudiantes de tercero básico.

Sección A	68, 72, 30, 55, 63, 71, 48, 51, 64, 49, 53, 70
Sección B	56, 69, 72, 70, 39, 42, 47, 53, 60, 63, 78, 73

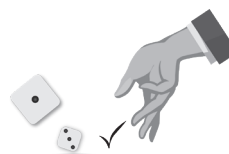
- Ordene cada serie de datos de menor a mayor.
 - Encuentre el rango intercuartil de los puntos obtenidos para cada sección de estudiantes de tercero básico.
- Miguel juega “piedra, papel o tijera” dos veces con una compañera.
 - Dibuje un diagrama de árbol que muestre los posibles resultados del juego de Miguel.
 - ¿Cuántas posibles combinaciones existen?
 - ¿Cuántas posibles combinaciones existen para mostrar dos veces papel?
 - ¿Cuántas posibles combinaciones existen para mostrar cada vez un elemento diferente?



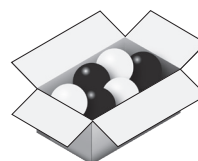
- Al lanzar un dado:
 - ¿Cuál es la probabilidad de que salga el número 4?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que no salga el número 4?



- Al lanzar un dado grande y un dado pequeño:
 - ¿Cuál es la probabilidad de que salga 3 en los dos dados?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar en los dos dados?



- En una bolsa de canicas, $\frac{1}{4}$ de canicas son canicas amarillas, $\frac{1}{4}$ son canicas blancas y $\frac{1}{2}$ son canicas verdes. Cuando se saca una canica sin ver, ¿de qué color es más probable que sea?
- Tres canicas blancas y tres canicas negras están en una caja.



- Sin ver, se saca una canica primero y luego la otra, sin devolver la primera canica. Cuando la primera canica es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda canica sea blanca?
- Cuando se devuelve la primera canica a la caja antes de sacar la segunda canica, ¿cuál es la probabilidad de que la primera canica sea blanca y la segunda canica sea negra?

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-a} &= \sqrt{a \times (-1)} \\
 &= \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \\
 &= \sqrt{a} i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{z} &= a - bi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\
 &= ac + adi + bci + b(-1) \\
 &= ac + adi + bci - b
 \end{aligned}$$

Unidad 7



Aritmética

Sección 1 Números reales

Clase 1 Repaso de números racionales



Expresa, si es posible, los siguientes números como fracciones en las que el numerador y el denominador sean enteros.

- a. 3 b. -4 c. 0.7 d. $\sqrt{3}$



a. $3 = \frac{3}{1}$

b. $-4 = -\frac{4}{1}$

c. $0.7 = \frac{7}{10}$

d. No es posible expresar como una fracción.



A un número que se expresa como $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$, se le llama **número racional**.

Ejemplo:

a. 5 Es un número racional, porque $5 = \frac{5}{1}$.

b. -2 Es un número racional, porque $-2 = -\frac{2}{1}$.

c. 0.3 Es un número racional, porque $0.3 = \frac{3}{10}$.

d. $\sqrt{2}$ No es un número racional, porque no se puede expresar como una fracción.



Clasifique los siguientes números en la tabla correspondiente.

- a. 3 b. -2 c. -0.3 d. $\frac{2}{3}$ e. $\sqrt{5}$ f. 1.4 g. -2.5 h. $-\frac{12}{5}$ i. $-\sqrt{3}$

Números racionales	Números no racionales

Sección 1 Números reales

Clase 2 Repaso de números irracionales



Expresa los siguientes números en forma de números decimales, utilizando calculadora. Luego, transfórmelos a fracciones, si es posible, en las que el numerador y el denominador sean números enteros.

- a. $\sqrt{2}$
- b. $\sqrt{5}$



a. $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$

Es un número decimal no periódico.
Por tanto, no se puede expresar como una fracción.

b. $\sqrt{5} = 2.236067977\dots$

Es un número decimal no periódico.
Por tanto, no se puede expresar como una fracción.

Un número decimal cuya parte decimal tiene infinitas cifras decimales y no son periódicas, no se puede expresar como una fracción.



A un número que no puede expresarse como $\frac{a}{b}$ se le llama **número irracional**.

Ejemplo:

- a. $\sqrt{3}$ Es un número irracional, porque no se puede expresar como una fracción.
- b. $-\sqrt{2}$ Es un número irracional, porque no se puede expresar como una fracción.
- c. $\sqrt{4}$ No es un número irracional, porque se puede expresar como una fracción.
 $\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$



Clasifique los siguientes números en la tabla correspondiente.

- a. $\sqrt{3}$ b. -5 c. 0.8 d. $-\sqrt{5}$ e. $\frac{8}{3}$ f. $\sqrt{9}$ g. -3.2 h. 4 i. $\sqrt{8}$

Números racionales	Números irracionales

Sección 1 Números reales

Clase 3 Números reales



Determine si los siguientes números son números racionales o irracionales.

- a. $0.\overline{45}$ b. $\sqrt{3}$ c. 0



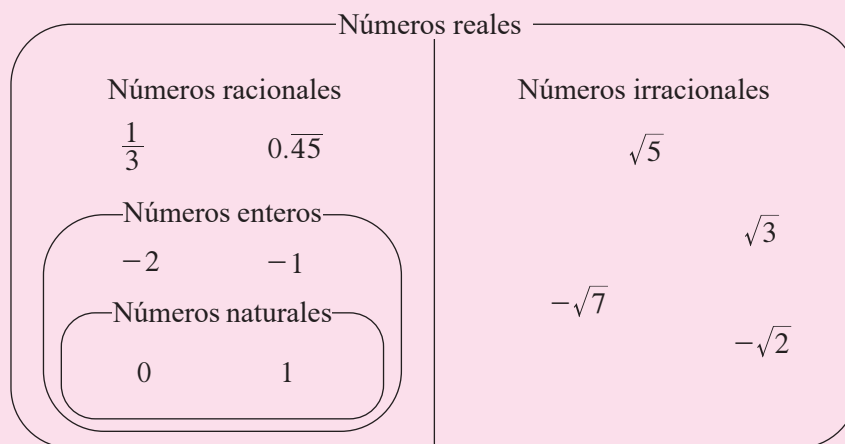
- a. $0.\overline{45}$ Es un número racional, porque es un número decimal periódico y se puede expresar como un número entero fraccionario: $\frac{5}{11}$.
- b. $\sqrt{3}$ Es un número irracional, porque no se puede expresar como un número entero fraccionario.
- c. 0 Es un número racional, porque se puede expresar como un número entero fraccionario: $\frac{0}{1}$.

Para expresar el número $0.\overline{45}$ como una fracción:

$$\begin{array}{r} 100x = 45.45454545... \\ (-) \quad x = 0.45454545... \\ \hline 99x = 45 \\ x = \frac{45}{99} \\ = \frac{5}{11} \end{array}$$

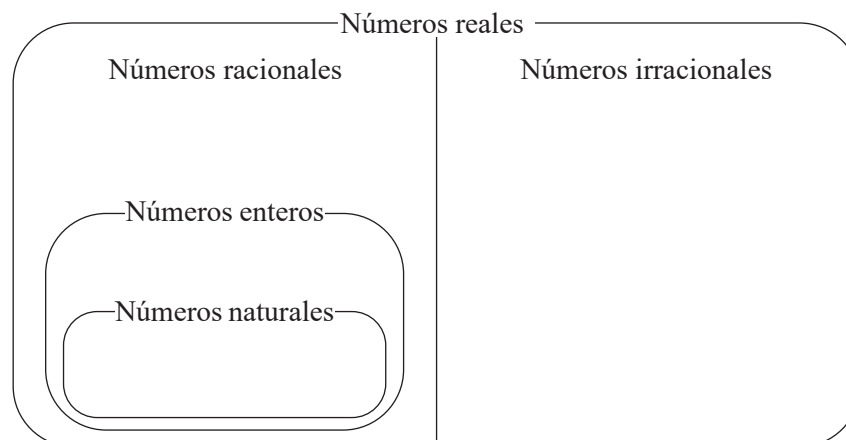


Los números reales contienen a los números racionales y a los números irracionales.



Clasifique los siguientes números en la figura correspondiente.

- a. $\frac{1}{2}$ b. 0.3 c. $\sqrt{7}$ d. 0 e. 0.25 f. -2 g. 4 h. $-\sqrt{3}$ i. $-\frac{5}{7}$ j. $\sqrt{2}$



Sección 2 Números complejos

Clase 1 Unidad imaginaria



Resuelva la siguiente ecuación.

$$x^2 + 2 = 0$$



$$x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = 0 - 2$$

$$x^2 = -2$$

El cuadrado de un número real es siempre un número positivo. Por tanto, la ecuación dada no tiene solución en números reales.

Para expresar el número cuyo cuadrado es negativo, se utiliza un nuevo número $\sqrt{-1}$, que es denotado por i , y es definido tal que $i = \sqrt{-1}$. Entonces, $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

Por tanto, la solución de la ecuación cuadrática $x^2 + 2 = 0$:

$$x^2 = -2$$

$$x = \pm\sqrt{-2}$$

$$= \pm\sqrt{2 \times (-1)}$$

$$= \pm\sqrt{2} \times \sqrt{-1}$$

$$= \pm\sqrt{2}i$$



$\sqrt{-1}$ se define como i , es decir, $i = \sqrt{-1}$.

A i se le llama **unidad imaginaria**.

Si $a > 0$, $\sqrt{-a} = \sqrt{a \times (-1)}$

$$= \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{a}i$$

Ejemplo:

a. $\sqrt{-5} = \sqrt{5 \times (-1)}$

$$= \sqrt{5} \times \sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{5} \times i$$

$$= \sqrt{5}i$$

Se sustituye $\sqrt{-1}$ por i .

b. $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times (-1)}$

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{-1}$$

$$= 3 \times i$$

$$= 3i$$

Se expresa $\sqrt{9}$ sin el símbolo radical y se sustituye $\sqrt{-1}$ por i .



Expresa en términos de i .

a. $\sqrt{-3}$

b. $\sqrt{-4}$

c. $\sqrt{-16}$

d. $\sqrt{-25}$

e. $\sqrt{-49}$

f. $\sqrt{-64}$

Sección 2 Números complejos

Clase 2 Parte real y parte imaginaria



Resuelva la siguiente ecuación.
 $x^2 - 2x + 17 = 0$



$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + 17 &= 0 \\
 x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 17}}{2 \times 1} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 68}}{2} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{64 \times (-1)}}{2} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{64} \times \sqrt{-1}}{2} \\
 &= \frac{2 \pm 8i}{2} \\
 &= 1 \pm 4i
 \end{aligned}$$

Se aplica la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Se expresa $\sqrt{64}$ sin el símbolo radial y se sustituye $\sqrt{-1}$ por i .



A un número que se expresa en forma de $a + bi$, donde a y b son números reales, se le llama **número complejo**. Al número a se le llama **parte real** del número complejo y al número b se le llama **parte imaginaria**.

$a + bi$ a : Parte real
 b : Parte imaginaria

Un número real a se expresa como un número complejo de la forma $a + 0i$, donde $b = 0$. A un número que no es número real, donde $b \neq 0$, se le llama **número imaginario**. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces es un número complejo en forma bi llamado **número imaginario puro**.

Ejemplo:

- a. $3 + 2i$
 Parte real: 3
 Parte imaginaria: 2
- b. $\sqrt{2}$
 Parte real: $\sqrt{2}$
 Parte imaginaria: 0
- c. $5i$
 Parte real: 0
 Parte imaginaria: 5

Se puede entender que
 $\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$.

Se puede entender que
 $5i = 0 + 5i$.



Identifique la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos.

- a. $2 + 4i$ b. $-1 + \sqrt{5}i$ c. $\sqrt{7} + i$ d. 3
- e. $\sqrt{3}i$ f. $\sqrt{3} - i$ g. $-6 - \sqrt{2}i$ h. $-i$



Sección 2 Números complejos

Clase 3 Módulo de un número complejo



Encuentre el valor de los siguientes números.

- a. $|5|$ b. $|-3|$



- a. 5 b. 3



El valor absoluto de un número complejo $z = a + bi$ se simboliza $|z|$ y está dado por la siguiente expresión:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Al valor absoluto de un número complejo se le llama **módulo** del número complejo.

Ejemplo:

a. $z = 3 + 4i$
 $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2}$
 $= \sqrt{9 + 16}$
 $= \sqrt{25}$
 $= 5$

b. $z = \sqrt{2} - 3i$
 $|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-3)^2}$
 $= \sqrt{2 + 9}$
 $= \sqrt{11}$



Encuentre el módulo de los siguientes números complejos.

- | | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a. $z = 3 + i$ | b. $z = -2 + i$ | c. $z = 2 + 5i$ | d. $z = 2 - 3i$ |
| e. $z = \sqrt{3} - 2i$ | f. $z = -4 - i$ | g. $z = -\sqrt{3} - 4i$ | h. $z = 4 + i$ |
| i. $z = -6 + i$ | j. $z = \sqrt{5} + 4i$ | k. $z = 5 - 6i$ | l. $z = -\sqrt{7} + 6i$ |

Sección 2 Números complejos

Clase 4 Suma y resta de números complejos



Calcule las siguientes expresiones.

- a. $(3 + 4i) + (5 - 2i)$
- b. $(3 + 4i) - (5 - 2i)$



a. $(3 + 4i) + (5 - 2i)$
 $= 3 + 4i + 5 - 2i$
 $= (3 + 5) + (4 - 2)i$
 $= 8 + 2i$

Se suprimen los paréntesis.

Se clasifica en parte real y parte imaginaria.

b. $(3 + 4i) - (5 - 2i)$
 $= 3 + 4i - 5 + 2i$
 $= (3 - 5) + (4 + 2)i$
 $= -2 + 6i$

Se suprimen los paréntesis. En este caso, se cambian los signos de los números del segundo paréntesis.

Se clasifica en parte real y parte imaginaria.



Para sumar y restar números complejos $a + bi$ y $c + di$, se suman o se restan separadamente las partes reales y las imaginarias, al igual que en las operaciones algebraicas $a + bx$ y $c + dx$.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$



Calcule las siguientes expresiones.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a. $(5 + 6i) + (3 - 2i)$ | b. $(3 - i) + (6 + 2i)$ | c. $(2 - 2i) + (7 - 6i)$ |
| d. $(8 + 2i) - (5 + i)$ | e. $(5 + 4i) - (4 - 2i)$ | f. $(3 - i) - (6 - 4i)$ |
| g. $(4 + 3i) + (5 - 3i)$ | h. $(6 - 4i) + (5 - 5i)$ | i. $(7 + 8i) - (7 + 3i)$ |



Sección 2 Números complejos

Clase 5 Opuesto de un número complejo



Encuentre el valor de x .

- a. $5 + x = 0$
- b. $-3 + x = 0$
- c. $(2 + 3i) + x = 0$



- a. $5 + x = 0$
 $x = 0 - 5$
 $x = -5$
- b. $-3 + x = 0$
 $x = 0 - (-3)$
 $x = +3$
- c. $(2 + 3i) + x = 0$
 $x = 0 - (2 + 3i)$
 $x = -2 - 3i$



El opuesto de un número real es el número que sumado con el número anterior, da cero. Entonces, el opuesto de un número complejo $a + bi$ es $-(a + bi)$ o $-a - bi$, donde a y b son números reales.

Solo se necesita cambiar los signos de a y b , ¿verdad?



Ejemplo:

- a. $4 + 5i$

Opuesto: $-(4 + 5i) = -4 - 5i$

Se cambian los signos del número complejo.

- b. $-2 - i$

Opuesto: $-(-2 - i) = 2 + i$

Se cambian los signos del número complejo.



Encuentre el opuesto de los siguientes números complejos.

- | | | | |
|----------------------------|--------------|---------------------------|--------------------|
| a. $3 + i$ | b. $-2 + 6i$ | c. $1 - 4i$ | d. $-6 + 5i$ |
| e. $-4 - 7i$ | f. $5 - i$ | g. $\sqrt{2} + \sqrt{3}i$ | h. $7 + 8i$ |
| i. $-\sqrt{5} - \sqrt{7}i$ | j. $-i$ | k. $-\sqrt{2} + 5i$ | l. $4 - \sqrt{9}i$ |

Sección 2 Números complejos

Clase 6 Conjugado de un número complejo



Los resultados de la ecuación de segundo grado $x^2 - 4x + 13 = 0$ son $2 + 3i$ y $2 - 3i$. Compare y determine la diferencia entre los dos resultados.



$2 + 3i$ $2 - 3i$
Al comparar los dos resultados, los signos de la parte imaginaria son opuestos.



El conjugado de un número complejo es otro número complejo que se diferencia del anterior en el signo de la parte imaginaria.

Dado el número complejo $z = a + bi$, donde a y b son números reales, su conjugado se expresa $\bar{z} = a - bi$.

Solo se necesita cambiar los signos de la parte imaginaria, ¿verdad?



Ejemplo:

a. $z = 4 + 3i$

$\bar{z} = 4 - 3i$

Se cambia el signo de la parte imaginaria.

b. $z = 2 - \sqrt{5}i$

$\bar{z} = 2 + \sqrt{5}i$

Se cambia el signo de la parte imaginaria.



Encuentre el conjugado de los siguientes números complejos.

a. $z = 1 + 5i$

b. $z = \sqrt{3} - i$

c. $z = -2 + 3i$

d. $z = -\sqrt{5} - \sqrt{7}i$

e. $z = -\sqrt{6} + i$

f. $z = 6 - \sqrt{2}i$

g. $z = -\sqrt{2} + \sqrt{5}i$

h. $z = 4 - \sqrt{3}i$

i. $z = -7 - \sqrt{6}i$



Sección 2 Números complejos

Clase 7 Multiplicación de números complejos



Calcule la siguiente expresión.
 $(2 + i)(4 - 3i)$



$$\begin{aligned}(2 + i)(4 - 3i) &= 2 \times 4 + 2 \times (-3i) + i \times 4 + i \times (-3i) \\ &= 8 - 6i + 4i - 3i^2 \\ &= 8 - 2i - 3 \times (-1) \\ &= 8 - 2i + 3 \\ &= 11 - 2i\end{aligned}$$

Se sustituye i^2 por -1 .

$$i^2 = -1$$



Para multiplicar números complejos $a + bi$ y $c + di$, se realiza el mismo procedimiento de las operaciones algebraicas $a + bx$ y $c + dx$, sustituyendo i^2 por -1 .

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci + bd \times (-1) \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$



Calcule las siguientes expresiones.

a. $(3 + 2i)(1 - 4i)$

b. $(4 - 2i)(5 + i)$

c. $(1 - 3i)(2 - 2i)$

d. $(3 + 6i)(5 - i)$

e. $(2 + 5i)(2 - 5i)$

f. $(\sqrt{2} + i)(\sqrt{2} - i)$

g. $(5 - i)(2 + 4i)$

h. $(4 - 4i)(3 + 3i)$

i. $(\sqrt{5} + 3i)(\sqrt{5} - 3i)$

Sección 2 Números complejos

Clase 8 División de números complejos



Calcule la siguiente expresión.

$$\frac{3+2i}{2-4i}$$

$\frac{3+2i}{2-4i}$ significa $(3+2i) \div (2-4i)$.



$$\frac{3+2i}{2-4i} = \frac{(3+2i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}$$

Se multiplica por el conjugado del denominador.

$$= \frac{3 \times 2 + 3 \times 4i + 2i \times 2 + 2i \times 4i}{4 - 16i^2}$$

$$= \frac{6 + 12i + 4i + 8i^2}{4 - 16i^2}$$

$$= \frac{6 + 16i - 8}{4 + 16}$$

Se sustituye i^2 por -1 .

$$= \frac{-2 + 16i}{20}$$

$$= \frac{-1 + 8i}{10} \left(= -\frac{1}{10} + \frac{4}{5}i \right)$$

Se simplifica.



Para dividir dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$



Calcule las siguientes expresiones.

a. $\frac{1+3i}{2-i}$

b. $\frac{4+3i}{2-5i}$

c. $\frac{5-i}{2-3i}$

d. $\frac{2-2i}{3+5i}$

e. $\frac{1-4i}{1+4i}$

f. $\frac{1-3i}{3-i}$

g. $\frac{4-i}{4+2i}$

h. $\frac{2-5i}{5-2i}$

i. $\frac{2+3i}{6-2i}$



Ejercitación A

1. Clasifique los siguientes números en la figura correspondiente.

a. 0.5

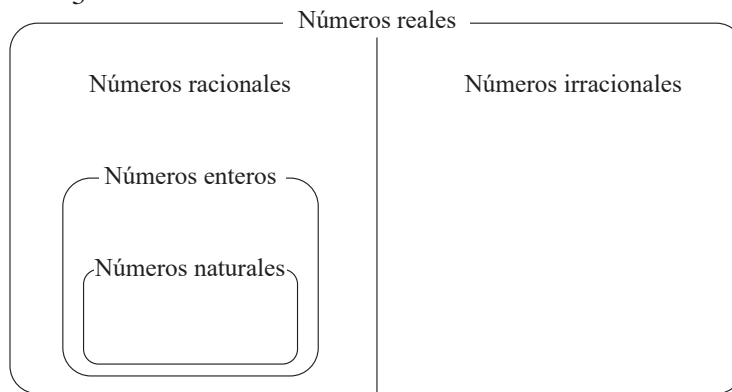
b. $-\frac{1}{3}$

c. $-\sqrt{2}$

d. 0

e. -4

f. $\sqrt{5}$



2. Exprese en términos de i .

a. $\sqrt{-2}$

b. $\sqrt{-9}$

c. $\sqrt{-7}$

d. $\sqrt{-16}$

3. Identifique la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos.

a. $2 + 4i$

b. $-3 - \sqrt{5}i$

c. 6

d. $2i$

4. Encuentre el módulo de los siguientes números complejos.

a. $z = 2 + i$

b. $z = -3 + 4i$

c. $z = \sqrt{3} + 2i$

d. $z = 4 - i$

5. Calcule las siguientes expresiones.

a. $(2 + 3i) + (3 - 5i)$

b. $(4 - 3i) + (5 + 2i)$

c. $(3 - i) - (4 + 2i)$

d. $(7 - 2i) - (5 - 4i)$

6. Encuentre el opuesto de los siguientes números complejos.

a. $6 + 2i$

b. $-3 + 7i$

c. $-2 - 5i$

d. $\sqrt{3} - \sqrt{3}i$

7. Encuentre el conjugado de los siguientes números complejos.

a. $z = 3 + i$

b. $z = -4 + 8i$

c. $z = \sqrt{2} - 5i$

d. $z = -6 - \sqrt{7}i$

8. Calcule las siguientes expresiones.

a. $(2 + 4i)(3 - i)$

b. $(5 - 2i)(2 + 4i)$

c. $(3 - 4i)(1 - 2i)$

d. $(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)$

9. Calcule las siguientes expresiones.

a. $\frac{2 + 4i}{3 - i}$

b. $\frac{1 - 5i}{2 + 3i}$

c. $\frac{4 - 3i}{2 - 4i}$

Ejercitación B

1. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 = -2$

b. $x^2 = -4$

2. Exprese en términos de i .

a. $\sqrt{-12}$

b. $\sqrt{-18}$

c. $\sqrt{-20}$

d. $\sqrt{-72}$

3. Encuentre el opuesto de los siguientes números complejos.

a. $2 - 4i$

b. $-3 - 3i$

c. $\sqrt{3} + 5i$

d. $-\sqrt{6} - 8i$

4. Calcule las siguientes expresiones.

a. $(\sqrt{2} + i) + (3\sqrt{2} - 4i)$

b. $(5 - 2\sqrt{3}i) + (4 + 6\sqrt{3}i)$

c. $(3\sqrt{6} + 5i) - (2\sqrt{6} - i)$

d. $(-4\sqrt{2} - \sqrt{5}i) - (\sqrt{2} - 2\sqrt{5}i)$

5. En la siguiente ecuación, encuentre los valores de x y y , aplicando la solución del sistema de ecuaciones.
 $(2x + 3y) + (x - 4y)i = 7 - 2i$

6. Calcule las siguientes expresiones.

a. $(\sqrt{3} + 6i)(\sqrt{3} - 6i)$

b. $(5 + \sqrt{2}i)(5 - \sqrt{2}i)$

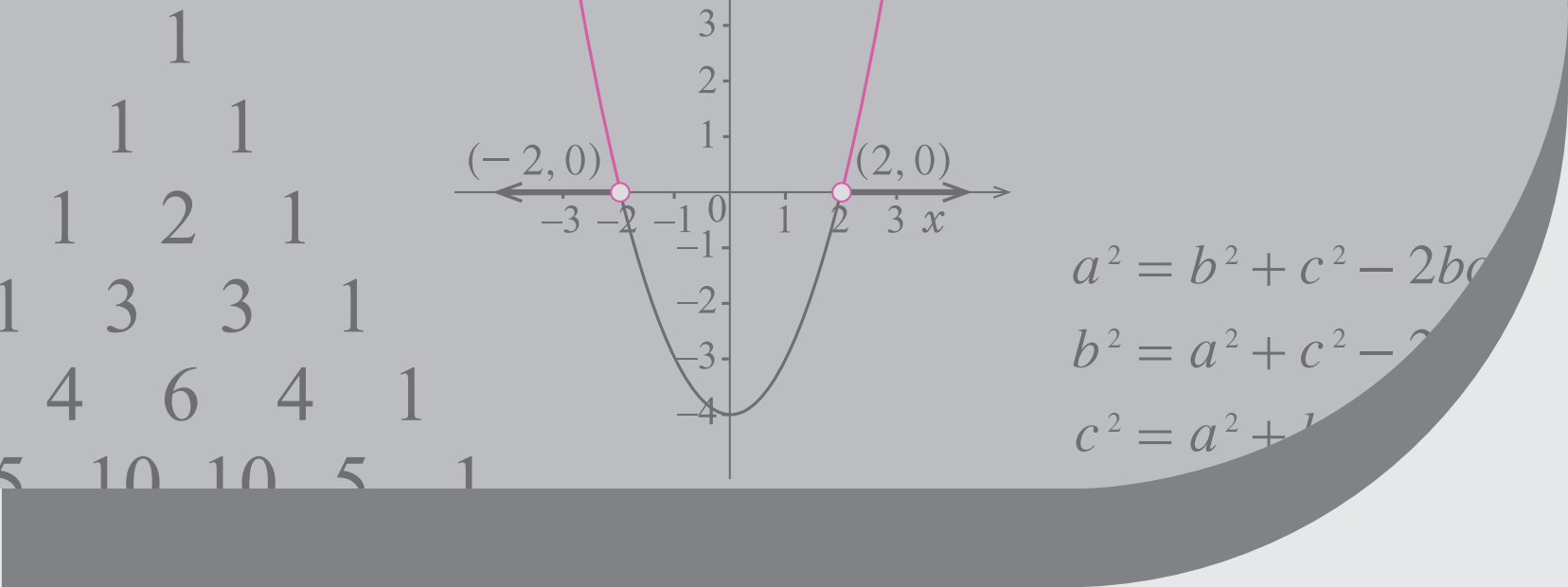
c. $(2 - i)^2$

d. $(3 + i)^2$

7. Calcule las siguientes expresiones.

a. $\frac{3+i}{3-i}$

b. $\frac{(2-i)^2}{3+2i}$



Unidad 8



Avanzado

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 1 Producto de la forma $(x + a)^3$



Desarrolle la siguiente expresión.
 $(x + 2)^3$

$$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a)$$



$$(x + 2)^3 = (x + 2)(x + 2)(x + 2)$$

Se expresa como multiplicación de tres factores.

$$= (x^2 + 4x + 4)(x + 2)$$

Se reducen los tres factores a dos, desarrollando el producto de la forma $(x + a)^2$.

$$= x^2 \times x + x^2 \times 2 + 4x \times x + 4x \times 2 + 4 \times x + 4 \times 2 \quad \text{Se multiplica.}$$

$$= x^3 + \overbrace{2x^2 + 4x^2}^{\text{semejantes}} + \underbrace{8x + 4x}_{\text{semejantes}} + 8$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Se simplifica.



El producto de la forma $(x + a)^3$ es el cubo de un binomio y se desarrolla:

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (x + 4)^3 &= x^3 + 3 \times 4 \times x^2 + 3 \times 4^2 \times x + 4^3 \\ &= x^3 + 12x^2 + 3 \times 16 \times x + 64 \\ &= x^3 + 12x^2 + 48x + 64 \end{aligned}$$



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x + 1)^3$ b. $(b + 5)^3$ c. $(y + 7)^3$ d. $(a + 3)^3$ e. $(x + 6)^3$



Sección 1 Productos de polinomios

Clase 2 Producto de la forma $(x - a)^3$



Desarrolle la siguiente expresión.
 $(x - 2)^3$

$$(x - a)^3 = (x - a)(x - a)(x - a)$$



$$(x - 2)^3 = (x - 2)(x - 2)(x - 2)$$

$$= (x^2 - 4x + 4)(x - 2)$$

Se expresa como multiplicación de tres factores.

Se reducen los tres factores a dos, desarrollando el producto de la forma $(x - a)^2$.

$$= x^2 \times x + x^2 \times (-2) - 4x \times x - 4x \times (-2) + 4 \times x + 4 \times (-2) \quad \text{Se multiplica.}$$

$$= x^3 - \overbrace{2x^2 - 4x^2}^{\text{semejantes}} + \overbrace{8x + 4x}^{\text{semejantes}} - 8$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Se simplifica.



El producto de la forma $(x - a)^3$ es el cubo de un binomio y se desarrolla:

$$(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (x - 4)^3 &= x^3 - 3 \times 4 \times x^2 + 3 \times 4^2 \times x - 4^3 \\ &= x^3 - 12x^2 + 3 \times 16 \times x - 64 \\ &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \end{aligned}$$



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x - 1)^3$ b. $(b - 5)^3$ c. $(y - 7)^3$ d. $(a - 3)^3$ e. $(y - 6)^3$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 3 Potenciación de polinomios de la forma $(x + a)^n$ y $(x - a)^n$



Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x + 3)^4$

b. $(x - 2)^5$



a. $(x + 3)^4$

$$= (x + 3)(x + 3)(x + 3)(x + 3)$$

$$= (x + 3)^2(x + 3)^2$$

$$= (x^2 + 6x + 9)(x^2 + 6x + 9)$$

Se reducen los cuatro factores a dos, desarrollando los productos de la forma $(x + a)^2$.

$$= x^2 \times x^2 + x^2 \times 6x + x^2 \times 9 + 6x \times x^2 + 6x \times 6x + 6x \times 9 + 9 \times x^2 + 9 \times 6x + 9 \times 9$$

$$= x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 6x^3 + 36x^2 + 54x + 9x^2 + 54x + 81$$

$$= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$



b. $(x - 2)^5$

$$= (x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 2)$$

$$= (x - 2)^2(x - 2)^3$$

$$= (x^2 - 4x + 4)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$$

Se reducen los cuatro factores a dos, desarrollando los productos de la forma $(x - a)^2$ y $(x - a)^3$.

$$= x^2 \times x^3 + x^2 \times (-6x^2) + x^2 \times 12x + x^2 \times (-8) + (-4x) \times x^3 + (-4x) \times (-6x^2)$$

$$+ (-4x) \times 12x + (-4x) \times (-8) + 4 \times x^3 + 4 \times (-6x^2) + 4 \times 12x + 4 \times (-8)$$

$$= x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2 - 4x^4 + 24x^3 - 48x^2 + 32x + 4x^3 - 24x^2 + 48x - 32$$

$$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$



Para desarrollar un producto de la forma $(x + a)^n$:

Paso 1. Se cambia la forma $(x + a)^n$ a la forma $\underbrace{(x + a)(x + a) \cdots (x + a)}_{n \text{ factores}}$.

Paso 2. Se expresan los productos usando potencias de segundo o tercer grado.

Paso 3. Se calcula cada potencia.

Paso 4. Se desarrollan los productos teniendo en cuenta los signos.

Paso 5. Se reducen los términos semejantes.



Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x + 2)^5$

b. $(x - 3)^4$

c. $(x + 2)^4$

d. $(x - 4)^5$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 4 Triángulo de Pascal



Desarrolle la siguiente expresión.
 $(x + y)^4$



Observe la figura, llamada triángulo de Pascal, de la derecha.

La quinta fila contiene los coeficientes de los términos del desarrollo de $(x + y)^4$.
 $(x + y)^4 = 1 \square + 4 \square + 6 \square + 4 \square + 1 \square$

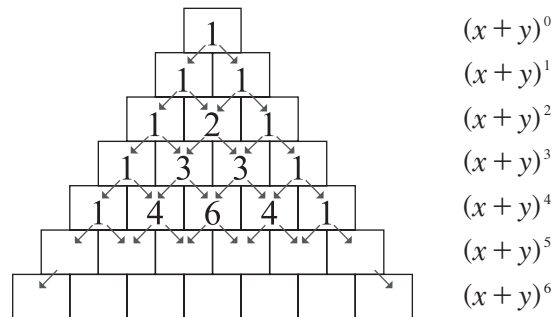
En el desarrollo del producto los exponentes de la primera variable (x) van disminuyendo, de uno en uno, desde 4 hasta 0 y los exponentes de la segunda variable (y) van aumentando, de uno en uno, desde 0 hasta 4.

La suma de los exponentes en cada término debe ser igual a 4.

$$(x + y)^4 = 1 \boxed{x^4} + 4 \boxed{x^3 y^1} + 6 \boxed{x^2 y^2} + 4 \boxed{x^1 y^3} + 1 \boxed{y^4}$$

$$= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Triángulo de Pascal



Cada casilla del triángulo se obtiene como suma de los dos números que hay justo encima de ella.

$$(x + y)^0 = 1$$



Para desarrollar un producto de la forma $(x + y)^n$, los coeficientes de los términos se obtienen en la línea $(n + 1)$ del triángulo de Pascal. La suma de los exponentes en cada término debe ser igual a n ; los exponentes de la primera variable van disminuyendo, de uno en uno, desde n hasta 0 y los exponentes de la segunda variable van aumentando, de uno en uno, desde 0 hasta n .

Ejemplo:

$$(a - b)^5 = 1a^5 + 5a^4 \times (-b)^1 + 10a^3 \times (-b)^2 + 10a^2 \times (-b)^3 + 5a^1 \times (-b)^4 + 1 \times (-b)^5$$

$$= 1 \boxed{a^5} - 5 \boxed{a^4 b^1} + 10 \boxed{a^3 b^2} - 10 \boxed{a^2 b^3} + 5 \boxed{a^1 b^4} - 1 \boxed{b^5}$$

$$= a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5$$

El binomio está elevado a la quinta potencia, por lo que los coeficientes correspondientes a cada término se encuentran en la sexta fila del triángulo. Al completar las casillas de la sexta fila, los coeficientes son: 1 5 10 10 5 1.

En el desarrollo del producto, los exponentes de la primera variable (x) van disminuyendo, de uno en uno, desde 5 hasta 0 y los exponentes de la segunda variable (y) van aumentando, de uno en uno, desde 0 hasta 5.

La suma de los exponentes en cada término debe ser igual a 5.



Desarrolle las siguientes expresiones usando el triángulo de Pascal.

a. $(a - b)^4$

b. $(x + y)^6$

c. $(a - x)^5$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 5 Binomio de Newton



Desarrolle la siguiente expresión.
 $(a + b)^3$



Forma 1.
 Exprese como multiplicación de dos factores.
 $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$
 $= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$
 $= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Forma 2.
 Aplique la fórmula: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Forma 3.

Aplique el triángulo de Pascal.
 Los coeficientes de $(a + b)^3$ se muestran en la cuarta fila.
 $(a + b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Triángulo de Pascal

$(x + y)^0$	1
$(x + y)^1$	1 1
$(x + y)^2$	1 2 1
$(x + y)^3$	1 3 3 1
$(x + y)^4$	1 4 6 4 1
$(x + y)^5$	1 5 10 10 5 1



Una potencia del binomio se puede calcular mediante el binomio de Newton.

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 \dots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0y^n$$

$\binom{n}{k}$ es llamada combinación y $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, donde $n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \times 1$.

Ejemplo:

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$$

$$= \frac{4!}{0!4!}a^4 + \frac{4!}{1!3!}a^3b + \frac{4!}{2!2!}a^2b^2 + \frac{4!}{3!1!}ab^3 + \frac{4!}{4!0!}b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

0! = 1



Desarrolle las siguientes expresiones usando el binomio de Newton.

a. $(x + y)^3$

b. $(a + b)^5$

c. $(y + z)^4$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 6 Cuadrado de un trinomio de la forma $(a + b + c)^2$



Desarrolle la siguiente expresión.
 $(x + y + 3)^2$



Sustituya $y + 3 = A$

$$\begin{aligned}(x + y + 3)^2 &= (x + A)^2 \\ &= x^2 + 2Ax + A^2 \\ &= x^2 + 2x(y + 3) + (y + 3)^2 && \text{Se sustituye } A = y + 3. \\ &= x^2 + 2xy + 6x + y^2 + 6y + 9 \\ &= x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 6y + 9\end{aligned}$$



A un producto de la forma $(a + b + c)^2$ se le llama **cuadrado de un trinomio** y se desarrolla:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(2x - 3y + 4)^2 &= (2x)^2 + (-3y)^2 + 4^2 + 2 \times 2x \times (-3y) + 2 \times (-3y) \times 4 + 2 \times 4 \times 2x \\ &= 4x^2 + 9y^2 + 16 - 12xy - 24y + 16x\end{aligned}$$



Desarrolle las siguientes expresiones.

- | | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| a. $(x + y + 1)^2$ | b. $(x - y - 1)^2$ | c. $(2x + y - z)^2$ | d. $(x - 3y - 4)^2$ |
| e. $(2x + y + 5)^2$ | f. $(2x - 3y + z)^2$ | g. $(3x - y + 5z)^2$ | h. $(3x - 4y + 2z)^2$ |

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 7 Productos de la forma $(x + a)(x^2 - ax + a^2)$ y $(x - a)(x^2 + ax + a^2)$



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
- b. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$



a.

$$\begin{aligned} (x + 2)(x^2 - 2x + 4) &= x(x^2 - 2x + 4) + 2(x^2 - 2x + 4) \\ &= x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8 \\ &= x^3 + 8 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} (x - 3)(x^2 + 3x + 9) &= x(x^2 + 3x + 9) - 3(x^2 + 3x + 9) \\ &= x^3 + 3x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27 \\ &= x^3 - 27 \end{aligned}$$



Los productos de la forma $(x + a)(x^2 - ax + a^2)$ y $(x - a)(x^2 + ax + a^2)$ se desarrollan:

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$$

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3$$

Al resultado del producto de la forma $(x + a)(x^2 - ax + a^2)$ se le llama **suma de cubos**.

Al resultado del producto de la forma $(x - a)(x^2 + ax + a^2)$ se le llama **diferencia de cubos**.



Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
- b. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
- c. $(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$
- d. $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
- e. $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$
- f. $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$
- g. $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$
- h. $(4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$

Sección 2 Factorización

Clase 1 Factorización de binomios de la forma $a^3 + b^3$ y $a^3 - b^3$



Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^3 + 27$

b. $8x^3 - y^3$

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$$

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3$$



a. $x^3 + 27 = x^3 + 3^3$

$$= (x + 3)(x^2 - 3x + 3^2)$$

$$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

Se aplica la forma $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$.

b. $8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3$

$$= (2x - y)[(2x)^2 + 2xy + y^2]$$

$$= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$$

Se aplica la forma $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.



Factorización de suma y diferencia de cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$



Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^3 + 8$

b. $x^3 - 27$

c. $27x^3 + y^3$

d. $64x^3 - y^3$

e. $x^3 + 64$

f. $125x^3 - 1$

Sección 3 Fracciones algebraicas

Clase 1 Fracción algebraica



Simplifique la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{2x^2y}{4xy^2}$$



$$\begin{aligned}\frac{2x^2y}{4xy^2} &= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \times \overset{1}{\cancel{x}} \times x \times \overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{2}{\cancel{4}} \times \underset{1}{\cancel{x}} \times \underset{1}{\cancel{y}} \times y} \\ &= \frac{x}{2y}\end{aligned}$$

Se identifican los factores comunes del denominador y del numerador, y se dividen.



Si se tiene una expresión fraccionaria $\frac{A}{B}$, entonces $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$ siendo $C \neq 0$. Por tanto, cuando el denominador y el numerador tienen factores comunes, la fracción se puede simplificar dividiendo los factores comunes.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2} &= \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{(x+1)}}(x+2)}{\underset{1}{\cancel{(x+1)}}(x-2)} \\ &= \frac{x+2}{x-2}\end{aligned}$$

Se factorizan los polinomios del denominador y del numerador.

Se identifican los factores comunes y se dividen.



Simplifique las siguientes fracciones algebraicas.

a. $\frac{6xy^3}{3x^2y}$

b. $\frac{5s^2t^3}{10s^3t^2}$

c. $\frac{2x^3}{4x^2 - 2x}$

d. $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + x - 2}$

e. $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$

f. $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6}$

Sección 3 Fracciones algebraicas

Clase 2 Multiplicación y división



Calcule las siguientes expresiones.

a. $\frac{x-1}{4x^2+4x} \times \frac{x+1}{3x-3}$

b. $\frac{x-2}{x^2+5x+6} \div \frac{2x-4}{x^2+4x+3}$



a. $\frac{x-1}{4x^2+4x} \times \frac{x+1}{3x-3} = \frac{x-1}{4x(x+1)} \times \frac{x+1}{3(x-1)}$

$$= \frac{\cancel{x-1}}{4x\cancel{(x+1)}} \times \frac{\cancel{x+1}}{3\cancel{(x-1)}}$$

$$= \frac{1}{12x}$$

Se factorizan los polinomios del denominador y del numerador.

Se identifican los factores comunes y se dividen.

b. $\frac{x-2}{x^2+5x+6} \div \frac{2x-4}{x^2+4x+3} = \frac{x-2}{x^2+5x+6} \times \frac{x^2+4x+3}{2x-4}$

Se cambia la operación de división a multiplicación.

$$= \frac{x-2}{(x+2)(x+3)} \times \frac{(x+1)(x+3)}{2(x-2)}$$

Se factorizan los polinomios del denominador y del numerador.

$$= \frac{\cancel{x-2}}{(x+2)\cancel{(x+3)}} \times \frac{(x+1)\cancel{(x+3)}}{2\cancel{(x-2)}}$$

Se identifican los factores comunes y se dividen.

$$= \frac{x+1}{2(x+2)}$$



Para multiplicar y dividir fracciones algebraicas se utiliza el mismo procedimiento que en los números fraccionarios.

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$



Calcule las siguientes expresiones.

a. $\frac{x-3}{x^2+6x} \times \frac{x+2}{5x-15}$

b. $\frac{x^2+x}{x^2-4x} \times \frac{3x-6}{x^2+3x+2}$

c. $\frac{x^2-1}{x^2-x-6} \times \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}$

d. $\frac{x+3}{x^2+5x+4} \div \frac{4x-8}{x^2+2x-8}$

e. $\frac{x^2-9}{x^2-x-6} \div \frac{x^2+4x+3}{x^2-1}$

f. $\frac{x^2-3x-10}{x^2+3x} \div \frac{x^2-25}{x^2+6x+9}$

Sección 3 Fracciones algebraicas

Clase 3 Suma y resta



Calcule las siguientes expresiones.

a. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+2}$

b. $\frac{2}{x+3} - \frac{3}{x-1}$

El MCM de denominadores no factorizables se obtiene multiplicando los denominadores.



$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+2} &= \frac{3(x+2)}{(x+1)(x+2)} + \frac{1(x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(3x+6)}{(x+1)(x+2)} + \frac{(x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{3x+6+x+1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{4x+7}{(x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

Se encuentra el MCM de los denominadores y se escriben fracciones equivalentes.

Se efectúan las operaciones del numerador.

Se suman las fracciones.

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x-1} &= \frac{2(x-1)}{(x+3)(x-1)} - \frac{3(x+3)}{(x+3)(x-1)} \\ &= \frac{(2x-2)}{(x+3)(x-1)} - \frac{(3x+9)}{(x+3)(x-1)} \\ &= \frac{2x-2-3x-9}{(x+3)(x-1)} \\ &= \frac{-x-11}{(x+3)(x-1)} \end{aligned}$$

Se encuentra el MCM de los denominadores y se escriben fracciones equivalentes.

Se efectúan las operaciones del numerador.

Se restan las fracciones.



Para sumar y restar expresiones fraccionarias con denominadores diferentes, se escriben fracciones equivalentes con denominador común utilizando el MCM, luego se efectúan las operaciones del numerador.

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} + \frac{C}{D} &= \frac{AD}{BD} + \frac{BC}{BD} = \frac{AD+BC}{BD} \\ \frac{A}{B} - \frac{C}{D} &= \frac{AD}{BD} - \frac{BC}{BD} = \frac{AD-BC}{BD} \end{aligned}$$



Simplifique las siguientes fracciones algebraicas.

a. $\frac{2}{x+3} + \frac{2}{x+2}$

b. $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x-3}$

c. $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+4}$

d. $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+3}$

e. $\frac{4}{x-2} + \frac{3}{x+3}$

f. $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}$



Sección 4 Radicación de polinomios

Clase 1 Raíz cuadrada de un polinomio



Simplifique las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$

b. $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$



a. $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$

$$= \sqrt{(x + 1)^2}$$

$$= x + 1$$

Se factoriza dentro de la raíz.

Se expresa sin el símbolo radical.

b. $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

$$= \sqrt{(x - 2)^2}$$

$$= x - 2$$

Se factoriza dentro de la raíz.

Se expresa sin el símbolo radical.



Para simplificar un polinomio de la forma $\sqrt{x^2 \pm 2ax + a^2}$:

Paso 1. Se factoriza dentro de la raíz.

$$\sqrt{x^2 \pm 2ax + a^2} = \sqrt{(x \pm a)^2}$$

Paso 2. Se expresa sin el símbolo radical.

$$\sqrt{(x \pm a)^2} = x \pm a$$



Simplifique las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$

b. $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$

c. $\sqrt{x^2 + 10x + 25}$

d. $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$

e. $\sqrt{x^2 + 14x + 49}$

f. $\sqrt{x^2 - 12x + 36}$

Sección 5 Inecuaciones de segundo grado

Clase 1 Solución de una inecuación de segundo grado



¿Qué intervalo de valores de x satisface la siguiente inecuación?

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$



El miembro izquierdo de la inecuación $x^2 - 4x + 3$ se puede factorizar como $(x - 1)(x - 3)$. Considere el valor de $(x - 1)(x - 3)$.

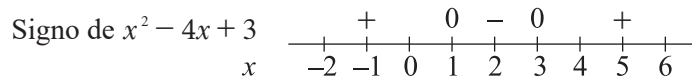
Cuando $x = 1$ o 3 , el valor de $(x - 1)(x - 3)$ es 0 .

Cuando $x < 1$, el valor de $x - 1$ es negativo y $x - 3$ es negativo, entonces el valor de $(x - 1)(x - 3)$ es positivo porque negativo por negativo es positivo.

Cuando $1 < x < 3$, el valor de $x - 1$ es positivo y $x - 3$ es negativo, entonces el valor de $(x - 1)(x - 3)$ es negativo porque positivo por negativo es negativo.

Cuando $x > 3$, el valor de $x - 1$ es positivo y $x - 3$ es positivo, entonces el valor de $(x - 1)(x - 3)$ es positivo porque positivo por positivo es positivo.

Entonces, el signo de $x^2 - 4x + 3$ se puede representar en la siguiente recta numérica.



Por tanto, cuando $1 < x < 3$, el valor de $x^2 - 4x + 3$ es negativo, entonces el intervalo $1 < x < 3$ satisface la inecuación.



A una inecuación donde la variable de mayor exponente tiene grado dos se le llama **inecuación de segundo grado** y se expresa de las formas: $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ o $ax^2 + bx + c \geq 0$.

La solución de una inecuación de segundo grado se presenta en forma de intervalo.

Para resolver una inecuación de segundo grado:

Paso 1. Se factoriza el miembro izquierdo de la inecuación que hace que el miembro derecho sea igual a 0 .

Paso 2. Se determina el signo del miembro izquierdo de la inecuación.



Ejemplo:

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$(x - 1)(x + 2) \geq 0$$

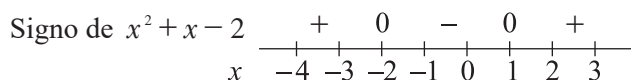
Cuando $x = -2$, $(x - 1)(x + 2) = 0$

Cuando $x = 1$, $(x - 1)(x + 2) = 0$

Cuando $x < -2$, $(x - 1)(x + 2) > 0$

Cuando $-2 < x < 1$, $(x - 1)(x + 2) < 0$

Cuando $x > 1$, $(x - 1)(x + 2) > 0$



$x^2 + x - 2 \geq 0$ significa que se incluye cuando $x^2 + x - 2 = 0$. Entonces, se incluye $x = -2$ y $x = 1$ en el intervalo.



Por tanto, la solución para la inecuación $x^2 + x - 2 \geq 0$ es $x \leq -2$ o $x \geq 1$.



Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado.

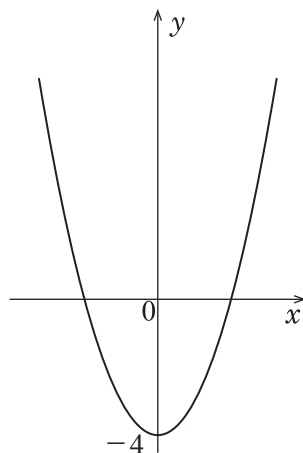
- $x^2 - 6x + 8 < 0$
- $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

Sección 5 Inecuaciones de segundo grado

Clase 2 Función cuadrática e interceptos con el eje x



Encuentre las coordenadas donde la siguiente función cuadrática interseca al eje x .
 $y = x^2 - 4$



Recuerde la función cuadrática.



$y = x^2 - 4$
 Sustituya y por 0, porque cuando $y = 0$, la gráfica interseca al eje x .

$$x^2 - 4 = 0$$

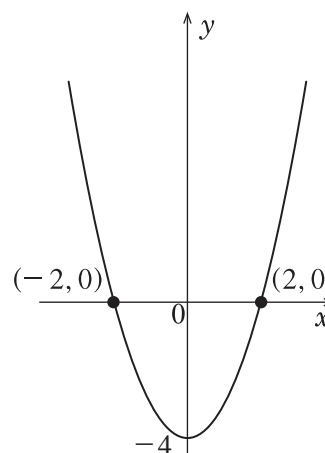
$$(x + 2)(x - 2) = 0$$

Se resuelve la ecuación.

$$x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -2 \quad \quad \quad x = 2$$

Respuesta: $(-2, 0), (2, 0)$



Para encontrar las coordenadas donde una función cuadrática interseca al eje x , se puede resolver la ecuación considerando que $y = 0$, porque cuando $y = 0$, la función interseca al eje x .



Encuentre las coordenadas donde las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas intersecan al eje x .

a. $y = x^2 - 1$

b. $y = x^2 - 9$



Sección 5 Inecuaciones de segundo grado

Clase 3 Inecuación de segundo grado y función cuadrática



Resuelva la siguiente inecuación de segundo grado.
 $x^2 - 4 > 0$



Para resolver la inecuación de segundo grado $x^2 - 4 > 0$, se puede observar la gráfica de la función $x^2 - 4 = y$.

Sustituya y por 0 para encontrar los interceptos de la gráfica con el eje x .

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x + 2)(x - 2) = 0 \quad \text{Se resuelve la ecuación.}$$

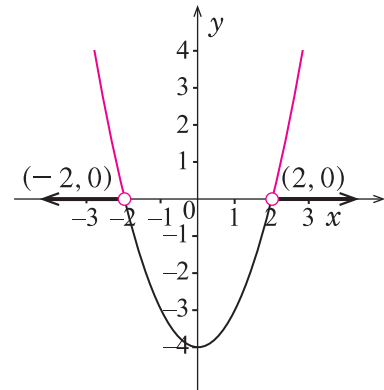
$$x = -2 \text{ o } x = 2$$

Entonces, la gráfica de la función $y = x^2 - 4$ se queda como la gráfica de la derecha con los interceptos con el eje x :

$(-2, 0)$ y $(2, 0)$

Como la gráfica muestra, cuando $x < -2$ o $2 < x$, $y > 0$.

Por tanto, la solución de $x^2 - 4 > 0$ es $x < -2$ o $x > 2$.



Para resolver una inecuación de segundo grado de la forma $ax^2 - c > 0$, $ax^2 - c \geq 0$ donde $a > 0$:

Paso 1. Se convierte la inecuación a la ecuación $ax^2 - c = 0$.

Paso 2. Se resuelve la ecuación y se encuentra el intercepto con el eje x de la gráfica de la función $y = ax^2 - c$.

Paso 3. Se traza la gráfica.

Paso 4. Se encuentra el intervalo cuando $y > 0$, $y \geq 0$.



Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a. $x^2 - 1 > 0$

b. $x^2 - 9 \geq 0$

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°

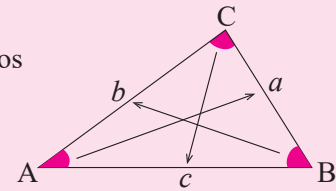
Clase 1 Teorema de Senos (1)



Teorema de Senos:

En un $\triangle ABC$ donde las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B, C son a, b, c , respectivamente:

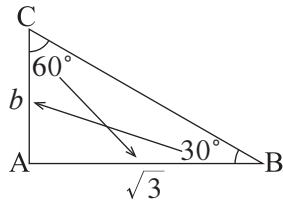
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$



Es decir, en un triángulo, la longitud de cada lado es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto a dicho lado.

Ejemplo:

En el $\triangle ABC$, $c = \sqrt{3}$, $\angle B = 30^\circ$ y $\angle C = 60^\circ$.



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Sustituya los valores dados en la fórmula del teorema de Senos de $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \times \sin 30^\circ$$

$$= \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{Se aplica } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

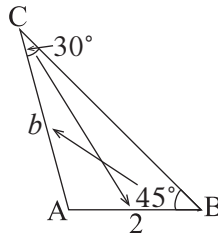
$$= \frac{\sqrt{3} \times 2 \times 1}{\sqrt{3} \times 2}$$

$$= 1$$

Con la longitud de un lado y las medidas de dos ángulos dados, se puede encontrar la longitud de los otros lados.

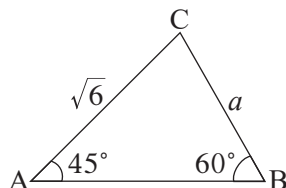


1. En el $\triangle ABC$, cuando $c = 2$, $\angle B = 45^\circ$ y $\angle C = 30^\circ$, encuentre b utilizando $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

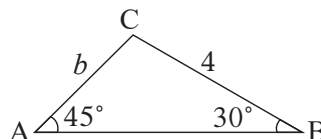


2. Encuentre la longitud del lado indicado en los siguientes triángulos.

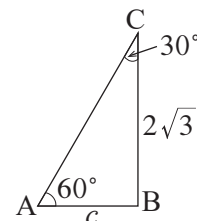
a.



b.



c.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°

Clase 2 Teorema de Senos (2)



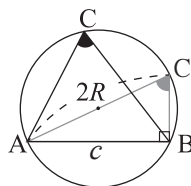
Con relación al $\triangle ABC$, existe una sola circunferencia que pasa por todos los vértices del mismo. A esta circunferencia se le llama **circunferencia circunscrita** del $\triangle ABC$.

Cuando el radio de la circunferencia circunscrita del $\triangle ABC$ se expresa como R y el diámetro de la circunferencia que pasa por el vértice A se expresa AC' , complete los cuadros en blanco.

$$\angle C = \angle C', \angle ABC' = \square$$

$$\text{Por tanto, } \sin C = \sin C' = \frac{AB}{AC'} = \square$$

$$\text{Es decir, } \frac{c}{\sin C} = \square$$



$$\angle C = \angle C',$$

Los ángulos inscritos que tienen un arco común son iguales.



$\angle ABC' = 90^\circ$, por ser un ángulo inscrito subtendido a un semicírculo AC' .

Por tanto,

$$\sin C = \sin C' = \frac{AB}{AC'} = \frac{c}{2R} \quad \text{Se sustituyen } AB \text{ por } c \text{ y } AC' \text{ por } 2R.$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

$$2R \sin C = c$$

$$2R = \frac{c}{\sin C}$$



Relación entre el triángulo y la circunferencia circunscrita:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del $\triangle ABC$.

Ejemplo:

En el $\triangle ABC$, $a = 8$ y $\angle A = 45^\circ$.

Sustituya los valores dados en la fórmula $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

$$\frac{8}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$2R = \frac{8}{\sin 45^\circ}$$

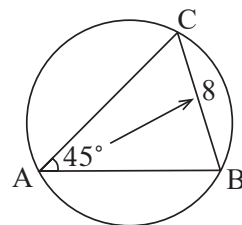
$$R = \frac{4}{\sin 45^\circ}$$

$$= 4 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4 \times \sqrt{2}}{1} = 4\sqrt{2}$$

Se dividen ambos lados entre 2.

Se aplica $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

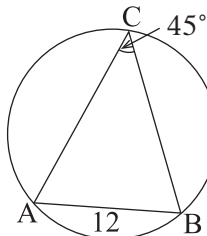


El radio R de la circunferencia circunscrita en el $\triangle ABC$ es $4\sqrt{2}$.

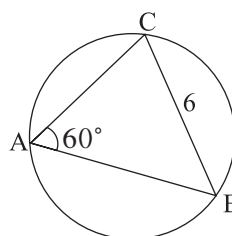


Encuentre el radio R de la circunferencia circunscrita en el $\triangle ABC$ con los siguientes valores.

a. $c = 12$, $\angle C = 45^\circ$



b. $a = 6$, $\angle A = 60^\circ$



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°

Clase 3 Teorema de Cosenos (1)



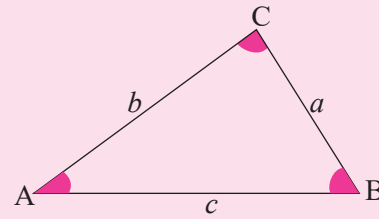
Teorema de Cosenos:

En un $\triangle ABC$ donde las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B, C son a, b, c , respectivamente:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

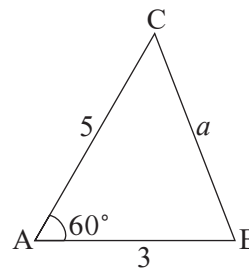


Con la longitud de dos lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos, se puede encontrar longitud del otro lado.



Ejemplo:

En el $\triangle ABC$, $b = 5$, $c = 3$ y $\angle A = 60^\circ$.



Sustituya los valores dados en la fórmula del teorema de Cosenos de $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

$$a^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \times \frac{1}{2} \quad \text{Se aplica } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

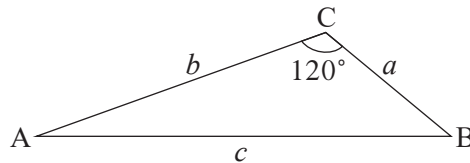
$$= 25 + 9 - 15$$

$$= 19$$

Siendo $a > 0$, $a = \sqrt{19}$



1. En el $\triangle ABC$, cuando $a = 2$, $b = 5$ y $\angle C = 120^\circ$, encuentre c utilizando $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.



Con cuidado:

Si $90^\circ < C < 180^\circ$, el valor de $\cos C$ es negativo.

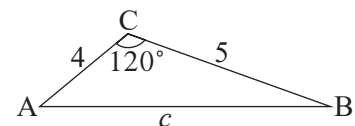
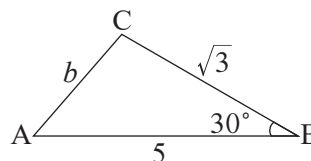
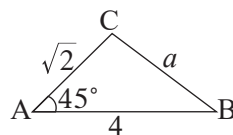


2. Encuentre la longitud del lado indicado en los siguientes triángulos.

a. Valor de a

b. Valor de b

c. Valor de c

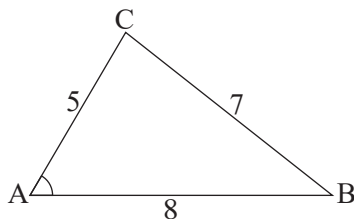


Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°

Clase 4 Teorema de Cosenos (2)

P₁

En el $\triangle ABC$, cuando $a = 7$, $b = 5$ y $c = 8$, encuentre el valor de $\cos A$ y la medida del $\angle A$.



S₁

Según el teorema de Cosenos de $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, sustituya los valores dados.

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos A$$

$$49 = 25 + 64 - 80 \cos A$$

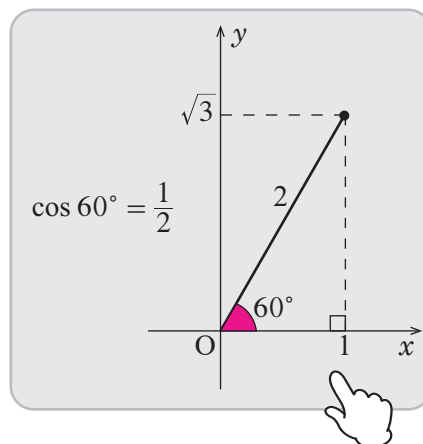
$$80 \cos A = 25 + 64 - 49$$

$$80 \cos A = 40$$

$$\cos A = \frac{1}{2}$$

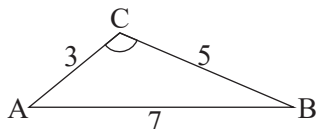
Se dividen ambos miembros entre 80.

Por tanto, $\angle A = 60^\circ$.



P₂

En el $\triangle ABC$, cuando $a = 5$, $b = 3$ y $c = 7$, encuentre el valor de $\cos C$ y la medida del $\angle C$.



S₂

Según el teorema de Cosenos de $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$: Sustituya los valores dados.

$$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos C$$

$$49 = 25 + 9 - 30 \cos C$$

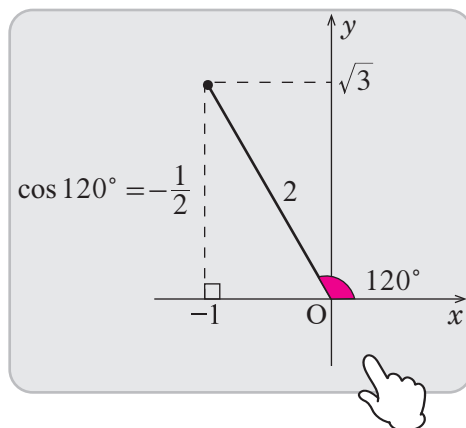
$$30 \cos C = 25 + 9 - 49$$

$$30 \cos C = -15$$

$$\cos C = -\frac{1}{2}$$

Se dividen ambos miembros entre 30.

Por tanto, $\angle C = 120^\circ$.

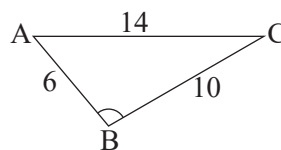
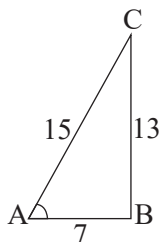


E

Encuentre el valor de coseno y la medida de los ángulos en los siguientes triángulos.

a. El valor de $\cos A$ y la medida del $\angle A$.

b. El valor de $\cos B$ y la medida del $\angle B$.



Ejercitación

1. Desarrolle las siguientes expresiones.

- a. $(x+3)^3$
- b. $(x-2)^3$
- c. $(x+2)^4$
- d. $(x+y+2)^2$
- e. $(2x-y+1)^2$
- f. $(x+2)(x^2-2x+4)$
- g. $(x-3)(x^2+3x+9)$

2. Factorice las siguientes expresiones.

- a. x^3+1
- b. x^3-8

3. Simplifique las siguientes fracciones algebraicas.

- a. $\frac{8xy^2}{4x^2y}$
- b. $\frac{3ab^2c}{9a^2bc^2}$
- c. $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$
- d. $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$

4. Calcule las siguientes expresiones.

- a. $\frac{x-1}{3x^2+3x} \times \frac{x+1}{4x-4}$
- b. $\frac{x-1}{x^2+4x+3} \times \frac{x^2+x-6}{5x-5}$
- c. $\frac{x-2}{x^2+x-6} \div \frac{2x-2}{x^2+2x-3}$
- d. $\frac{x^2+6x+9}{x^2-25} \div \frac{x^2-9}{x^2-8x+15}$

5. Simplifique las siguientes fracciones algebraicas.

- a. $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3}$
- b. $\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x-1}$
- c. $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-4}$
- d. $\frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+4}$

6. Simplifique las siguientes expresiones.

- a. $\sqrt{x^2+4x+4}$
- b. $\sqrt{x^2-6x+9}$

7. Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado.

- a. $x^2-5x+4 > 0$
- b. $x^2-x-6 \leq 0$

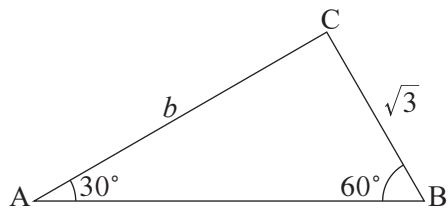
8. Encuentre las coordenadas donde las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas intersecan al eje x .

- a. $y = x^2 - 16$
- b. $y = x^2 - 25$

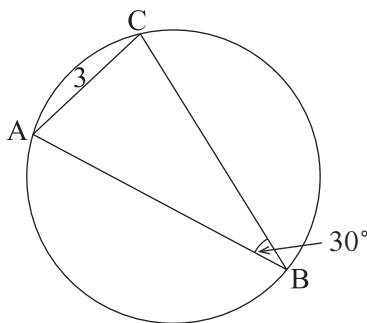
9. Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado.

- a. $x^2 - 16 > 0$
- b. $x^2 - 25 \geq 0$

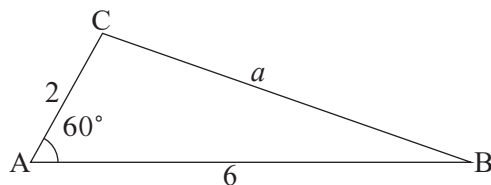
10. En el $\triangle ABC$, cuando $a = \sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, encuentre b utilizando $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.



11. Encuentre el radio R de la circunferencia circunscrita del $\triangle ABC$, si $b = 3$, $\angle B = 30^\circ$, utilizando el teorema de Senos: $\frac{b}{\sin B} = 2R$.



12. En el $\triangle ABC$, cuando $b = 2$, $c = 6$, $\angle A = 60^\circ$, encuentre a utilizando $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.



13. En el $\triangle ABC$, cuando $a = 3$, $b = \sqrt{7}$, $c = 2$, encuentre el valor de $\cos B$ y la medida del $\angle B$, utilizando $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

